

## 1. Stetigkeit und Differenzierbarkeit.

Für  $a, b \in \mathbb{R}$  betrachten wir die Funktion

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} (x+a)^2 & \text{für } x \leq 0 \\ (x+b)^4 & \text{für } x > 0 \end{cases}.$$

(a) Bestimme alle Paare  $(a, b)$  mit  $a, b \geq 0$ , für die  $f$  in  $x = 0$  stetig ist. (7 Punkte)

(b) Bestimme alle Paare  $(a, b)$  mit  $a, b \geq 0$ , für die  $f$  in  $x = 0$  differenzierbar ist.

(11 Punkte)

---

(a) Wegen der Stetigkeit von Polynomfunktionen gilt

$$\underbrace{\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)}_{(1P)^\dagger} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \underbrace{(x+a)^2}_{(1P)^*} = (0+a)^2 = \underbrace{a^2}_{(1P)^*}$$

und

$$\underbrace{\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)}_{(1P)^\dagger} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \underbrace{(x+b)^4}_{(1P)^*} = (0+b)^4 = \underbrace{b^4}_{(1P)^*}.$$

[Die mit  $\dagger$  markierten Punkte gibt es auch, wenn generell von links- und rechtsseitigen Grenzwerten, oder von der Stetigkeit von  $(x+a)^2$  bzw.  $(x+b)^4$  die Rede ist. Wenn nur in  $(x+a)^2$  bzw.  $(x+b)^4$  eingesetzt wird, ohne weitere Begründung, gibt es die mit  $*$  markierten Punkte.]

$f$  ist genau dann in  $x = 0$  stetig, wenn der links- und rechtsseitige Grenzwert an dieser Stelle übereinstimmen, d.h. wenn  $a^2 = b^4$  (1P) gilt. Wegen  $a, b \geq 0$  ist dies äquivalent zu  $a = b^2$ .  $f$  ist daher genau dann in  $x = 0$  stetig, wenn  $a = b^2$  gilt.

[Die Gleichung  $a = b^2$  ist hier nicht unbedingt erforderlich. Es gibt keinen Abzug, wenn auch negative Lösungen, z.B. in der Form  $a = \pm b^2$  angegeben werden.]

(b) 1. Lösungsvariante. (Differenzenquotient.) Wenn  $f$  in  $x = 0$  differenzierbar ist, so muss  $f$  in  $x = 0$  jedenfalls stetig sein, d.h. nach (a), dass  $a = b^2$  (1P) gilt.

Darüberhinaus haben wir zu untersuchen, ob der Differenzenquotient  $h(x) := \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$  (1P) in  $x = 0$  stetig fortsetzbar ist. Für  $x < 0$  ist

$$h(x) = \frac{(x+a)^2 - a^2}{x} = \frac{x^2 + 2ax + a^2 - a^2}{x} = \frac{x^2 + 2ax}{x} = \underbrace{x + 2a}_{(1P)}$$

und daher

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = 0 + 2a = \underbrace{2a}_{(1P)}.$$

Für  $x > 0$  ist

$$h(x) = \frac{(x+b)^4 - a^2}{x} = \frac{x^4 + 4x^3b + 6x^2b^2 + 4xb^3 + b^4 - a^2}{x} \stackrel{a=b^2}{=} \frac{x^4 + 4x^3b + 6x^2b^2 + 4xb^3}{x} \stackrel{(1P)}{=} \underbrace{x^3 + 4x^2b + 6xb^2 + 4b^3}_{(2P)}$$

und daher

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = 0^3 + 4 \cdot 0^2 \cdot b + 6 \cdot 0 \cdot b^2 + 4b^3 = \underbrace{4b^3}_{(1P)}.$$

Nach Übungsaufgabe 39(b) ist  $h$  genau dann in  $x = 0$  stetig fortsetzbar, wenn der rechtsseitige und der linksseitige Grenzwert übereinstimmen, wenn also  $2a = 4b^3$  **(1P)** gilt. Wegen  $a = b^2$  gilt

$$2a = 4b^3 \iff 2b^2 = 4b^3 \iff 2b^2 \cdot (1 - 2b) = 0 \iff (b = 0 \text{ oder } b = \frac{1}{2}).$$

Wegen  $a = b^2$  ist also  $f$  genau dann in  $x = 0$  differenzierbar, wenn entweder  $a = b = 0$  oder  $a = \frac{1}{4}$ ,  $b = \frac{1}{2}$  gilt. **[(2P), und zwar einen Punkt für jedes richtige Paar  $(a, b)$ . Kein Abzug, wenn auch Lösungen mit negativem  $a$  und/oder  $b$  angegeben werden.]**

2. Lösungsvariante. (Übungsaufgabe 52(b).) Offenbar ist  $f$  auf  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  differenzierbar. Nach Übungsaufgabe 52(b) ist  $f$  daher dann in  $x = 0$  differenzierbar, wenn  $f$  dort stetig ist, und sich  $f'|(\mathbb{R} \setminus \{0\})$  in  $x = 0$  stetig fortsetzen läßt.

Ist umgekehrt  $f$  in  $x = 0$  differenzierbar, so ist  $f$  auch stetig differenzierbar. Das liegt daran, dass bei unserem  $f$  für jede Wahl von  $a, b$  die Ableitung  $f'$  in  $x = 0$  zumindest links- und rechtsseitig stetig ist. **(1P)**

Die Bedingung, dass  $f$  in  $x = 0$  stetig ist, ist nach (a) äquivalent zu  $a = b^2$ . **(1P)**

Es gilt

$$f'(x) = \begin{cases} 2(x+a) & \text{für } x < 0 & \mathbf{(1P)} \\ 4(x+b)^3 & \text{für } x > 0 & \mathbf{(1P)} \end{cases}$$

und daher wegen der Stetigkeit von Polynomfunktionen

$$\underbrace{\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = 2(0+a) = 2a}_{(1P)} \quad \text{und} \quad \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 4(0+b)^3 = 4b^3}_{(1P)}.$$

Nach Übungsaufgabe 39(b) ist  $f'|(\mathbb{R} \setminus \{0\})$  genau dann in  $x = 0$  stetig fortsetzbar, wenn  $2a = 4b^3$  **(1P)** gilt.

Nach alledem ist  $f$  dann in  $x = 0$  differenzierbar, wenn  $a = b^2$  und  $2a = 4b^3$  gilt. Wie in der 1. Lösungsvariante ergibt sich aus diesen Gleichungen das Resultat. **[(2P), und zwar einen Punkt für jedes richtige Paar  $(a, b)$ . Kein Abzug, wenn auch Lösungen mit negativem  $a$  und/oder  $b$  angegeben werden.]**

## 2. Extremwertsuche.

Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x^2}{1+x^4}.$$

- (a) Berechne  $f'(x)$  und finde alle kritischen Punkte von  $f$ . (5 Punkte)  
*Hinweis.* Es gibt genau drei kritische Punkte. Diese bezeichnen wir im Folgenden mit  $x_1$ ,  $x_2$  und  $x_3$ , wobei  $x_1 < x_2 < x_3$  sei.
- (b) Man untersuche, ob  $f$  auf den Intervallen  $(-\infty, x_1]$ ,  $[x_1, x_2]$ ,  $[x_2, x_3]$  und  $[x_3, \infty)$  jeweils monoton wachsend, monoton fallend, oder keins von beidem ist. (6 Punkte)
- (c) Entscheide für die kritischen Punkte von  $f$  jeweils, ob es sich um ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum oder keins von beidem handelt. Berechne außerdem die zugehörigen Funktionswerte. (6 Punkte)  
 [Tipp. Das geht am einfachsten, indem man *nicht*  $f''(x)$  ausrechnet, sondern stattdessen das Ergebnis von (b) verwendet.]
- (d) Bestimme die Grenzwerte  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  und  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ . (2 Punkte)
- (e) Skizziere den Graphen von  $f$ . (3 Punkte)
- (f) Untersuche mithilfe der bisherigen Ergebnisse, ob die Funktion  $f$  ein (globales) Maximum und/oder Minimum annimmt, und bestimme gegebenenfalls, an welchen Stellen diese angenommen werden. (4 Punkte)

- (a) Mit der Quotientenregel erhält man

$$f'(x) = \frac{2x \cdot (1+x^4) - x^2 \cdot 4x^3}{(1+x^4)^2} = \frac{2x - 2x^5}{(1+x^4)^2}. \quad (2P)$$

Da der Nenner stets  $\neq 0$  ist [braucht nicht dazustehen], liegt ein kritischer Punkt vor, d.h. es gilt  $f'(x) = 0$ , wenn  $2x - 2x^5 = 0$  ist, also  $-2x \cdot (x-1) \cdot (x+1) \cdot (x^2+1) = 0$  gilt. Dies ist genau dann der Fall, wenn  $x = 0$  oder  $x = 1$  oder  $x = -1$  ist. Somit sind  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = 0$  und  $x_3 = 1$  die drei kritischen Punkte. [(3P), nämlich einen Punkt für jeden korrekt berechneten kritischen Punkt.]

- (b) 1. Lösungsvariante (Ungleichungen). Nach Satz 7.15 (ii),(iii) ist  $f$  genau dann auf einem Intervall monoton wachsend (monoton fallend), wenn dort  $f' \geq 0$  ( $f' \leq 0$ ) gilt. Weil für jedes  $x \in \mathbb{R}$  gilt:  $\frac{2}{(1+x^4)^2} > 0$ , stimmt das Vorzeichen von  $f'(x)$  mit dem Vorzeichen von  $x - x^5 = x \cdot (1 - x^4)$  überein. Für die vier Intervalle ergibt sich daher:

$I$	$x$	$x^4$	$1 - x^4$	$x \cdot (1 - x^4)$	$f' I$	$f I$ ist ...
$(-\infty, -1]$	$\leq 0$	$\geq 1$	$\leq 0$	$\geq 0$	$\geq 0$	monoton wachsend
$[-1, 0]$	$\leq 0$	$\leq 1$	$\geq 0$	$\leq 0$	$\leq 0$	monoton fallend
$[0, 1]$	$\geq 0$	$\leq 1$	$\geq 0$	$\geq 0$	$\geq 0$	monoton wachsend
$[1, \infty)$	$\geq 0$	$\geq 1$	$\leq 0$	$\leq 0$	$\leq 0$	monoton fallend

[(4P): einen Punkt für jede korrekte Bestimmung des Vorzeichens von  $f'$  auf einem der Intervalle. (2P): je einen Punkt für den Schluß „ $f' \geq 0 \implies f$  monoton wachsend“ bzw. „ $f' \leq 0 \implies f$  monoton fallend“.]

2. Lösungsvariante (Zwischenwertsatz). Weil  $f'$  stetig ist, kann  $f'$  das Vorzeichen auf den Intervallen zwischen seinen Nullstellen nicht wechseln. (2P) Um zu entscheiden, ob  $f'$  auf einem der genannten Intervalle  $> 0$  oder  $< 0$  ist, genügt es daher, jeweils einen Punkt dieser Intervalle zu betrachten. Es ergibt sich daher:

$I$	Wert von $f'$ an einer Stelle	Folgerung für $f' I$	$f I$ ist ...
$(-\infty, -1]$	$f'(-2) = \frac{60}{289} > 0$	$> 0$	monoton wachsend
$[-1, 0]$	$f'(-\frac{1}{2}) = -\frac{240}{289} < 0$	$< 0$	monoton fallend
$[0, 1]$	$f'(\frac{1}{2}) = \frac{240}{289} > 0$	$> 0$	monoton wachsend
$[1, \infty)$	$f'(2) = -\frac{60}{289} < 0$	$< 0$	monoton fallend

[(2P): je einen halben Punkt für die Auswertung von  $f'$  an einer Stelle in einem der Intervalle. (2P): je einen Punkt für den Schluß „ $f' \geq 0 \implies f$  monoton wachsend“ bzw. „ $f' \leq 0 \implies f$  monoton fallend“.]

- (c) 1. Lösungsvariante (Vorzeichen von  $f'$  nahe bei  $x_k$ ). Nach Korollar 7.16(iii),(iv) liegt im kritischen Punkt  $x_k$  ein lokales Maximum (lokales Minimum) vor, wenn für ein  $\varepsilon > 0$  gilt:  $f'(x_k - \varepsilon, x_k) \geq 0$  und  $f'(x_k, x_k + \varepsilon) \leq 0$  (bzw.  $f'(x_k - \varepsilon, x_k) \leq 0$  und  $f'(x_k, x_k + \varepsilon) \geq 0$ ). Mit (b) ergibt sich, dass  $x_1 = -1$  und  $x_3 = 1$  lokale Maxima sind, wogegen  $x_2 = 0$  ein lokales Minimum ist. [(3P): einen Punkt für jede korrekte Bestimmung als Maximum/Minimum.] Es gilt  $f(-1) = f(1) = \frac{1}{2}$  und  $f(0) = 0$ . [(3P): einen Punkt für jeden korrekten Funktionswert.]

2. Lösungsvariante ( $f''(x_k)$ ). Mit einer etwas mühsamen Rechnung (weswegen im Tipp von diesem Lösungsweg abgeraten wurde) erhält man

$$f''(x) = 2 \frac{1}{1+x^4} - 28 \frac{x^4}{(1+x^4)^2} + 32 \frac{x^8}{(1+x^4)^3}$$

und hieraus durch Einsetzen

$$f''(x_1) = f''(-1) = 2 \frac{1}{1+(-1)^4} - 28 \frac{(-1)^4}{(1+(-1)^4)^2} + 32 \frac{(-1)^8}{(1+(-1)^4)^3}$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2} - 28 \cdot \frac{1}{4} + 32 \cdot \frac{1}{8} = -2 < 0$$

$$f''(x_2) = f''(0) = 2 \frac{1}{1+0^4} - 28 \frac{0^4}{(1+0^4)^2} + 32 \frac{0^8}{(1+0^4)^3} = 2 > 0$$

$$f''(x_3) = f''(1) = f''(-1) < 0.$$

Somit liegen in  $x_1$  und in  $x_3$  lokale Maxima vor, wogegen in  $x_2$  ein lokales Minimum vorliegt. [(3P): einen Punkt für jede korrekte Bestimmung als Maximum/Minimum.] Es gilt  $f(-1) = f(1) = \frac{1}{2}$  und  $f(0) = 0$ . [(3P): einen Punkt für jeden korrekten Funktionswert.]

(d) Es gilt

$$f(x) = \frac{x^2}{1+x^4} = \frac{\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^4}}.$$

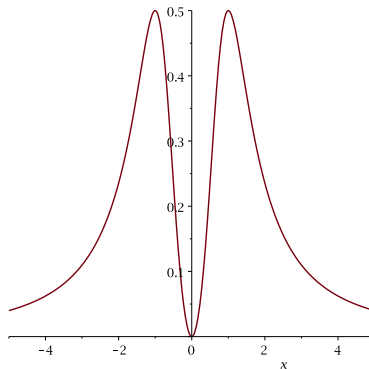
Für  $x \rightarrow \pm\infty$  gilt  $\frac{1}{x^2} \rightarrow 0$  und  $\frac{1}{x^4} \rightarrow 0$ , und daher nach den Grenzwertsätzen

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \frac{0}{1+0} = 0.$$

[(1P) für  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ , (1P) für  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ .]

[Alternativ mit der Regel von l'Hopital: (0,5P)+(0,5P) für zwei Anwendungen, und dann (1P) für die richtige Auswertung von  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^2}$ .]

(e)



[(1P) für die richtige Darstellung der Maxima, (1P) für die richtige Darstellung des Minimums, (1P) für die richtige Darstellung des Verhaltens für  $x \rightarrow \pm\infty$ .]

(f) Weil unter allen Funktionswerten, die an „Kandidatenstellen“ (hier nur kritische Punkte) angenommen werden,  $\frac{1}{2}$  der größte ist, und  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0 < \frac{1}{2}$  gilt, ist  $\frac{1}{2}$  der global maximale Wert von  $f$ ; dieser wird in  $x_1 = -1$  und  $x_3 = 1$  angenommen. [(2P): ein Punkt für jedes richtige Stelle des globalen Maximums.]

Weil stets  $x^2 \geq 0$ ,  $1 + x^4 > 0$  gilt, ist  $f(x) = \frac{x^2}{1+x^4} \geq 0$ . Daher ist der Funktionswert  $f(0) = 0$  ein (globales) Minimum von  $f$  und dieser Wert wird außer in  $x_2 = 0$  an keiner weiteren Stelle angenommen, weil eine solche Stelle ein weiterer kritischer Punkt sein müsste. [(1P) für die richtige Angabe der Stelle des globalen Minimums, (1P) für jede richtige Begründung (wie z.B.  $f \geq 0$  oder  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$ ).]

### 3. Integration.

(a) Bestimme für  $x > 1$  eine Stammfunktion der Funktion

$$\frac{x^2 + 1}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}. \quad (12 \text{ Punkte})$$

(b) Berechne das folgende Integral:

$$\int_0^{2\pi} \sin(x)^2 dx. \quad (10 \text{ Punkte})$$

[Tipp. Partielle Integration und  $\cos(x)^2 = 1 - \sin(x)^2$ .]

---

(a) 1. Lösungsvariante. (Partialbruchzerlegung.) Wir führen für den Integranden  $\frac{x^2+1}{x^3-3x^2+3x-1}$  eine Partialbruchzerlegung durch, und dazu zerlegen wir zunächst den Nenner in (über  $\mathbb{R}$ ) irreduzible Faktoren. Man „errät“ für den Nenner die Nullstelle  $x = 1$ , und führt die Polynomdivision  $(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) : (x - 1) = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$  durch. Also ist  $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x - 1)^3$ . [(3P): einen Punkt für jeden Faktor  $(x - 1)$  in der Darstellung des Nenners.] Das führt für die Partialbruchzerlegung auf den Ansatz

$$\frac{x^2 + 1}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{(x - 1)^2} + \frac{C}{(x - 1)^3}$$

mit zu bestimmenden  $A, B, C \in \mathbb{R}$ . [(3P): einen Punkt für jeden richtigen Summanden.] Man erhält

$$\begin{aligned} \frac{x^2 + 1}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1} &= \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{(x - 1)^2} + \frac{C}{(x - 1)^3} = \frac{A \cdot (x - 1)^2 + B \cdot (x - 1) + C}{(x - 1)^3} \\ &= \frac{A \cdot x^2 + (-2A + B) \cdot x + (A - B + C)}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}, \end{aligned}$$

hieraus das lineare Gleichungssystem

$$A = 1, \quad -2A + B = 0, \quad A - B + C = 1,$$

das die eindeutige Lösung  $A = 1, B = 2, C = 2$  hat. [(3P): einen Punkt für jeden richtigen Wert von  $A, B, C$ .] Also ist

$$\frac{x^2 + 1}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1} = \frac{1}{x - 1} + \frac{2}{(x - 1)^2} + \frac{2}{(x - 1)^3}.$$

Wir erhalten daraus

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 + 1}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1} dx &= \int \frac{1}{x - 1} dx + 2 \int \frac{1}{(x - 1)^2} dx + 2 \int \frac{1}{(x - 1)^3} dx \\ &= \ln(x - 1) - \frac{2}{x - 1} - \frac{1}{(x - 1)^2} + \text{const.} \end{aligned}$$

[(3P): einen Punkt für jede richtige Integration eines Summanden. „const.“ muss nicht dastehen.]

2. Lösungsvariante. (Partielle Integration.) Wie in der 1. Lösungsvariante findet man  $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x - 1)^3$ . [(3P): einen Punkt für jeden Faktor  $(x - 1)$  in der Darstellung des Nenners.] Durch zweimalige partielle Integration (Aussage 8.8) findet man nun

$$\begin{aligned} & \int \frac{x^2 + 1}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1} dx = \int (x^2 + 1) \cdot (x - 1)^{-3} dx \\ \stackrel{(4P)^*}{=} & (x^2 + 1) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) (x - 1)^{-2} - \int 2x \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) (x - 1)^{-2} dx = -\frac{1}{2} \frac{x^2 + 1}{(x - 1)^2} + \int x \cdot (x - 1)^{-2} dx \\ \stackrel{(4P)^*}{=} & -\frac{1}{2} \frac{x^2 + 1}{(x - 1)^2} - x \cdot (x - 1)^{-1} - \int 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) (x - 1)^{-2} dx = -\frac{1}{2} \frac{x^2 + 1}{(x - 1)^2} - \frac{x}{x - 1} + \int \frac{1}{x - 1} dx \\ \stackrel{(1P)}{=} & -\frac{1}{2} \frac{x^2 + 1}{(x - 1)^2} - \frac{x}{x - 1} + \ln(x - 1) + \text{const.} . \end{aligned}$$

(Das Ergebnis stimmt mit der Stammfunktion aus der 1. Lösungsvariante überein; die Konstante verschiebt sich um  $-\frac{3}{2}$ .)

[Bei den mit \* markierten Punkten für die partiellen Integrationen gibt es einen Punkt für die Berechnung der Ableitung des einen Faktors, einen Punkt für die Bestimmung der Stammfunktion des anderen Faktors, und zwei Punkte für die Anwendung der Formel der partiellen Integration.]

- (b) 1. Lösungsvariante. (Nach Tipp. Siehe auch Übungsaufgabe 61.) Mittels partieller Integration (Aussage 8.8) und der Formel  $\cos(x)^2 = 1 - \sin(x)^2$  (Abschnitt 4.4) ergibt sich:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sin(x)^2 dx &= \int_0^{2\pi} \sin(x) \cdot \sin(x) dx \\ &\stackrel{(4P)^\dagger}{=} \sin(x) \cdot (-\cos(x)) \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \cos(x) \cdot (-\cos(x)) dx \stackrel{(2P)}{=} \int_0^{2\pi} \cos(x)^2 dx \\ &= \int_0^{2\pi} 1 dx - \int_0^{2\pi} \sin(x)^2 dx \stackrel{(1P)}{=} 2\pi - \int_0^{2\pi} \sin(x)^2 dx . \end{aligned}$$

Hieraus folgt  $2 \int_0^{2\pi} \sin(x)^2 dx = 2\pi$  (2P) und somit  $\int_0^{2\pi} \sin(x)^2 dx = \pi$  (1P).

[Bei den mit  $\dagger$  markierten Punkten für die partielle Integration gibt es einen Punkt für die Berechnung der Ableitung von  $\sin(x)$ , einen Punkt für die Berechnung der Stammfunktion von  $\sin(x)$ , und zwei Punkte für die Anwendung der Formel der partiellen Integration.]

2. Lösungsvariante. (Additionstheoreme.) Nach dem Additionstheorem für den Cosinus (Satz 4.29) und der Formel  $\cos(x)^2 = 1 - \sin(x)^2$  (Abschnitt 4.4) gilt für beliebiges  $x \in \mathbb{R}$

$$\underbrace{\cos(2x)}_{(2P)} = \cos(x + x) = \underbrace{\cos(x)^2 - \sin(x)^2}_{(2P)} = \underbrace{1 - 2 \sin(x)^2}_{(1P)}$$

und daher

$$\sin(x)^2 = \frac{1}{2} \cdot (1 - \cos(2x)) . \quad (1P)$$

Damit ergibt sich

$$\int_0^{2\pi} \sin(x)^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos(2x)) dx \stackrel{(2P)}{=} \frac{1}{2} \left( x - \frac{1}{2} \sin(2x) \right) \Big|_0^{2\pi} \stackrel{(2P)}{=} \pi .$$

#### 4. Taylorreihen.

Es sei  $A, B \in \mathbb{R}$ ,  $A, B \neq 0$  und

$$f : \mathbb{R} \setminus \{1, 2\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-1}.$$

- (a) Mithilfe der geometrischen Reihe bestimme man die Taylorreihe von  $f$  an der Stelle  $x_0 = 0$ . (8 Punkte)
- (b) Berechne für alle  $A, B \neq 0$  den Konvergenzradius der Taylorreihe aus (a). (8 Punkte)

- (a) 1. Lösungsvariante. (Geometrische Reihe.) Jedenfalls für alle  $x \in \mathbb{R}$  mit  $|x| < 1$  (also auch  $|\frac{x}{2}| < 1$ ) gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-1} = \underbrace{-\frac{A}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{2}}}_{(3P)} - \underbrace{B \cdot \frac{1}{1-x}}_{(1P)} \\ &= \underbrace{-\frac{A}{2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^k}_{(2P)} - \underbrace{B \cdot \sum_{k=0}^{\infty} x^k}_{(2P)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \quad \text{mit} \quad a_k := -A \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} - B. \quad (0P) \end{aligned}$$

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$  ist eine Potenzreihe um  $x_0 = 0$ , die auf einer Umgebung von  $x_0$  mit  $f$  übereinstimmt, und daher die Taylorreihe von  $f$  in  $x_0 = 0$ . (0P)

2. Lösungsvariante. ( $f^{(n)}(0)$ .) Für  $k \in \mathbb{N}_0$  gilt

$$f^{(k)}(x) = \frac{A \cdot (-1)^k \cdot k!}{(x-2)^{k+1}} + \frac{B \cdot (-1)^k \cdot k!}{(x-1)^{k+1}} \quad (4P)$$

und daher

$$f^{(k)}(0) = \frac{A \cdot (-1)^k \cdot k!}{(-2)^{k+1}} + \frac{B \cdot (-1)^k \cdot k!}{(-1)^{k+1}} = -A \cdot k! \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} - B \cdot k!. \quad (2P)$$

Die Taylorreihe von  $f$  in  $x_0 = 0$  ist daher

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \quad \text{mit} \quad a_k := -A \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} - B. \quad (2P)$$

[Wenn nur endlich viele Glieder ausgerechnet wurden, gibt es in jedem Schritt die Hälfte der maximalen Punktzahl.]



(b) 1. Lösungsvariante. (Geometrische Reihe.) In jedem Fall hat die Potenzreihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$  einen Konvergenzradius  $\rho \in \overline{\mathbb{R}}$ . **(0P)**

Ist  $|x| < 1$ , so konvergiert die geometrische Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$  absolut **(1P)** nach Beispiel 4.2(i); dann ist (erst recht) auch  $|\frac{x}{2}| < 1$ , deshalb konvergiert die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} (\frac{x}{2})^k$  ebenfalls absolut **(1P)**. Somit konvergiert für  $|x| < 1$  auch  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = -\frac{A}{2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (\frac{x}{2})^k - B \cdot \sum_{k=0}^{\infty} x^k$  absolut, und daher ist  $\rho \geq 1$ . [(**1P**) entweder für „ $\sum a_k x^k$  konvergent“ oder für „ $\rho \geq 1$ “.]

Ist  $1 < |x| < 2$ , so ist nach Beispiel 4.2(i)  $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$  divergent **(1P)**, aber  $\sum_{k=0}^{\infty} (\frac{x}{2})^k$  konvergent **(1P)**. Deshalb ist für solche  $x$  die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$  divergent, denn wäre sie konvergent, so wäre wegen

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = -\frac{1}{B} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k - \frac{A}{2B} \sum_{k=0}^{\infty} (\frac{x}{2})^k$$

auch  $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$  konvergent. Daher ist  $\rho \leq 1$ . [(**1P**) entweder für „ $\sum a_k x^k$  divergent“ oder für „ $\rho \leq 1$ “, sowie **(1P)** für eine Begründung für die Divergenz von  $\sum a_k x^k$ .]

Insgesamt ergibt sich  $\rho = 1$ . [(**1P**) schon für das richtige Ergebnis.]

2. Lösungsvariante. (Quotientenkriterium.) Nach Übungsaufgabe 37(a) gilt: Wenn die Folge  $\left(\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|\right)_{k \in \mathbb{N}}$  einen Grenzwert in  $\overline{\mathbb{R}}$  besitzt, so ist dieser Grenzwert der Konvergenzradius von  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ . Es gilt

$$\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \left|\frac{-A \cdot \overbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}}^{\rightarrow 0} - B}{-A \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^{k+2}}_{\rightarrow 0} - B}\right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \left|\frac{-A \cdot 0 - B}{-A \cdot 0 - B}\right| = 1.$$

Also hat die Taylorreihe aus (a) den Konvergenzradius  $\rho = 1$ .

[Hier gibt es **(2P)+(2P)** für den richtigen Quotienten  $\frac{-A \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} - B}{-A \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k+2} - B}$ , **(1P)+(1P)** für  $\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} \rightarrow 0$  bzw.  $\left(\frac{1}{2}\right)^{k+2} \rightarrow 0$ , **(1P)** für  $\lim \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = 1$ , und **(1P)** für das richtige Ergebnis  $\rho = 1$ .]

[Wenn versucht wird, das Wurzelkriterium anzuwenden, gibt es **(4P)** für den richtigen Ausdruck  $\sqrt[k]{a_k} = \sqrt[k]{-A \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} - B}$ ; **(3P)** für die richtige Berechnung des Grenzwerts 1 von  $\sqrt[k]{a_k}$ , dabei beachte man, dass aus  $\lim a_k = 1$  **nicht** ohne Weiteres folgt, dass auch  $\lim \sqrt[k]{a_k} = 1$  ist; und **(1P)** für das richtige Ergebnis  $\rho = 1$ .]

## 5. Lipschitz-Stetigkeit.

Es sei

$$f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x}.$$

- (a) Zeige, dass  $f|_{[1, \infty)}$  Lipschitz-stetig ist, und bestimme eine Lipschitzkonstante für diese Funktion. (6 Punkte)
- (b) Untersuche, ob auch  $f|(0, 1]$  Lipschitz-stetig ist. Achte dabei auf eine sorgfältige mathematische Argumentation, und darauf, nur die in der Vorlesung bzw. Übung gezeigten Aussagen zu verwenden. (12 Punkte)

- (a) 1. Lösungsvariante. (Rechnen nach Definition.) Für  $x, y \in [1, \infty)$  gilt  $\frac{1}{xy} \leq 1$  und daher

$$|f(x) - f(y)| = \underbrace{\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right|}_{(1P)^\diamond} = \underbrace{\left| \frac{y-x}{xy} \right|}_{(1P)} = \frac{1}{xy} \cdot |x-y| \stackrel{(2P)}{\leq} |x-y| = L \cdot |x-y|$$

mit  $L := 1$ . Also ist  $f|_{[1, \infty)}$  Lipschitz-stetig mit Lipschitzkonstante  $L = 1$ . [(2P) für jede richtige Lipschitzkonstante.]

[Den mit  $\diamond$  markierten Punkt gibt es auch, wenn der entsprechende Ausdruck nur in einem Spezialfall, z.B. für  $y = 1$  betrachtet wurde.]

2. Lösungsvariante. (Schränkensatz.)  $f|_{[1, \infty)}$  ist stetig, und auf  $(1, \infty)$  differenzierbar. Es gilt  $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$  (2P), und daher  $|f'(x)| \leq 1$  für  $x \in (1, \infty)$ . [(2P) für jede obere Schranke von  $|f'|$  auf  $[1, \infty)$ .] Nach dem Schränkensatz (Satz 7.14) folgt, dass  $f|_{[1, \infty)}$  Lipschitz-stetig mit Lipschitzkonstante  $L = 1$  ist. [(2P) für jede richtige Lipschitzkonstante.]

- (b) 1. Lösungsvariante. (Rechnen nach Definition.) Wir zeigen, dass  $f|(0, 1]$  nicht Lipschitz-stetig ist. [(2P) schon für die richtige Behauptung.]

Angenommen,  $f|(0, 1]$  wäre Lipschitz-stetig mit einer gewissen Lipschitzkonstanten  $L > 0$ . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei  $L > \frac{1}{2}$ . (1P)\* Dann wähle  $x := \frac{1}{2L} \in (0, 1]$  (1P) und  $y := 1$  (1P). Mit dieser Wahl gilt

$$|x - y| = \left| \frac{1}{2L} - 1 \right| = \frac{2L - 1}{2L} \quad (2P)$$

und

$$|f(x) - f(y)| = \left| \frac{1}{\frac{1}{2L}} - \frac{1}{1} \right| = 2L - 1 = \underbrace{2L \cdot |x - y|}_{(2P)} \stackrel{L > 0}{\underset{(3P)}{>}} L \cdot |x - y|.$$

Aus diesem Grund kann  $f|(0, 1]$  nicht mit der Lipschitzkonstanten  $L$  Lipschitz-stetig sein. [Wenn ein anderes Beispiel gewählt wird, so wird die Lösung analog bewertet. Den mit \* markierten Punkt gibt es automatisch, wenn beim gewählten Beispiel keine Einschränkung

an  $L$  erforderlich ist. Falls die Behauptung nicht für alle  $L > 0$  gezeigt wird, sondern nur für eine nach oben unbeschränkte Menge von  $L > 0$ , so gibt es, wenn darauf (z.B. durch ein „o.B.d.A.“) hingewiesen wird, volle Punktzahl, andernfalls wird ein Punkt (nämlich der mit \* markierte) abgezogen. Wenn die Behauptung allerdings nur für eine nach oben beschränkte Menge von  $L > 0$  gezeigt wird (darunter fällt auch, wenn nur ein konkreter Wert von  $L$ , z.B.  $L = 1$  betrachtet wird), so gibt es höchstens **(6P)**, d.h. in jedem Schritt maximal die Hälfte der Punkte.]

2. Lösungsvariante. (Mittelwertsatz.) Wir zeigen, dass  $f|(0, 1]$  nicht Lipschitz-stetig ist. [(2P) schon für die richtige Behauptung.]

Angenommen,  $f|(0, 1]$  wäre Lipschitz-stetig mit einer gewissen Lipschitzkonstanten  $L > 0$ . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei  $L > 1$ . **(1P)** Dann wähle  $x := \frac{1}{2\sqrt{L}} \in (0, 1]$  **(1P)** und  $y := \frac{1}{\sqrt{L}} \in (0, 1]$  **(1P)**. Nach dem Mittelwertsatz (Satz 7.13) existiert ein  $\xi \in (x, y)$  mit  $\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = f'(\xi)$ . Jedenfalls ist  $0 < \xi < \frac{1}{\sqrt{L}}$  und deshalb  $|f'(\xi)| = \frac{1}{\xi^2} > \frac{1}{(1/\sqrt{L})^2} = L$ . [(2P)<sup>†</sup> für  $f'(\xi)$ , (2P)<sup>†</sup> für  $|f'(\xi)| > L$ .] Somit ergibt sich

$$|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)| \cdot |x - y| > L \cdot |x - y|. \quad \textbf{(3P)}$$

Aus diesem Grund kann  $f|(0, 1]$  nicht mit der Lipschitzkonstanten  $L$  Lipschitz-stetig sein. [Wenn nur gezeigt wird, dass  $f|(0, 1]$  unbeschränkt ist, kann es höchstens vier Punkte geben, nämlich die mit † markierten. Im Übrigen gilt der Bewertungskommentar zur 1. Lösungsvariante entsprechend.]