Martin Schmidt
Sebastian Klein

Analysis I
Abschlußklausur

7. Februar 2014

Nachname: ______________________________

Vorname: ______________________________

Matrikelnummer: ______________________________

Bevor Sie beginnen, beachten Sie bitte folgendes:

- Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten. Es gibt 5 Aufgaben, die Gesamtanzahl der erreichbaren Punkte beträgt 100.
- Prüfen Sie ihr Klausurexemplar auf Vollständigkeit, es müssen oben rechts die Seitenzahlen 1–11 stehen.
- Bitte schreiben Sie, bevor Sie mit der Klausur beginnen, auf das Deckblatt *deutlich lesbar* Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.
- Wir empfehlen Ihnen, alle Aufgaben durchzulesen, bevor Sie mit der Bearbeitung beginnen.
- Bitte bearbeiten Sie die Aufgaben *ausschließlich* auf dem an Sie ausgeteilten Papier. Jede Aufgabe soll (*nur*) auf dem entsprechenden Blatt und dem darauf folgenden leeren Blatt, sowie den Rückseiten dieser Blätter, bearbeitet werden.
- Benutzen Sie keinen Bleistift oder Rotstift zur Bearbeitung der Klausur, sondern nur schwarze oder blaue Tinte.
- Bitte schreiben Sie *sauber* und *deutlich*, und geben Sie die *gesamte* Klausur wieder ab. Das Konzeptpapier kann nicht mit abgegeben werden.
- Sie dürfen ein beidseitig bedrucktes oder beschriftetes DIN A4-Blatt benutzen. Falls Deutsch nicht Ihre Muttersprache ist, dürfen Sie außerdem ein (ein- oder zweisprachiges) Wörterbuch verwenden. Weitere Hilfsmittel (Taschenrechner, Skripte usw.) sind nicht erlaubt. Ein etwa mitgebrachtes Handy schalten Sie bitte für die Dauer der Klausur aus.
- Zu den Lösungen aller Aufgaben gehört die Angabe der von Ihnen verwendeten Notation sowie die Vollständigkeit der Rechnungen und der mathematischen Argumente.

Diesen Teil des Blattes bitte nicht beschriften.

Aufgabe	mgl. Punkte	err. Punkte	Aufgabe	mgl. Punkte	err. Punkte	**Gesamtpunktzahl:**
1 (a)	7		2 (f)	4		
(b)	11		3 (a)	12		
2 (a)	5		(b)	10		
(b)	6		4 (a)	8		**Note:**
(c)	6		(b)	8		
(d)	2		5 (a)	6		
(e)	3		(b)	12		

1. Stetigkeit und Differenzierbarkeit.

Für $a, b \in \mathbb{R}$ betrachten wir die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} (x+a)^2 & \text{für } x \leq 0 \\ (x+b)^4 & \text{für } x > 0 \end{cases} .$$

(a) Bestimme alle Paare (a, b) mit $a, b \geq 0$, für die f in $x = 0$ stetig ist. *(7 Punkte)*

(b) Bestimme alle Paare (a, b) mit $a, b \geq 0$, für die f in $x = 0$ differenzierbar ist. *(11 Punkte)*

2. Extremwertsuche.

Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{x^2}{1+x^4}\ .$$

(a) Berechne $f'(x)$ und finde alle kritischen Punkte von f. *(5 Punkte)*

Hinweis. Es gibt genau drei kritische Punkte. Diese bezeichnen wir im Folgenden mit x_1, x_2 und x_3, wobei $x_1 < x_2 < x_3$ sei.

(b) Man untersuche, ob f auf den Intervallen $(-\infty, x_1]$, $[x_1, x_2]$, $[x_2, x_3]$ und $[x_3, \infty)$ jeweils monoton wachsend, monoton fallend, oder keins von beidem ist. *(6 Punkte)*

(c) Entscheide für die kritischen Punkte von f jeweils, ob es sich um ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum oder keins von beidem handelt. Berechne außerdem die zugehörigen Funktionswerte. *(6 Punkte)*

[Tipp. Das geht am einfachsten, indem man *nicht* $f''(x)$ ausrechnet, sondern stattdessen das Ergebnis von (b) verwendet.]

(d) Bestimme die Grenzwerte $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ und $\lim_{x\to\infty} f(x)$. *(2 Punkte)*

(e) Skizziere den Graphen von f. *(3 Punkte)*

(f) Untersuche mithilfe der bisherigen Ergebnisse, ob die Funktion f ein (globales) Maximum und/oder Minimum annimmt, und bestimme gegebenenfalls, an welchen Stellen diese angenommen werden. *(4 Punkte)*

3. Integration.

(a) Bestimme für $x > 1$ eine Stammfunktion der Funktion

$$\frac{x^2+1}{x^3-3x^2+3x-1} \ .$$ (*12 Punkte*)

(b) Berechne das folgende Integral:

$$\int_0^{2\pi} \sin(x)^2 \, \mathrm{d}x \ .$$ (*10 Punkte*)

[Tipp. Partielle Integration und $\cos(x)^2 = 1 - \sin(x)^2$.]

4. Taylorreihen.

Es sei $A, B \in \mathbb{R}$, $A, B \neq 0$ und

$$f : \mathbb{R} \setminus \{1, 2\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-1}\,.$$

(a) Mithilfe der geometrischen Reihe bestimme man die Taylorreihe von f an der Stelle $x_0 = 0$. *(8 Punkte)*

(b) Berechne für alle $A, B \neq 0$ den Konvergenzradius der Taylorreihe aus (a). *(8 Punkte)*

5. Lipschitz-Stetigkeit.

Es sei

$$f : (0, \infty) \to \mathbb{R},\; x \mapsto \frac{1}{x}\,.$$

(a) Zeige, dass $f|[1, \infty)$ Lipschitz-stetig ist, und bestimme eine Lipschitzkonstante für diese Funktion. *(6 Punkte)*

(b) Untersuche, ob auch $f|(0, 1]$ Lipschitz-stetig ist. Achte dabei auf eine sorgfältige mathematische Argumentation, und darauf, nur die in der Vorlesung bzw. Übung gezeigten Aussagen zu verwenden. *(12 Punkte)*