

1. Diese Aufgabe kann man auf verschiedene Weisen lösen. Wir zeigen eine Lösung und geben danach noch 4 weitere Varianten an.

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n}$ konvergiert als geometrische Reihe (**1P**), da $|\frac{1}{5}| < 1$. Für die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$ wenden wir mit $a_n := \frac{n}{3^n}$ das Quotientenkriterium an. Es ist

$$\overline{\lim} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \overline{\lim} \left(\frac{n+1}{n} \cdot \frac{3^n}{3^{n+1}} \right) (\mathbf{1P}) = \frac{1}{3} \overline{\lim} \frac{n+1}{n} = \frac{1}{3} (\mathbf{1P}) < 1 (\mathbf{1P})$$

(wobei es letzteren Punkt auch gibt, wenn das Quotientenkriterium genannt wird oder gefolgert wird, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$ konvergiert). Somit konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$ und damit konvergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{n}{3^n} + \frac{1}{5^n})$ als Summe zweier konvergenter Reihen (**1P**).

Variante 1 (Wurzelkriterium): Die Konvergenz der obigen Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ kann man auch mit dem Wurzelkriterium zeigen. Es gilt

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = \overline{\lim} \frac{\sqrt[n]{n}}{3} (\mathbf{1P}) = \frac{1}{3} (\mathbf{1P}) < 1 (\mathbf{1P})$$

(bei letzterem Punkt gilt das gleiche wie in der obigen Lösung), da $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ nach Vorlesung.

Variante 2 (Majorantenkriterium): Die gesamte Reihe kann man abschätzen durch

$$\left| \frac{n}{3^n} + \frac{1}{5^n} \right| \leq \frac{n+1}{3^n} \leq \frac{2n}{3^n}, \quad n \in \mathbb{N}. (\mathbf{1P})$$

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3^n} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$ konvergiert wie oben gezeigt (**3P**) und dient als Majorante. Nach dem Majorantenkriterium konvergiert dann auch die gegebene Reihe (**1P**). *Natürlich ist auch jede andere zulässige Majorante erlaubt.*

Variante 3 (nochmal Quotientenkriterium): Man kann das Quotientenkriterium auch auf die gesamte Reihe anwenden, obgleich dies mit etwas mehr Rechenaufwand verbunden ist. Sei $b_n := \frac{n}{3^n} + \frac{1}{5^n}$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \frac{|b_{n+1}|}{|b_n|} &= \frac{\left(\frac{n+1}{3^{n+1}} + \frac{1}{5^{n+1}}\right) \cdot \frac{3^{n+1}}{n}}{\left(\frac{n}{3^n} + \frac{1}{5^n}\right) \cdot \frac{3^{n+1}}{n}} (\mathbf{1P}) = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} \left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}}{3 + \frac{3}{n} \left(\frac{3}{5}\right)^n} (\mathbf{2P}). \\ \Rightarrow \overline{\lim} \frac{|b_{n+1}|}{|b_n|} &= \frac{1+0}{3+0} = \frac{1}{3} (\mathbf{1P}) < 1 (\mathbf{1P}) \text{ (vgl. oben)}. \end{aligned}$$

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergiert somit nach dem Quotientenkriterium.

Variante 4 (nochmal Wurzelkriterium für Fortgeschrittene): Man kann auch das Wurzelkriterium auf die gesamte Reihe anwenden, obgleich dies nochmals mit mehr Aufwand verbunden ist. Es gilt mit $b_n := \frac{n}{3^n} + \frac{1}{5^n}$ für $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{|b_n|} &= \left(\frac{n}{3^n} + \frac{1}{5^n}\right)^{\frac{1}{n}} (\mathbf{1P}) = \frac{1}{3} \left(n + \left(\frac{3}{5}\right)^n\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{3} n^{\frac{1}{n}} \left(1 + \frac{1}{n} \left(\frac{3}{5}\right)^n\right)^{\frac{1}{n}} \leq \\ &\leq \frac{1}{3} n^{\frac{1}{n}} \left(1 + \frac{3}{5}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{3} n^{\frac{1}{n}} \left(\frac{8}{5}\right)^{\frac{1}{n}} (\mathbf{2P}). \end{aligned}$$

Mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} n^{\frac{1}{n}} \left(\frac{8}{5}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{3}(\mathbf{1P})$ folgt somit $\overline{\lim} \sqrt[n]{|b_n|} \leq \frac{1}{3} < 1(\mathbf{1P})$ und damit die Konvergenz der Reihe nach dem Wurzelkriterium.

2. Es sei ein $\epsilon > 0$ ($\mathbf{1P}$) gegeben. Wähle $\delta := \epsilon^2$ ($\mathbf{1P}$) (man darf natürlich auch $0 < \delta < \epsilon^2$ wählen). Dann gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $|x - y| < \delta$ ($\mathbf{1P}$)

$$|f(x) - f(y)| \leq \sqrt{|x - y|} < \sqrt{\delta} = \epsilon.(\mathbf{1P})$$

Dies zeigt, dass f gleichmäßig stetig ist.

3. (a) Bevor die Aufgabe besprochen wird, zunächst eine Zusammenfassung der Bepunktung im Überblick:

- 7 Punkte auf Monotonie
- 1 Punkt auf globales Minimum bei $x = 0$
- 1 Punkt für $f(0) = 1$
- 1 Punkt für $f(x) \geq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Die 7 Punkte für die Monotonie teilen sich wie folgt auf:

- 1 Punkt auf die Berechnung der Ableitung
- 2 Punkte für $f'(x) > 0$ für $x > 0$
- 2 Punkte für $f'(x) < 0$ für $x < 0$
- 1 Punkt für streng monoton wachsend für $x \in [0, \infty)$
- 1 Punkt für streng monoton fallend für $x \in (-\infty, 0]$.

Nun zur Lösung der Aufgabe: Es gilt $f'(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ ($\mathbf{1P}$) für alle $x \in \mathbb{R}$. Sei $x > 0$. Da \exp streng monoton wachsend ist, gilt $e^{-x} < e^x$ ($\mathbf{1P}$) (diesen Punkt gibt es bereits, wenn genannt wurde, dass \exp streng monoton wachsend ist) und somit $\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) > 0$ ($\mathbf{1P}$). Also gilt $f'(x) > 0$ für $x > 0$ und somit ist f auf $[0, \infty)$ streng monoton wachsend ($\mathbf{1P}$).

Sei nun $x < 0$. Dann ist wieder aufgrund der strengen Monotonie der Exponentialfunktion $e^{-x} > e^x$ ($\mathbf{1P}$) (Bepunktung genauso wie oben) und somit $f'(x) < 0$ für $x < 0$ ($\mathbf{1P}$). Daher ist f auf $(-\infty, 0]$ streng monoton fallend ($\mathbf{1P}$). Aus dem gezeigten Monotonieverhalten folgt unmittelbar, dass f in $x = 0$ ein globales Minimum ($\mathbf{1P}$) besitzt mit dem Wert $f(0) = \frac{1}{2}(e^0 + e^{-0}) = 1$ ($\mathbf{1P}$). Dies zeigt $f(x) \geq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ($\mathbf{1P}$).

Bemerkung: Es wird insgesamt 1 Punkt abgezogen, wenn man nur geschrieben hat, dass f auf den entsprechenden *offenen* Intervallen (ohne den Nullpunkt), d.h. auf $(-\infty, 0)$ bzw. $(0, \infty)$ streng monoton ist. Hieraus allein wird nämlich noch nicht klar, warum $x = 0$ ein globales Minimum ist. Wenn jedoch zusätzlich zur strengen Monotonie auf besagten offenen Intervallen erwähnt wird, dass $f'(0) = 0$ ist oder dass f monoton fallend bzw. wachsend auf $(-\infty, 0]$ bzw. $[0, \infty)$ ist, gibt es keinen Punktabzug. Mit Korollar 7.16(iii) folgt dann nämlich, dass ein globales Minimum bei $x = 0$ vorliegt.

Variante, um auf $x = 0$ als Kandidaten für das Minimum zu kommen: Setze $f'(x) = 0$, so folgt $e^x = e^{-x}$ und schließlich $x = -x$, also $x = 0$. Dies zeigt, dass f in $x = 0$ einen

kritischen Punkt besitzt. Um zu zeigen, dass dieser kritische Punkt ein globales Minimum ist, argumentiere man mit dem Monotonieverhalten wie zuvor.

Variante, um die strenge Monotonie zu zeigen, ohne die Ableitung zu benutzen:

Sei $x > y \geq 0$. Dann ist $x + y > 0$ und $e^{x+y} > 1$ (**1P**). Hieraus folgt mit der Monotonie von \exp (**1P**) (*diese beiden Punkte gibt es auch, wenn -wie in der nachstehenden Rechnung- kenntlich gemacht wurde, dass die entsprechenden Faktoren positiv sind*)

$$\frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) - \frac{1}{2}(e^y + e^{-y}) \stackrel{\text{(1P)}}{=} \frac{1}{2e^{x+y}} \underbrace{(e^x - e^y)}_{>0} \underbrace{(e^{x+y} - 1)}_{>0} > 0 \text{(1P)}$$

und folglich $f(x) > f(y)$. Somit ist f streng monoton wachsend auf $[0, \infty)$.

Sei nun $0 \geq y > x$. Dann ist $x + y < 0$ und $e^{x+y} < 1$ (**1P**). Hieraus folgt wiederum mit der Monotonie von \exp (**1P**) (*auch hier gibt es die Punkte, wenn -wie in der nachstehenden Rechnung- kenntlich gemacht wurde, dass beide Faktoren negativ sind*)

$$\frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) - \frac{1}{2}(e^y + e^{-y}) = \frac{1}{2e^{x+y}} \underbrace{(e^x - e^y)}_{<0} \underbrace{(e^{x+y} - 1)}_{<0} > 0 \text{(1P)}$$

und folglich $f(x) > f(y)$. Somit ist f streng monoton fallend auf $(-\infty, 0]$.

Variante, um auf $f'(x) > 0$ für $x > 0$ und $f'(x) < 0$ für $x < 0$ zu gelangen: Es gilt wegen der Monotonie der Exponentialfunktion $f'(1) = \frac{1}{2}(e^1 - e^{-1}) > 0$ und $f'(-1) = \frac{1}{2}(e^{-1} - e^1) = -f'(1) < 0$ (**1P**). Da f' stetig (**1P**) ist und 0 die einzige Nullstelle von f' ist (**1P**), gilt mit dem Zwischenwertsatz für stetige Funktionen $f'(x) > 0$ für $x > 0$ und $f'(x) < 0$ für $x < 0$ (**1P**). *Anstelle des Zwischenwertsatzes für stetige Funktionen darf man auch den Zwischenwertsatz für Ableitungen aus Aufgabe 42 vom 12. Übungsblatt (für den man die Stetigkeit von f' gar nicht benötigt!) verwenden. Wenn man sich auf diese Aufgabe bezieht, bekommt man den Punkt, den es auf die Stetigkeit von f' gab.*

- (b) Sei $c \in [1, \infty)$ gegeben (**1P**). Es gilt $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ (**1P**) sowie $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty$ (**1P**). Daher gilt $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ (**1P**). Es gibt daher ein $a > 0$ mit $f(a) > c$ (**1P**). Weiter gilt $f(0) = 1$ und somit $f(0) \leq c < f(a)$ (**1P**) (*diesen Punkt gibt es bereits für die Erkenntnis $f(0) = 1$, da der Rest der Ungleichung schon vorher gezeigt bzw. vorausgesetzt wurde*). Nach dem Zwischenwertsatz gibt es ein $x_0 \in [0, a]$ mit $f(x_0) = c$ (**1P**). Dies zeigt, dass $f : \mathbb{R} \rightarrow [1, \infty)$ surjektiv ist.

Variante: Man kann freilich auch mit $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$ argumentieren. In diesem Fall wählt man in analoger Weise $a < 0$ mit $f(a) > c$ und $x_0 \in [a, 0]$.

Variante ohne Zwischenwertsatz: Sei $c \in [1, \infty)$ gegeben (**1P**). Setze $z := e^x$ (**1P**) für $x \in \mathbb{R}$, so lässt sich die zu lösende Gleichung $f(x) = c$ äquivalent umformen zu

$$\frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) = c \iff z^2 - 2cz + 1 = 0. \text{(2P)}$$

Die Lösungen dieser quadratischen Gleichung sind durch $z_{1,2} := c \pm \sqrt{c^2 - 1}$ gegeben. Wähle die Lösung mit dem positiven Vorzeichen $z_1 := c + \sqrt{c^2 - 1}$ (**1P**) (*die Lösung z_2 mit dem negativen Vorzeichen geht genauso, beim positiven Vorzeichen sieht man jedoch schneller, dass $z_1 > 0$ ist, was man im Folgenden benötigt*). Durch Resubstitution $x = \ln(z)$ ergibt

sich somit $f(x_0) = c$ (**1P**) für $x_0 := \ln(c + \sqrt{c^2 - 1})$ (**1P**) (hier benötigt man $z_1 > 0$). Dies zeigt, dass f surjektiv ist.

(c) Für alle $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (**1P**) gilt $f(a) = f(-a)$ (**1P**), obwohl $a \neq -a$. Somit ist f nicht injektiv (**1P**).

Es genügt natürlich, wenn man ein bestimmtes $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ wählt, z.B. $a = 1$ und $f(1) = f(-1)$ folgert.

Variante: Nach Satz 6.3 ist f genau dann injektiv auf \mathbb{R} , wenn f entweder streng monoton wachsend oder streng monoton fallend ist. Da f nach Teil (a) weder streng monoton wachsend auf \mathbb{R} noch streng monoton fallend auf \mathbb{R} ist, ist f somit nicht injektiv.

4. Wir beweisen die Aussage durch vollständige Induktion über $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsbeginn ($n = 1$): Es ist $f'(x) = \frac{-3}{(1+x)^4}$ (**2P**) = $-\frac{1}{2} \cdot 3! \cdot \frac{1}{(1+x)^4}$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. *1P, wenn erkennbar, dass $n = 1$ eingesetzt wurde und 1P, wenn gezeigt wurde, dass die Aussage für $n = 1$ richtig ist. Es ist auch erlaubt, den Induktionsbeginn ab $n = 0$ zu starten.*

Induktionsvoraussetzung: Für ein $n \in \mathbb{N}$ (bzw. für ein $n \in \mathbb{N}_0$) gelte

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n}{2} \cdot (n+2)! \cdot \frac{1}{(1+x)^{n+3}}$$

für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ (**1P**). *Standardformulierungen wie "Die Behauptung gelte für ein $n \in \mathbb{N}$ " sind auch in Ordnung.*

Induktionsschluss: Für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ gilt

$$\underbrace{f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)})'(x)}_{\text{(1P)*}} \stackrel{\text{I.V.**}}{=} \frac{(-1)^n}{2} \cdot (n+2)! \cdot \frac{d}{dx} \frac{1}{(1+x)^{n+3}} = \frac{(-1)^n}{2} \cdot (n+2)! \cdot \frac{-(n+3)}{(1+x)^{n+4}} \text{(1P)} = \\ = \frac{(-1)^{n+1}}{2} \cdot (n+3)! \cdot \frac{1}{(1+x)^{n+4}} \text{(1P)}.$$

Mit vollständiger Induktion über $n \in \mathbb{N}$ folgt die Behauptung.

Zu (*): *Es genügt, wenn einer der beiden Ausdrücke $f^{(n+1)}(x)$ oder $(f^{(n)})'(x)$ dasteht.*

Zu (**): *Wenn beim zweiten "=" nicht I.V. dasteht, gibt es keinen Punktabzug.*

5. Wir substituieren $t := \sqrt{x}$ (**1P**) und setzen $\Phi(t) := t^2$ mit $\Phi^{-1}(x) = \sqrt{x}$. Es gilt dann $\Phi'(t) = 2t$ (**1P**) (die mathematisch zwar unsaubere, jedoch einprägsame "Physiker-Methode" $\frac{dx}{dt} = 2t \Rightarrow dx = 2tdt$ ist hier genauso erlaubt) sowie $\Phi^{-1}(9) = 3$ und $\Phi^{-1}(1) = 1$. Nach der Substitutionsregel, angewandt auf $f(x) := \exp(\sqrt{x})$ gilt

$$\int_1^9 f(x) dx = \int_{\Phi^{-1}(1)}^{\Phi^{-1}(9)} f(\Phi(t)) \Phi'(t) dt = \int_1^3 e^t \cdot 2t dt \text{ (3P)}$$

(hierbei 1P auf richtige Obergrenze, 1P auf richtige Untergrenze, 1P auf richtigen Integranden).

Mit partieller Integration folgt weiter

$$\int_1^3 \underbrace{e^t}_{=:g'} \cdot \underbrace{2t}_{=:h} dt = \underbrace{[2te^t]_{t=1}^{t=3} - 2 \int_1^3 e^t dt}_{\text{(2P)}} = \underbrace{6e^3 - 2e - 2(e^3 - e)}_{\text{(2P)}} = 4e^3.$$

6. Da s eine obere Schranke von A ist, folgt $\sup(A) \leq s$ (**2P**) aus der Definition des Supremums als kleinste obere Schranke.

Da $(a_n)_n \subseteq A$, gilt $a_n \leq \sup(A)$ (**2P**) für alle $n \in \mathbb{N}$ und somit auch $s = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \sup(A)$ (**2P**) wegen Satz 3.5(vi). Aus $\sup(A) \leq s$ und $s \leq \sup(A)$ folgt nunmehr $s = \sup(A)$.

Variante: Wir zeigen die Behauptung mit Hilfe des Kriteriums für Suprema aus der Vorlesung, nämlich:

$$s = \sup(A) \iff s \text{ ist obere Schranke von } A \text{ und } \forall \epsilon > 0 \exists a \in A : s - \epsilon < a. \quad (*)$$

Dass s obere Schranke ist, steht bereits in der Voraussetzung (**2P**). Sei $\epsilon > 0$ gegeben (**2P**). Da $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = s$, gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $s - \epsilon < a_n$ für alle $n \geq N$ (**2P**). Somit leistet etwa $a := a_N \in A$ (oder auch jedes andere a_n , sofern $n \geq N$) die gewünschte Eigenschaft aus (*).