

Sie können in dieser Klausur maximal **50 Punkte** erreichen. Begründen Sie alle Ihre Antworten **verständlich, nachvollziehbar und exakt**. Wir wünschen Ihnen **viel Erfolg!**

1. Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k = \frac{(n+1)^n}{n!}.$$

(6 Punkte)

2. Es sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge positiver reeller Zahlen und es sei $q \in (0, 1)$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gelte $a_{n+1} \leq q \cdot a_n$. Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.

(6 Punkte)

3. Die Funktionenfolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei definiert durch

$$f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(x) := \frac{x^2}{n} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ punktweise konvergiert und geben Sie auch die Grenzfunktion an.

(2 Punkte)

(b) Zeigen Sie, dass die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nicht gleichmäßig konvergiert.

(5 Punkte)

4. Es sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion ohne Nullstellen. Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(x) \cdot f(y) > 0$$

gilt.

(5 Punkte)

5. Sei $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^{\frac{1}{x}} := \exp\left(\frac{1}{x} \cdot \ln(x)\right)$.

(a) Bestimmen Sie das Monotonieverhalten von f sowie sämtliche lokale und globale Maxima und Minima von f (sofern vorhanden).

(9 Punkte)

(b) Zeigen Sie $2^{\frac{1}{2}} < 3^{\frac{1}{3}}$.

(3 Punkte)

(c) Bestimmen Sie mit Hilfe von Teil (a) und (b) das Supremum der Menge

$$M := \{\sqrt[n]{n} : n \in \mathbb{N}\}.$$

Ist dieses Supremum sogar ein Maximum? (kurze Begründung)

(3 Punkte)

(d) Untersuchen Sie, ob der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ existiert und bestimmen Sie ihn gegebenenfalls. [Tipp: Satz von de l'Hospital]

(5 Punkte)

6. Bestimmen Sie eine Stammfunktion zur Funktion

$$f : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \cos(x) \ln(\sin(x)).$$

(6 Punkte)