

1. Stetigkeit und Differenzierbarkeit.

Es sei $c \in \mathbb{R}$ fest. Dann betrachten wir die Funktion

$$f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} \sqrt{x} & \text{für } 0 \leq x < 1 \\ cx^2 - c + 1 & \text{für } x \geq 1 \end{cases} .$$

- (a) Zeige: f ist in $x = 1$ stetig (unabhängig vom Wert von $c \in \mathbb{R}$). (6 Punkte)
- (b) Bestimme $c \in \mathbb{R}$ so, dass f in $x = 1$ differenzierbar ist, und berechne $f'(1)$ für diese Wahl von c . (10 Punkte)

- (a) 1. Lösungsvariante. (Links- und rechtsseitiger Grenzwert.) Es gilt wegen der Stetigkeit von \sqrt{x}

$$\underbrace{\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)}_{(1P)^\dagger} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \underbrace{\sqrt{x}}_{(1P)^*} = \sqrt{1} = \underbrace{1}_{(1P)^*} = f(1)$$

und

$$\underbrace{\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)}_{(1P)^\dagger} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \underbrace{(cx^2 - c + 1)}_{(1P)^*} = c \cdot 1^2 - c + 1 = \underbrace{1}_{(1P)^*} = f(1) .$$

Nach Übungsaufgabe 39(b) folgt, dass f in $x = 1$ stetig ist.

[Die mit \dagger markierten Punkte gibt es auch, wenn generell von links- und rechtsseitigen Grenzwerten, oder von der Stetigkeit von \sqrt{x} bzw. $cx^2 - c + 1$ die Rede ist. Wenn nur in \sqrt{x} bzw. $cx^2 - c + 1$ eingesetzt wird, ohne weitere Begründung, gibt es die mit $*$ markierten Punkte.]

2. Lösungsvariante. (ε und δ .) Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Weil \sqrt{x} in $x = 1$ stetig ist, existiert ein $\delta_1 > 0$, so dass für alle $x \in (0, \infty)$ mit $|x - 1| < \delta_1$ gilt: $|\sqrt{x} - 1| < \varepsilon$; insbesondere gilt daher wegen $f(1) = 1$

$$\forall x \in (0, 1) : (|x - 1| < \delta_1 \implies |f(x) - f(1)| < \varepsilon) . \quad (*1)$$

[(1P) für die Betrachtung von \sqrt{x} , (1P) für die Beschaffung von δ_1 .]

Genauso existiert wegen der Stetigkeit von $cx^2 - c + 1$ in $x = 1$ ein $\delta_2 > 0$, so dass für alle $x \in (0, \infty)$ mit $|x - 1| < \delta_2$ gilt: $|(cx^2 - c + 1) - 1| < \varepsilon$; insbesondere gilt wegen $f(1) = 1$

$$\forall x \in [1, \infty) : (|x - 1| < \delta_2 \implies |f(x) - f(1)| < \varepsilon) . \quad (*2)$$

[(1P) für die Betrachtung von $cx^2 - c + 1$, (1P) für die Beschaffung von δ_2 .]

Sei $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$. (2P) Dann folgt aus (*1) und (*2)

$$\forall x \in (0, \infty) : (|x - 1| < \delta \implies |f(x) - f(1)| < \varepsilon) .$$

- (b) 1. Lösungsvariante. (Differenzenquotient.) Wir haben zu untersuchen, ob der Differenzenquotient $h(x) := \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ **(1P)** in $x = 1$ stetig fortsetzbar ist; ist dies der Fall, so ist der Wert der Fortsetzung $f'(1)$. Für $x < 1$ ist

$$h(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1) \cdot (\sqrt{x}+1)} = \frac{1}{\underbrace{\sqrt{x}+1}_{(1P)^\ddagger}}$$

und daher

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = \frac{1}{\sqrt{1}+1} = \frac{1}{2}. \quad (1P) \quad (\dagger 1)$$

Für $x > 1$ ist

$$h(x) = \frac{(cx^2 - c + 1) - 1}{x-1} = \frac{cx^2 - c}{x-1} = c \cdot \frac{(x-1) \cdot (x+1)}{x-1} = \underbrace{c \cdot (x+1)}_{(1P)^\ddagger}$$

und daher

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) = c \cdot (1+1) = 2c. \quad (1P) \quad (\dagger 2)$$

[Die volle Punktzahl gibt es natürlich auch, wenn $\lim_{x \rightarrow 1^\pm} h(x)$ mit der Regel von de l'Hopital ausgerechnet wird. Die mit ‡ markierten Punkte gibt es in diesem Fall für den Schritt $\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{2\sqrt{x}}$ bzw. $\lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (2cx)$.]

Nach Übungsaufgabe 39(b) ist h genau dann in $x = 1$ stetig fortsetzbar, wenn die beiden Grenzwerte aus $(\dagger 1)$ und $(\dagger 2)$ übereinstimmen, d.h. wenn $\frac{1}{2} = 2c$ **(1P)** bzw. $c = \frac{1}{4}$ ist. [(1P) schon für die richtige Angabe von c .] In diesem Fall ist $h(1) = \frac{1}{2}$ die stetige Fortsetzung. Also ist f (genau dann) in $x = 1$ differenzierbar, wenn $c = \frac{1}{4}$ ist; in diesem Fall ist $f'(1) = \frac{1}{2}$. [(1P) für die richtige Angabe von $f'(1)$.]

2. Lösungsvariante. (Übungsaufgabe 52(b).) Offenbar ist f auf $[0, \infty) \setminus \{1\}$ differenzierbar. Für $x < 1$ gilt $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ **(2P)** und daher $\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2}$. [(1P) für die Betrachtung von $\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x)$, (1P) für die Berechnung dieses Grenzwerts.] Für $x > 1$ gilt $f'(x) = 2cx$ **(1P)** und daher $\lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = 2c \cdot 1 = 2c$. [(1P) für die Betrachtung von $\lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x)$, (1P) für die Berechnung dieses Grenzwerts.] Daher existiert $\lim_{x \rightarrow 1} f'(x)$ genau dann, wenn $\frac{1}{2} = 2c$ gilt **(1P)**. Wir sehen: Ist $c = \frac{1}{4}$ [(1P) für die richtige Angabe von c .], so gilt $\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \frac{1}{2} = \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x)$. Nach Übungsaufgabe 52(b) folgt, dass f mit dieser Wahl von c in $x = 1$ differenzierbar ist, und zwar mit $f'(1) = \frac{1}{2}$. [(1P) für die richtige Angabe von $f'(1)$.]

2. Extremwertsuche.

Wir betrachten die Funktion

$$f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2 - \ln(x).$$

- (a) Berechne $f'(x)$ und $f''(x)$. (4 Punkte)
- (b) Finde alle kritischen Punkte $x \in (0, \infty)$ von f , und entscheide jeweils, ob es sich um ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum oder keins von beidem handelt. (4 Punkte)
- (c) Bestimme den Grenzwert $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x)$. (2 Punkte)
- (d) Verwende die Regel von de L'Hospital, um $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x^2}$ auszurechnen (ein Verweis auf eine Übungsaufgabe genügt hierfür *nicht*), und benutze das Ergebnis, um $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ zu bestimmen. (6 Punkte)
- (e) Untersuche mithilfe der bisherigen Ergebnisse, ob die Funktion f auf ihrem Definitionsbereich $(0, \infty)$ ein (globales) Maximum und/oder Minimum annimmt, und bestimme gegebenenfalls jeweils ein $x \in (0, \infty)$, in dem das Maximum bzw. Minimum angenommen wird. Gibt es weitere solche x ? (6 Punkte)

- (a) Es ist

$$f'(x) = 2x - \frac{1}{x} \quad (\mathbf{2P}) \quad \text{und} \quad f''(x) = 2 + \frac{1}{x^2} \quad (\mathbf{2P}).$$

- (b) $x \in (0, \infty)$ ist genau dann kritischer Punkt von f , wenn $f'(x) = 0$ gilt.

$$f'(x) = 0 \iff \underbrace{2x = \frac{1}{x}}_{(\mathbf{1P})} \iff x^2 = \frac{1}{2} \stackrel{x>0}{\iff} \underbrace{x = \frac{1}{\sqrt{2}}}_{(\mathbf{1P})}.$$

Also ist $x_K := \frac{1}{\sqrt{2}}$ der einzige kritische Punkt von f . [Kein Abzug, falls auch $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ als kritischer Punkt bezeichnet wird.] Es ist $f''(x_K) = 4 > 0$ [(**1P**) für diese oder eine andere Begründung], also liegt in diesem Punkt ein lokales Minimum vor [(**1P**) schon für die richtige Behauptung].

- (c) Für $x \rightarrow 0+$ gilt $x^2 \rightarrow 0$ und $\ln(x) \rightarrow -\infty$, daher ist $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \infty$. [(**2P**) schon für die richtige Behauptung.]
- (d) Die Funktionen $\ln(x)$ und x^2 sind differenzierbar mit Ableitung $\frac{1}{x}$ (**1P**) bzw. $2x$ (**1P**), und es gilt $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 = \infty$ (**1P**). Nach der 2. Regel von de L'Hospital (Satz 7.21) gilt daher

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x}{\underbrace{2x}_{(\mathbf{1P})}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2x^2} = \underbrace{0}_{(\mathbf{1P})},$$

weil der rechtsstehende Grenzwert existiert. Daher gilt auch

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \underbrace{x^2}_{\rightarrow \infty} \cdot \left(1 - \underbrace{\frac{\ln(x)}{x^2}}_{\rightarrow 0}\right) = \underbrace{\infty}_{(\mathbf{1P})}.$$

(e) 1. Lösungsvariante. Wegen $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ ist das Bild $f[(0, \infty)]$ nach oben unbeschränkt, deshalb kann f kein globales Maximum annehmen. **(2P)**

Wir zeigen nun, dass f ein globales Minimum besitzt. Wegen $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ existieren $t, s \in \mathbb{R}^+$ mit $t < x_K < s$, so dass

$$\forall x \in (0, t) \cup (s, \infty) : f(x) > f(x_K) \quad (*)$$

gilt. Da die Funktion $f|[t, s]$ stetig ist, und die Menge $[t, s]$ kompakt ist, nimmt sie nach Satz 5.26 ihren minimalen Wert s an; wegen $x_K \in [t, s]$ ist $s \leq f(x_K)$. Deswegen folgt aus (*), dass s minimaler Wert auch von f ist. Jede Stelle, an der f den Wert s annimmt, ist ein „Kandidat“ im Sinne des Anfangs von Abschnitt 7.3, und der einzige hier vorhandene „Kandidat“ ist die Stelle x_K . Daraus folgt, dass f sein globales Minimum in x_K und in keinem anderen Punkt annimmt.

[(**2P**) für „Weil $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ ist, existiert ein globales Minimum“; eine weitere Begründung ist nicht erforderlich. (**1P**) für „ x_K ist globales Minimum. (**1P**) für „Es gibt keine weiteren globale Minima.“.]

2. Lösungsvariante. Wegen $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ ist das Bild $f[(0, \infty)]$ nach oben unbeschränkt, deshalb kann f kein globales Maximum annehmen. **(2P)**

Wegen $f''(x) = 2 + \frac{1}{x^2} > 0$ ist f' streng monoton wachsend (Satz 7.15(iv)). Deshalb gilt $f'(x) < 0$ für alle $x < x_K$ und $f'(x) > 0$ für alle $x > x_K$. Daraus folgt nach Satz 7.15(iv),(v), dass $f|(0, x_K)$ streng monoton fallend und $f|(x_K, \infty)$ streng monoton wachsend ist. Hieraus ergibt sich, dass f in x_K , und in keinem anderen Punkt, sein globales Minimum annimmt.

[(**1P**) für „ $f'(0, x_K) < 0$, also $f|(0, x_K)$ streng monoton fallend“. (**1P**) für „ $f'(x_K, \infty) > 0$, also $f|(x_K, \infty)$ streng monoton wachsend“. (**1P**) für „ x_K ist globales Minimum“. (**1P**) für „Es gibt keine weiteren globale Minima.“.]

3. Integration.

Berechne die folgenden Integrale:

$$(a) \int_0^{2\pi} x^2 \cos(x) dx \quad (10 \text{ Punkte})$$

$$(b) \int_0^{\ln(2)} \frac{e^x - 1}{e^x + 1} dx \quad (12 \text{ Punkte})$$

(a) Partielle Integration (Aussage 8.8) mit $f(x) := x^2$, $g'(x) := \cos(x)$, also $f'(x) = 2x$, $g(x) = \sin(x)$ ergibt:

$$A := \int_0^{2\pi} x^2 \cos(x) dx \stackrel{(3P)^*}{=} (2\pi)^2 \sin(2\pi) - 0^2 \sin(0) - \int_0^{2\pi} 2x \sin(x) dx = -2 \int_0^{2\pi} x \sin(x) dx .$$

Nochmalige partielle Integration mit $f(x) := x$, $g'(x) := \sin(x)$, also $f'(x) = 1$, $g(x) = -\cos(x)$ ergibt:

$$\begin{aligned} A &\stackrel{(3P)^*}{=} -2 \left(2\pi (-\cos(2\pi)) - 0 (-\cos(0)) - \int_0^{2\pi} 1 (-\cos(x)) dx \right) \\ &= 4\pi - 2 \int_0^{2\pi} \cos(x) dx \stackrel{(3P)^*}{=} 4\pi - 2(\sin(2\pi) - \sin(0)) = \underbrace{4\pi}_{(1P)} . \end{aligned}$$

[Bei den mit * markierten Punkten gibt es jeweils zwei Punkte für die Durchführung der (partiellen) Integration, und einen Punkt für das Einsetzen der Grenzen und das anschließende Ausrechnen.]

(b) 1. Lösungsvariante. (Substitution und Partialbruchzerlegung.) Wir substituieren $u = e^x$. (1P) Dann ist $\frac{du}{dx} = e^x = u$, also $dx = \frac{1}{u} du$ (1P), sowie $u(x=0) = e^0 = 1$ (1P) und $u(x = \ln(2)) = e^{\ln(2)} = 2$ (1P). [Man kann ebenso gut auch $u = e^x - 1$ oder $u = e^x + 1$ substituieren. Die Rechnungen laufen analog.] Es ergibt sich

$$B := \int_0^{\ln(2)} \frac{e^x - 1}{e^x + 1} dx = \underbrace{\int_1^2 \frac{u-1}{u+1} \frac{1}{u} du}_{(1P)^\dagger} = \int_1^2 \frac{u-1}{u(u+1)} du .$$

[Den mit \dagger markierten Punkt gibt es für jeden Integralausdruck, der nach der Substitution nur noch u und nicht mehr x enthält.] Auf den rechten Integranden wenden wir Partialbruchzerlegung an; der Ansatz ist

$$\frac{u-1}{u(u+1)} = \frac{c_1}{u} + \frac{c_2}{u+1}$$

mit zu bestimmenden Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Wir multiplizieren aus:

$$\frac{u-1}{u(u+1)} = \frac{c_1(u+1) + c_2 u}{u(u+1)} = \frac{(c_1 + c_2)u + c_1}{u(u+1)} .$$

Durch Koeffizientenvergleich im Zähler erhalten wir die Gleichungen $c_1 + c_2 = 1$, $c_1 = -1$, und hieraus die Lösung $c_1 = -1$, $c_2 = 2$. Also ist

$$\frac{u-1}{u(u+1)} = -\frac{1}{u} + \frac{2}{u+1}. \quad (3P)$$

[Diese drei Punkte gibt es auch, wenn die Partialbruchzerlegung ohne weitere Rechnung „gesehen wurde“. Wenn bei der Berechnung der Partialbruchzerlegung ein Rechenfehler gemacht worden sein sollte, gibt es dafür einen Punkt Abzug, und die restliche Rechnung wird als Folgefehler behandelt.]

Damit ergibt sich

$$B = \int_1^2 \frac{u-1}{u(u+1)} du = -\int_1^2 \frac{1}{u} du + 2 \int_1^2 \frac{1}{u+1} du$$

$$\stackrel{(*)}{=} -(\ln(2) - \ln(1)) + 2(\ln(2+1) - \ln(1+1)) = 2 \ln(3) - 3 \ln(2) = \ln\left(\frac{9}{8}\right).$$

[Bei (*) gibt es (2P) für die Integration und (1P) für das Einsetzen der Grenzen und das Ausrechnen. (Allein) für das richtige Ergebnis gibt es zusätzlich (1P), dabei sollen sowohl $2 \ln(3) - 3 \ln(2)$ als auch $\ln\left(\frac{9}{8}\right)$ als zulässig behandelt werden.]

2. Lösungsvariante. (Substitution und Formeln S. 97 des Skripts.) Man führt wie in der 1. Lösungsvariante die Substitution durch [insgesamt (5P)] und erhält das Integral

$$\int_1^2 \frac{u-1}{u(u+1)} du.$$

Um dieses zu berechnen, muss man also eine Stammfunktion von $\frac{u-1}{u^2+u}$ berechnen. Dies tun wir, indem wir die Formel für Integrale der Form $\int \frac{ax+b}{(x^2+px+q)^\ell} dx$ von S. 97 des Skripts mit $a = 1$, $b = -1$, $p = 1$, $q = 0$, $\ell = 1$ anwenden. Es ergibt sich

$$\int \frac{u-1}{u^2+u} du = \frac{1}{2} \ln(u^2+u) - \frac{3}{2} \int \frac{du}{u^2+u} + C. \quad ((2P))$$

Das noch verbleibende Integral berechnen wir mit der Formel für $\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^\ell}$. Wegen $\sqrt{4q-p^2} = \sqrt{-1} = i$ ergibt sich

$$\int \frac{du}{u^2+u} = -2i \arctan(-i(2u+1)) + C. \quad ((3P))$$

Damit erhalten wir

$$\int \frac{u-1}{u^2+u} du = \frac{1}{2} \ln(u^2+u) + 3i \arctan(-i(2u+1)) + C.$$

Durch Einsetzen der Grenzen und Ausrechnen ergibt sich schließlich

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{u-1}{u^2+u} du &= \left(\frac{1}{2} \ln(2^2+2) + 3i \arctan(-i(2 \cdot 2+1)) \right) \\ &\quad - \left(\frac{1}{2} \ln(1^2+1) + 3i \arctan(-i(2 \cdot 1+1)) \right) \\ &= \frac{1}{2} \ln(3) + 3i(\arctan(-5i) - \arctan(-3i)). \quad (2P) \end{aligned}$$

[Der letzte Ausdruck stimmt mit dem Ergebnis $\ln(\frac{9}{8})$ aus der 1. Lösungsvariante überein. Das ist aber nicht so leicht zu sehen, und wird auch nicht verlangt.]

3. Lösungsvariante. (Tangens hyperbolicus.) Es ist

$$\frac{e^x - 1}{e^x + 1} = \frac{\frac{1}{2}(e^{x/2} - e^{-x/2})}{\underbrace{\frac{1}{2}(e^{x/2} + e^{-x/2})}_{(2P)}} = \frac{\sinh(x/2)}{\underbrace{\cosh(x/2)}_{(1P)^\ddagger}} = \tanh\left(\frac{x}{2}\right)$$

[Bei \ddagger gibt es den Punkt für eine der beiden Formen $\frac{\sinh(x/2)}{\cosh(x/2)}$ oder $\tanh(x/2)$.] und deshalb

$$\begin{aligned} B &:= \int_0^{\ln(2)} \frac{e^x - 1}{e^x + 1} dx = \int_0^{\ln(2)} \tanh\left(\frac{x}{2}\right) dx = \underbrace{2}_{(2P)} \int_0^{\ln(2)/2} \tanh(u) du \\ &= 2 (\ln(\cosh(\ln(2)/2)) - \ln(\cosh(0))) , \end{aligned}$$

denn wegen $\tanh(u) = \frac{\cosh'(u)}{\cosh(u)}$ ist $\ln(\cosh(u))$ eine Stammfunktion von $\tanh(u)$.

Es gilt $\ln(\cosh(0)) = \ln(1) = 0$ und $\cosh(\ln(2)/2) = \frac{1}{2}(e^{\ln(2)/2} + e^{-\ln(2)/2}) = \frac{1}{2}(\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{3}{4}\sqrt{2}$. Somit ergibt sich

$$B = 2 \ln\left(\frac{3}{4}\sqrt{2}\right) = \ln\left(\frac{3^2}{4^2} \cdot 2\right) = \ln\left(\frac{9}{8}\right) .$$

[Es gibt **(4P)** für die korrekte Stammfunktion von $\tanh(u)$, auch dann, wenn diese ohne weitere Begründung angegeben ist und **(2P)** für das korrekte Einsetzen der Grenzen und das Ausrechnen. Schließlich **(1P)** für das richtige Ergebnis.]

4. Taylorpolynom und Fehlerabschätzung.

Es sei

$$f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2 \cdot \ln(x) .$$

(a) Berechne $f'(x)$, $f''(x)$ und $f'''(x)$. (6 Punkte)

(b) Berechne $T_{2,1}(x)$, das Taylorpolynom 2. Ordnung von f an der Stelle $x_0 = 1$. (4 Punkte)

(c) Zeige, dass für $x \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ gilt

$$|f(x) - T_{2,1}(x)| \leq \frac{1}{12} . \quad (12 \text{ Punkte})$$

(a) Es gilt

$$f'(x) = 2x \cdot \ln(x) + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x \cdot \ln(x) + x \quad (2P)$$

$$f''(x) = 2 \cdot \ln(x) + 2x \cdot \frac{1}{x} + 1 = 2 \cdot \ln(x) + 3 \quad (2P)$$

$$f'''(x) = 2 \cdot \frac{1}{x} = \frac{2}{x} . \quad (2P)$$

[Folgefehler werden natürlich anerkannt.]

(b) Es ist $f(1) = 1^2 \cdot \ln(1) = 0$ (1P), $f'(1) = 2 \cdot 1 \cdot \ln(1) + 1 = 1$ (1P) und $f''(1) = 2 \cdot \ln(1) + 3 = 3$ (1P). Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} T_{2,1}(x) &= f(1) + f'(1) \cdot (x - 1) + \frac{1}{2} f''(1) \cdot (x - 1)^2 \\ &= (x - 1) + \frac{3}{2} (x - 1)^2 . \quad (1P) \end{aligned}$$

(c) Nach der Taylor-Formel (Satz 7.37) gibt es zu $x \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ ein $\xi \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ [(1P) für jede richtige Angabe des Wertebereichs von ξ] mit

$$|f(x) - T_{2,1}(x)| = \frac{1}{6} |f'''(\xi)| \cdot |x - 1|^3 . \quad (2P) \quad (*)$$

Wegen $\xi \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ gilt $\xi \geq \frac{1}{2}$ und deshalb $|f'''(\xi)| = \frac{2}{\xi} \leq \frac{2}{1/2} = 4$. [(2P) für jede richtige Abschätzung von $f'''(\xi)$, (1P) für das Betrachten eines Randpunkts von $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$, (1P) für die Wahl des richtigen Randpunkts. War $f'''(x)$ oben falsch ausgerechnet, werden die Punkte sinngemäß für die Berechnung einer Schranke für das falsche $f'''(\xi)$ gegeben.]

Außerdem ist wegen $x \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$: $|x - 1| \leq \frac{1}{2}$. (2P) Durch Einsetzen dieser Abschätzungen in (*) ergibt sich:

$$|f(x) - T_{2,1}(x)| \leq \frac{1}{6} \cdot 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{4}{6 \cdot 8} = \frac{1}{12} .$$

[(2P) für das richtige Einsetzen der Einzel-Abschätzungen, (1P) fürs Ausrechnen.]

5. Punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{x^n}{1 + x^n}.$$

- (a) Bestimme $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ für $x \in [0, 1)$. (4 Punkte)
- (b) Bestimme $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(1)$. (2 Punkte)
- (c) Untersuche, ob die Funktionenfolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen eine Funktion $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ konvergiert. (12 Punkte)

- (a) Sei $x \in [0, 1)$. Wegen $|x| < 1$ ist $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$ (**2P**) nach Satz 3.4(i). Damit ergibt sich

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{1 + x^n} = \frac{0}{1 + 0} = 0.$$

[**(2P)** schon fürs richtige Ergebnis.]

- (b) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $f_n(1) = \frac{1^n}{1+1^n} = \frac{1}{2}$, und somit ist auch $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(1) = \frac{1}{2}$. (**2P**)
- (c) 1. Lösungsvariante. (Satz 5.27.) Nach (a),(b) konvergiert die Funktionenfolge (f_n) punktweise gegen

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{falls } x = 1 \end{cases}.$$

Wenn die Folge (f_n) überhaupt gleichmäßig konvergiert, so muss dieses f die Grenzfunktion sein, denn gleichmäßige Konvergenz impliziert punktweise Konvergenz. Da die Funktionen f_n stetig sind, wäre in diesem Falle aber nach Satz 5.27 auch die Funktion f stetig, was jedoch offensichtlich nicht der Fall ist. Daher kann die Folge (f_n) nicht gleichmäßig konvergieren.

[**(3P)** für die richtige Behauptung, **(2P)** für „Der einzig mögliche gleichmäßige Grenzwert ist f “, **(2P)** für „Die f_n sind stetig“ (diese Punkte werden auch gegeben, wenn die Aussage „gleichmäßiger Grenzwert stetiger Funktionen ist stetig“ zitiert wird), **(3P)** für „ f müsste stetig sein“ bzw. „gleichmäßiger Grenzwert stetiger Funktionen ist stetig“, **(2P)** für „ f ist aber nicht stetig“ (keine weitere Begründung nötig).]

2. Lösungsvariante. (Definition 5.23.) Wir zeigen, dass (f_n) nicht gleichmäßig konvergiert. Wie in der ersten Lösungsvariante genügt es dazu zu zeigen, dass (f_n) nicht gleichmäßig gegen das dortige f konvergiert. Die Aussage „ (f_n) konvergiert gleichmäßig gegen f “ besagt

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N \forall x \in [0, 1] : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon ;$$

wir haben die Negation

$$\exists \varepsilon > 0 \forall N \in \mathbb{N} \exists n \geq N \exists x \in [0, 1] : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon$$

dieser Aussage zu zeigen.

Dazu setzen wir $\varepsilon := \frac{1}{4} > 0$. Dann sei $N \in \mathbb{N}$ gegeben. Nun setzen wir $n := N$ und $x := \frac{1}{\sqrt[n]{3}} \in [0, 1)$. Damit gilt

$$f_n(x) = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt[n]{3}}\right)^n}{1 + \left(\frac{1}{\sqrt[n]{3}}\right)^n} = \frac{\frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{1}{4}$$

und somit

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4} = \varepsilon.$$

[(3P) für die richtige Behauptung, (2P) für „Der einzig mögliche gleichmäßige Grenzwert ist f “, (3P) für die Idee, eine untere Schranke von $\|f_n - f\|_\infty$ anzugeben und für die korrekte Struktur des Beweises (welche Größen werden vorgegeben, welche beliebig gewählt), (2P) für die Wahl eines geeigneten ε und (2P) für die Berechnung eines $x_n \in [0, 1)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.]