

Sie können in dieser Klausur maximal **50 Punkte** erreichen. Begründen Sie alle Ihre Antworten **verständlich, nachvollziehbar und exakt**. Wir wünschen Ihnen **viel Erfolg!**

1. Untersuchen Sie die folgende Reihe auf Konvergenz. Den Grenzwert (sofern er überhaupt existiert) müssen Sie hierbei *nicht* bestimmen.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3^n} + \frac{1}{5^n} \right) \quad (5 \text{ Punkte})$$

2. Es sei eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben mit

$$|f(x) - f(y)| \leq \sqrt{|x - y|} \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, dass f gleichmäßig stetig ist. (4 Punkte)

3. Es sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $x \mapsto \cosh(x) := \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$.

- (a) Geben Sie die Bereiche an, wo f streng monoton wachsend und streng monoton fallend ist und bestimmen Sie (sofern vorhanden) alle lokalen und globalen Extremwerte von f mit zugehörigen Funktionswerten. Folgern Sie hieraus $f(x) \in [1, \infty)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. (10 Punkte)
- (b) Zeigen Sie, dass $f : \mathbb{R} \rightarrow [1, \infty)$ surjektiv ist. (7 Punkte)
- (c) Ist f auch injektiv? Begründen Sie Ihre Antwort. (3 Punkte)

4. Es sei $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $x \mapsto \frac{1}{(1+x)^3}$. Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ gilt (6 Punkte)

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n}{2} \cdot (n+2)! \cdot \frac{1}{(1+x)^{n+3}}.$$

5. Berechnen Sie das folgende bestimmte Integral:

$$\int_1^9 \exp(\sqrt{x}) dx \quad (9 \text{ Punkte})$$

6. Es sei $A \subseteq \mathbb{R}$ eine nichtleere Menge und $s \in \mathbb{R}$ sei eine obere Schranke von A . Weiter sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A$ eine konvergente Folge mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = s$.
Zeigen Sie: $s = \sup(A)$. (6 Punkte)