

1. Wir beweisen die Aussage durch vollständige Induktion über $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsbeginn ($n = 1$): Es ist $\prod_{k=1}^1 \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k = 2 = \frac{(1+1)^1}{1!}$ (**2P**).

1P, wenn erkennbar, dass $n = 1$ eingesetzt wurde und 1P, wenn gezeigt wurde, dass die Aussage für $n = 1$ richtig ist.

Induktionsvoraussetzung: Für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte

$$\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k = \frac{(n+1)^n}{n!} \text{ (1P)}.$$

Standardformulierungen wie "Die Behauptung gelte für ein $n \in \mathbb{N}$ " sind auch in Ordnung.

Induktionsschluss: Es gilt

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{n+1} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k &= \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k \cdot \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \text{ (1P)} = \\ &\stackrel{\text{i.V.}}{=} \frac{(n+1)^n}{n!} \cdot \frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \text{ (1P)} = \frac{(n+2)^{n+1}}{n! \cdot (n+1)} = \frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)!} \text{ (1P)}. \end{aligned}$$

Mit vollständiger Induktion über $n \in \mathbb{N}$ folgt die Behauptung.

Wenn beim zweiten "=" nicht I.V. dasteht, gibt es keinen Punktabzug.

2. Nach Voraussetzung gilt $a_{n+1} \leq q \cdot a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Induktiv folgt hieraus zusammen mit der Positivität der Folgenglieder (**1P**) (*diesen Punkt gibt es auch, wenn in der folgenden Ungleichung $0 \leq a_n \dots$ oder $0 < a_n \dots$ steht*)

$$0 \leq a_n \leq q^{n-1} \cdot a_1 \text{ (2P)} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} (q^{n-1} \cdot a_1) = 0$ (**2P**) folgt mit dem Sandwich-Theorem $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ (**1P**).

Variante (mit Quotientenkriterium)

Nach Voraussetzung gilt $0 < \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Daraus folgt $\overline{\lim} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq q < 1$ (**2P**). Daher konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (**2P**) nach dem Quotientenkriterium. Nach dem notwendigen Konvergenzkriterium für Reihen muss daher $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge sein (**2P**).

3. (a) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $\frac{x^2}{n} \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ (**1P**). Daher konvergiert $(f_n)_n$ punktweise gegen $f \equiv 0$ (**1P**) (*diesen Punkt gibt es auch, wenn beim vorigen Grenzwert "für alle $x \in \mathbb{R}$ " oder auch einfach nur " $x \in \mathbb{R}$ " dabei steht, da daraus bereits folgt, dass die Grenzfunktion die Nullfunktion sein muss. Wer etwa nur $\frac{x^2}{n} \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ schreibt, ohne Angabe der Grenzfunktion und ohne zu erwähnen, woraus das x gewählt ist, bekommt nur einen von den zwei Punkten*).
- (b) Wäre $(f_n)_n$ gleichmäßig gegen $f \equiv 0$ (**1P**) konvergent, so gäbe es zu $\epsilon := 1$ (**1P**) (*freilich ist auch jedes andere zulässige $\epsilon > 0$ erlaubt*) ein $N \in \mathbb{N}$ (**1P**), so dass für alle $n \geq N$,

insbesondere für $n := N$, und alle $x \in \mathbb{R}$, insbesondere für $x := N$ (**1P**) (auch hier sind jedes andere zulässige x und jedes andere zulässige n erlaubt)

$$N = \frac{x^2}{N} < \epsilon = 1(\mathbf{1P})$$

gelten würde, im Widerspruch zu $N \geq 1$. Somit ist $(f_n)_n$ nicht gleichmäßig konvergent.

Variante 1: Man wählt wie oben $\epsilon = 1$ (**1P**) und nimmt an, dass $(f_n)_n$ gleichmäßig gegen $f \equiv 0$ (**1P**) konvergiert. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ (**1P**) mit

$$\frac{x^2}{N} < 1 = \epsilon(\mathbf{1P}) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R},$$

also $x^2 < N$ für alle $x \in \mathbb{R}$ (**1P**). Auch das ist ein Widerspruch, da die reellen Zahlen nicht beschränkt sind.

Variante 2: Die gleichmäßige Konvergenz von $(f_n)_n$ gegen $f \equiv 0$ (**1P**) ist äquivalent dazu, dass $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)|$ für $n \rightarrow \infty$ gegen 0 konvergiert (**1P**). Da für alle $n \in \mathbb{N}$ (**1P**) wegen $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{n} = \infty$ (**1P**) (für n fest) jedoch $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)| = \infty$ gilt, kann $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)|$ für $n \rightarrow \infty$ nicht gegen 0 konvergieren (**1P**).

Variante 3 (ohne Kenntnis der Grenzfunktion): Wäre $(f_n)_n$ gleichmäßig gegen f konvergent, dann gäbe es für jedes $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\left| \frac{x^2}{n} - \frac{x^2}{m} \right| = |f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| < 2\epsilon \quad (\mathbf{2P})$$

für alle $m, n \geq N$ und alle $x \in \mathbb{R}$. Wähle $n \geq N$ fest und setze $m := n + 1$ (jedes andere $m > n$ ist auch zulässig), folgt $\left| \frac{x^2}{n} - \frac{x^2}{n+1} \right| = \left| \frac{x^2}{n(n+1)} \right|$ (**1P**) $< 2\epsilon$ für alle $x \in \mathbb{R}$, im Widerspruch (**1P**) zu $\lim_{x \rightarrow \infty} \left| \frac{x^2}{n(n+1)} \right| = \infty$ (**1P**).

4. Wir nehmen an, es gäbe $x, y \in \mathbb{R}$ mit $f(x) \cdot f(y) \leq 0$ (**1P**). Da f keine Nullstellen besitzt, folgt $f(x) \cdot f(y) < 0$ (**1P**) (und hieraus insbesondere $x \neq y$). Demzufolge müssen $f(x)$ und $f(y)$ unterschiedliches Vorzeichen haben (**1P**). Nach dem Zwischenwertsatz gibt es dann ein $x_0 \in (x, y)$ bzw. $x_0 \in (y, x)$ (je nachdem, ob $x < y$ oder $x > y$) mit $f(x_0) = 0$ (**1P**), im Widerspruch (**1P**) zur Nullstellenfreiheit von f . Somit folgt die Behauptung.

5. (a) Es gilt

$$f'(x) = \exp\left(\frac{1}{x} \cdot \ln(x)\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \ln(x) + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x}\right) = \underbrace{\frac{1}{x^2} \exp\left(\frac{1}{x} \cdot \ln(x)\right)}_{>0 \text{ für } x > 0} \cdot (1 - \ln(x)). \quad (\mathbf{2P})$$

Somit folgt

$$f'(x) > 0 \stackrel{(\mathbf{1P})^*}{\iff} 1 - \ln(x) > 0 \iff \ln(x) < 1 \iff x < e.$$

Zu (*): Diesen Punkt gibt es auch, wenn vorher (wie oben) kenntlich gemacht wurde, dass der restliche Faktor der Ableitung positiv ist. Eine analoge Äquivalenz mit $f'(x) < 0 \iff 1 - \ln(x) < 0$ ist natürlich genauso richtig.

Also ist $f'(x) > 0$ für $0 < x < e$ (**1P**) (*kein Punktabzug, wenn nur $x < e$ dasteht*) und $f'(x) < 0$ für $x > e$ (**1P**). Daher ist f auf $(0, e]$ streng monoton wachsend (**1P**) und auf $[e, \infty)$ streng monoton fallend (**1P**) (*kein Punktabzug, wenn man die jeweils offenen Intervalle ohne den Punkt e nimmt*) und f besitzt in $x_0 = e$ (**1P**) ein globales Maximum (**1P**) (und sonst keine weiteren lokalen und globalen Extremwerte).

(b) Es gilt

$$(2^{\frac{1}{2}})^6 = 2^3 = 8 < 9 = 3^2 = (3^{\frac{1}{3}})^6$$

und daher $2^{\frac{1}{2}} < 3^{\frac{1}{3}}$.

Zur Bepunktung: (**1P**) auf das Potenzieren mit 6, (**1P**) auf die Folgerung $2^3 < 3^2$, (**1P**) auf die Folgerung der behaupteten Ungleichung.

(c) Es gilt $M = \{f(n) : n \in \mathbb{N}\}$. Wegen der in (a) gezeigten Monotonie gilt $f(n) \leq f(3)$ für alle $n \geq 3 > e$ und $f(n) \leq f(2)$ für $1 \leq n \leq 2 < e$ (**1P**). Daher gilt $\sup M \in \{f(2), f(3)\}$. Nach Teil (b) gilt $f(2) < f(3)$ und daher ist $\sup M = f(3) = \sqrt[3]{3}$ (**1P**). Da $f(3) \in M$, ist $f(3)$ sogar ein Maximum (**1P**).

(d) Wir untersuchen den Bruch $\frac{\ln(x)}{x}$ für $x \rightarrow \infty$ und stellen fest, dass Zähler und Nenner für $x \rightarrow \infty$ jeweils gegen ∞ gehen (**1P**) (*Nach Satz 7.21 genügt bereits der Nachweis, dass lediglich der Nenner für $x \rightarrow \infty$ gegen ∞ geht*). Leiten wir Zähler und Nenner ab, erhalten wir

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} (\mathbf{1P}) = 0 (\mathbf{1P}).$$

Nach dem Satz von de l'Hospital existiert damit $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x}$ mit $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ (**1P**). Aufgrund der Stetigkeit von \exp folgt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \exp\left(\frac{1}{x} \cdot \ln(x)\right) = \exp\left(\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x} \cdot \ln(x)\right)\right) = e^0 = 1. (\mathbf{1P})$$

6. 1. Möglichkeit: Substitution

Substituiere $u(x) := \sin(x)$ (**1P**). Dann ist $u'(x) = \cos(x)$ (**1P**). Nach der Substitutionsregel gilt

$$\begin{aligned} \int \cos(x) \ln(\sin(x)) dx &= \int u'(x) \ln(u(x)) dx (\mathbf{1P}) = \int \ln(u) du|_{u=\sin(x)} (\mathbf{1P}) = \\ &= (u \ln(u) - u)|_{u=\sin(x)} + C = \sin(x) \ln(\sin(x)) - \sin(x) + C (\mathbf{2P}). \end{aligned}$$

Hierbei haben wir das aus der Vorlesung bekannte unbestimmte Integral $\int \ln(x) dx = x \ln(x) - x + C$ benutzt, welches man sich auch (wenn man es nicht auswendig kennt) mittels partieller Integration herleiten kann:

$$\int 1 \cdot \ln(x) dx = x \ln(x) - \int \left(x \cdot \frac{1}{x}\right) dx = x \ln(x) - x + C$$

2. Möglichkeit: Partielle Integration

Es gilt

$$\begin{aligned} \int \underbrace{\cos(x)}_{=:u'} \underbrace{\ln(\sin(x))}_{=:v} dx &= \underbrace{\sin(x) \ln(\sin(x))}_{(\mathbf{2P})} - \underbrace{\int \left(\sin(x) \cdot \frac{1}{\sin(x)} \cdot \cos(x)\right) dx}_{(\mathbf{2P})} \\ &= \sin(x) \ln(\sin(x)) - \sin(x) + C (\mathbf{2P}). \end{aligned}$$