Martin Schmidt
Sebastian Klein

Analysis I
Abschlußklausur

19. Dezember 2013

Nachname: ______________________________

Vorname: ______________________________

Matrikelnummer: ______________________________

Bevor Sie beginnen, beachten Sie bitte folgendes:

- Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten. Es gibt 5 Aufgaben, die Gesamtanzahl der erreichbaren Punkte beträgt 100.
- Prüfen Sie ihr Klausurexemplar auf Vollständigkeit, es müssen oben rechts die Seitenzahlen 1–11 stehen.
- Bitte schreiben Sie, bevor Sie mit der Klausur beginnen, auf das Deckblatt *deutlich lesbar* Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.
- Wir empfehlen Ihnen, alle Aufgaben durchzulesen, bevor Sie mit der Bearbeitung beginnen.
- Bitte bearbeiten Sie die Aufgaben *ausschließlich* auf dem an Sie ausgeteilten Papier. Jede Aufgabe soll (*nur*) auf dem entsprechenden Blatt und dem darauf folgenden leeren Blatt, sowie den Rückseiten dieser Blätter, bearbeitet werden.
- Benutzen Sie keinen Bleistift oder Rotstift zur Bearbeitung der Klausur, sondern nur schwarze oder blaue Tinte.
- Bitte schreiben Sie *sauber* und *deutlich*, und geben Sie die *gesamte* Klausur wieder ab. Das Konzeptpapier kann nicht mit abgegeben werden.
- Sie dürfen ein beidseitig bedrucktes oder beschriftetes DIN A4-Blatt benutzen. Falls Deutsch nicht Ihre Muttersprache ist, dürfen Sie außerdem ein (ein- oder zweisprachiges) Wörterbuch verwenden. Weitere Hilfsmittel (Taschenrechner, Skripte usw.) sind nicht erlaubt. Ein etwa mitgebrachtes Handy schalten Sie bitte für die Dauer der Klausur aus.
- Zu den Lösungen aller Aufgaben gehört die Angabe der von Ihnen verwendeten Notation sowie die Vollständigkeit der Rechnungen und der mathematischen Argumente.

Diesen Teil des Blattes bitte nicht beschriften.

Aufgabe		mgl. Punkte	err. Punkte	Aufgabe		mgl. Punkte	err. Punkte	**Gesamtpunktzahl:**
1	(a)	6		3	(a)	10		
	(b)	10			(b)	12		
2	(a)	4		4	(a)	6		
	(b)	4			(b)	4		**Note:**
	(c)	2			(c)	12		
	(d)	6		5	(a)	4		
	(e)	6			(b)	2		
					(c)	12		

1. Stetigkeit und Differenzierbarkeit.

Es sei $c \in \mathbb{R}$ fest. Dann betrachten wir die Funktion

$$f : [0, \infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} \sqrt{x} & \text{für } 0 \leq x < 1 \\ cx^2 - c + 1 & \text{für } x \geq 1 \end{cases} .$$

(a) Zeige: f ist in $x = 1$ stetig (unabhängig vom Wert von $c \in \mathbb{R}$). *(6 Punkte)*

(b) Bestimme $c \in \mathbb{R}$ so, dass f in $x = 1$ differenzierbar ist, und berechne $f'(1)$ für diese Wahl von c. *(10 Punkte)*

2. Extremwertsuche.

Wir betrachten die Funktion

$$f : (0, \infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2 - \ln(x)\ .$$

(a) Berechne $f'(x)$ und $f''(x)$. *(4 Punkte)*

(b) Finde alle kritischen Punkte $x \in (0, \infty)$ von f, und entscheide jeweils, ob es sich um ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum oder keins von beidem handelt. *(4 Punkte)*

(c) Bestimme den Grenzwert $\lim_{x \to 0+} f(x)$. *(2 Punkte)*

(d) Verwende die Regel von de L'Hoptial, um $\lim_{x \to \infty} \frac{\ln(x)}{x^2}$ auszurechnen (ein Verweis auf eine Übungsaufgabe genügt hierfür *nicht*), und benutze das Ergebnis, um $\lim_{x \to \infty} f(x)$ zu bestimmen. *(6 Punkte)*

(e) Untersuche mithilfe der bisherigen Ergebnisse, ob die Funktion f auf ihrem Definitionsbereich $(0, \infty)$ ein (globales) Maximum und/oder Minimum annimmt, und bestimme gegebenenfalls jeweils ein $x \in (0, \infty)$, in dem das Maximum bzw. Minimum angenommen wird. Gibt es weitere solche x? *(6 Punkte)*

3. Integration.

Berechne die folgenden Integrale:

(a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} x^2 \cos(x)\,\mathrm{d}x$ *(10 Punkte)*

(b) $\displaystyle\int_0^{\ln(2)} \frac{e^x - 1}{e^x + 1}\,\mathrm{d}x$ *(12 Punkte)*

4. Taylorpolynom und Fehlerabschätzung.

Es sei

$$f : (0, \infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2 \cdot \ln(x)\ .$$

(a) Berechne $f'(x)$, $f''(x)$ und $f'''(x)$. *(6 Punkte)*

(b) Berechne $T_{2,1}(x)$, das Taylorpolynom 2. Ordnung von f an der Stelle $x_0 = 1$. *(4 Punkte)*

(c) Zeige, dass für $x \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ gilt

$$|f(x) - T_{2,1}(x)| \leq \frac{1}{12}\ .$$

(12 Punkte)

5. Punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{x^n}{1+x^n}\ .$$

(a) Bestimme $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ für $x \in [0,1)$. *(4 Punkte)*

(b) Bestimme $\lim_{n\to\infty} f_n(1)$. *(2 Punkte)*

(c) Untersuche, ob die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen eine Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ konvergiert. *(12 Punkte)*