

Analysis I

HS 2020

Martin U. Schmidt



# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Mengen und Abbildungen</b>	<b>5</b>
1.1 Mengen . . . . .	5
1.2 Operationen von Mengen . . . . .	6
1.3 Relationen . . . . .	7
1.4 Abbildungen . . . . .	7
1.5 Komposition von Abbildungen . . . . .	8
<b>2 Reelle Zahlen</b>	<b>9</b>
2.1 Axiome von angeordneten Körpern . . . . .	9
2.2 Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N} \subset \mathbf{K}$ . . . . .	16
2.3 Mächtigkeit von Mengen . . . . .	18
2.4 $\mathbb{R}$ und das Vollständigkeitsaxiom . . . . .	20
2.5 Die erweiterte Zahlengerade $\bar{\mathbb{R}}$ . . . . .	24
2.6 Die Peano Axiome . . . . .	25
2.7 Der Körper der komplexen Zahlen . . . . .	26
<b>3 Zahlenfolgen</b>	<b>29</b>
3.1 Konvergenz . . . . .	29
3.2 Konvergenzprinzipien . . . . .	33
3.3 Häufungspunkte . . . . .	36
3.4 Beispiele . . . . .	38
<b>4 Reihen</b>	<b>41</b>
4.1 Konvergenzkriterien . . . . .	41
4.2 Dezimalbruchdarstellung von reellen Zahlen . . . . .	45
4.3 Addition, Multiplikation, Umordnung . . . . .	46
4.4 Sinus und Cosinus . . . . .	53
<b>5 Stetigkeit</b>	<b>55</b>
5.1 Teilmengen von $\mathbb{K}$ . . . . .	55
5.2 Vollständigkeit und Kompaktheit . . . . .	56
5.3 Stetigkeit . . . . .	57

<b>6</b>	<b>Stetige Funktionen <math>f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}</math></b>	<b>61</b>
6.1	Umkehrfunktionen . . . . .	61
6.2	Exponentialfunktion und Logarithmus . . . . .	63
6.3	Trigonometrische Funktionen . . . . .	64
6.4	Fundamentalsatz der Algebra . . . . .	67
<b>7</b>	<b>Differenzierbare Funktionen <math>f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}</math></b>	<b>69</b>
7.1	Definition der Ableitung . . . . .	69
7.2	Rechenregeln der Ableitung . . . . .	70
7.3	Mittelwertsatz und Monotonie . . . . .	73
7.4	Regel von de L'Hopital . . . . .	75
7.5	Konvexität und Ableitungen . . . . .	77
7.6	Taylorreihen . . . . .	80
<b>8</b>	<b>Das Integral von Funktionen <math>f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}</math></b>	<b>83</b>
8.1	Regelfunktionen . . . . .	83
8.2	Technik des Integrierens . . . . .	85
8.3	Riemannintegrale Funktionen . . . . .	90
8.4	Kriterium von Riemann . . . . .	92
8.5	Differentiation und Integration . . . . .	95
8.6	Uneigentliches Integral . . . . .	96
8.7	Die Konvergenz von Taylorreihen . . . . .	99

# Kapitel 1

## Mengen und Abbildungen

### 1.1 Mengen

Georg Cantor (1845-1918) hat den Begriff der Menge definiert als „eine Zusammenfassung von wohlbestimmten und wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen“. Diese Objekte werden Elemente der Menge genannt. Um ein Objekt  $a$  als Element der Menge  $A$  zu kennzeichnen, schreiben wir  $a \in A$ . Ist  $a$  dagegen kein Element der Menge  $A$ , so schreiben wir  $a \notin A$ .

Wir können Mengen dadurch beschreiben, dass wir alle ihre Elemente angeben, also z.B. ist

$$A = \{a\}$$

die Menge, die nur das Element  $a$  enthält und  $B$

$$B = \{a, b, c\}$$

die Menge, die drei Elemente  $a, b$  und  $c$  enthält. Dabei kann auch ein Element einer Menge wieder eine Menge sein:

$$C = \{a, \{a\}\}.$$

$$M = \{x \in X \mid x \text{ hat die Eigenschaft } p\} \text{ oder nur } M = \{x \mid x \text{ hat die Eigenschaft } p\}$$

bezeichnet die Menge aller Elemente  $x$  (von der Menge  $X$ ), die die Eigenschaft  $p$  haben.<sup>1</sup>

$A$  ist eine Teilmenge von  $B$ , wenn alle Elemente von  $A$  auch Elemente von  $B$  sind. In Symbolen  $A \subset B$ .

---

<sup>1</sup>Bei dieser Beschreibung muss man allerdings Vorsicht walten lassen, um die Russellsche Antinomie zu vermeiden. Läßt man nämlich die Menge aller Mengen zu, die sich nicht selbst als Element enthalten, so wird nicht entscheidbar, ob diese Menge sich selbst als Element enthält oder nicht. Als Ausweg wird in der axiomatischen Mengenlehre die Frage, ob eine Menge Element einer Menge ist, nicht in allen Fällen als sinnvoll zugelassen.

## 1.2 Operationen von Mengen

Die Vereinigung zweier Mengen  $A$  und  $B$  ist die Menge  $A \cup B$  aller Elemente, die in mindestens einer der beiden Mengen  $A$  und  $B$  enthalten sind. Der Durchschnitt zweier Mengen  $A$  und  $B$  ist die Menge  $A \cap B$  aller Elemente, die sowohl Element von  $A$  als auch Element von  $B$  sind. Die Differenzmenge  $A \setminus B$  ist die Menge aller Elemente von  $A$ , die nicht Element von  $B$  sind. Das kartesische Produkt der Mengen  $A$  und  $B$  ist die Menge aller geordneten Paare  $(a, b)$  von Elementen von  $A$  und  $B$ .

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ und } b \in B\}$$

Die Potenzmenge  $\mathcal{P}(M)$  einer Menge  $M$  ist die Menge aller Teilmengen von  $M$ . Dabei ist die leere Menge  $\emptyset$  stets ein Element der Potenzmenge.

z.B.  $\mathcal{P}(\{a, \{a\}\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{\{a\}\}, \{a, \{a\}\}\}$ .

Wenn wir nur Teilmengen einer vorgegebenen Menge  $M$  betrachten, dann wird für eine solche Menge  $A \in \mathcal{P}(M)$  die Menge  $M \setminus A$  auch als das Komplement  $A^c$  bezeichnet. Diese Operationen erfüllen die folgenden Regeln:

(Idempotenz)	$A \cup A = A$	$A \cap A = A$
(Kommutativität)	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
(Assoziativität)	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
(Distributivität)	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
(de Morgan)	$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$	$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

$A \subset A \cup B$	$A \cap B \subset A$
$A \cup \emptyset = A$	$A \cap \emptyset = \emptyset$
$A \setminus A = \emptyset$	$A \setminus \emptyset = A$
$(A^c)^c = A$	$A \subset B \iff B^c \subset A^c$
$(A \subset B \text{ und } B \subset A) \iff$	$A = B$
$A \cup B = B \iff$	$A \subset B$
$A \cap B = A \iff$	$A \subset B$
$(A \subset C \text{ und } B \subset C) \iff$	$(A \cup B) \subset C$
$(C \subset A \text{ und } C \subset B) \iff$	$C \subset (A \cap B)$

$$A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$$

$$(A \times C) \cup (B \times C) = (A \cup B) \times C \quad (A \times C) \cap (B \times C) = (A \cap B) \times C.$$

## 1.3 Relationen

Als Relationen auf einer Menge bezeichnet man Aussagen über mehrere Elemente der Menge, die entweder wahr oder falsch sind. Wir wollen hier nur Aussagen über zwei Elemente einer Menge  $A$  betrachten. Jede solche Relation beschreiben wir durch eine Teilmenge  $R$  aller geordneten Paare in  $A \times A$ , in der wir alle die Paare zusammenfassen, für die die Aussage der Relation wahr ist. Wir sagen dann, dass  $(a, b) \in A \times A$  diese Relation erfüllt, wenn  $(a, b)$  zu der Teilmenge  $R$  gehört. Andernfalls erfüllt  $(a, b)$  die Relation nicht. Wir führen jetzt folgende Eigenschaften einer Relation ein:

Reflexivität: für alle  $a \in A$  erfüllt  $(a, a)$  die Relation.

Symmetrie: falls  $(a, b)$  die Relation erfüllt, dann auch  $(b, a)$ .

Transitivität: falls  $(a, b)$  und  $(b, c)$  die Relation erfüllen, dann auch  $(a, c)$ .

**Definition 1.1.** *Eine Äquivalenzrelation ist eine Relation, die reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.*

Eine Äquivalenzrelation definiert dann sogenannte Äquivalenzklassen. Für jedes  $a \in A$  ist die Äquivalenzklasse  $[a]$  von  $a$  die Teilmenge aller Elemente  $b \in A$ , so dass  $(a, b)$  die Relation erfüllt. Aus der Transitivität folgt, dass für jedes  $b \in [a]$  die entsprechende Äquivalenzklasse  $[b]$  in  $[a]$  enthalten ist. Aus der Symmetrie folgt dann  $a \in [b]$  und wegen der Transitivität wieder  $[a] \subset [b]$ . Wegen der Symmetrie und der Transitivität folgt aus  $b \in [a]$  also  $[a] = [b]$ . Wenn zwei Äquivalenzklassen  $[a]$  und  $[b]$  beide ein Element  $c \in A$  enthalten, dann gilt also  $[a] = [c] = [b]$ . Also sind zwei Äquivalenzklassen entweder disjunkt oder gleich. Wegen der Reflexivität ist jedes Element in einer Äquivalenzklasse enthalten. Also zerfällt  $A$  in eine disjunkte Vereinigung von Äquivalenzklassen, d.h. jedes Element von  $A$  gehört zu genau einer Äquivalenzklasse.

## 1.4 Abbildungen

Eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  ist eine Zuordnungsvorschrift, die jedem Element  $x$  von  $X$  genau ein Element  $f(x)$  aus  $Y$  zuordnet:

$$f : X \rightarrow Y, \quad x \mapsto f(x)$$

Die Menge  $X$  der Argumente wird Definitionsbereich genannt und die Menge  $Y$ , in die abgebildet wird, Wertebereich. Das Bild einer Teilmenge  $A \subset X$  ist die Teilmenge aller Elemente  $y$  des Wertebereichs  $Y$ , auf die ein Argument in  $A$  abgebildet wird:

Bild  $f[A] = \{y \in Y \mid \exists x \in A \text{ mit } f(x) = y\}$ .  $\exists$  steht für "es gibt (mindestens) ein"

**Definition 1.2.** Eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$ ,  $x \mapsto f(x)$  heißt

(i) *injektiv*, wenn je zwei verschiedene Elemente  $x, x' \in X$  auch auf verschiedene Elemente von  $Y$  abgebildet werden:

$$\forall x, x' \in X \text{ folgt aus } x \neq x' \text{ auch } f(x) \neq f(x'). \quad \forall \text{ steht für "für alle"}$$

(ii) *surjektiv*, wenn das Bild  $f[X]$  der ganze Wertebereich  $Y$  ist.

$$\forall y \in Y \quad \exists x \in X \text{ mit } f(x) = y.$$

(iii) *bijektiv*, wenn sie injektiv und surjektiv ist.

Für jede Teilmenge  $B \subset Y$  ist das Urbild von  $B$  unter  $f$  die Menge aller Elemente von  $X$ , die nach  $B$  abgebildet werden:

$$f^{-1}[B] = \{x \in X \mid f(x) \in B\}.$$

Für eine bijektive Abbildung  $f : X \rightarrow Y$ ,  $x \mapsto f(x)$  besteht für jedes  $y \in Y$  das Urbild  $f^{-1}[\{y\}]$  nur aus genau einem Element. Also existiert auch die Umkehrabbildung

$$f^{-1} : Y \rightarrow X, \quad y \mapsto f^{-1}(y) \text{ mit } f^{-1}[\{y\}] = \{f^{-1}(y)\}.$$

Offenbar gilt dann  $f^{-1}(f(x)) = x$  für alle  $x \in X$  und  $f(f^{-1}(y)) = y$  für alle  $y \in Y$ .

## 1.5 Komposition von Abbildungen

Seien  $f : X \rightarrow Y$ ,  $x \mapsto f(x)$  und  $g : Y \rightarrow Z$ ,  $y \mapsto g(y)$  Abbildungen, dann definiert  $g \circ f : X \rightarrow Z$ ,  $x \mapsto g(f(x))$  die sogenannte Komposition (Verkettung) von  $f$  und  $g$ .

**Satz 1.3.** Die Komposition von Abbildungen ist assoziativ, d.h. für Abbildungen  $f : X \rightarrow Y$ ,  $x \mapsto f(x)$ ,  $g : Y \rightarrow Z$ ,  $y \mapsto g(y)$  und  $h : Z \rightarrow V$ ,  $z \mapsto h(z)$  gilt

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Sei  $f : X \rightarrow Y$ ,  $x \mapsto f(x)$  eine Abbildung und seien  $\mathbb{1}_X : X \rightarrow X$ ,  $x \mapsto x$  und  $\mathbb{1}_Y : Y \rightarrow Y$ ,  $y \mapsto y$  die identischen Abbildungen von den Mengen  $X$  und  $Y$ . Dann gilt

$$f \circ \mathbb{1}_X = f = \mathbb{1}_Y \circ f = f$$

Ist die Abbildung  $f$  bijektiv, dann gilt auch  $f \circ f^{-1} = \mathbb{1}_Y$  und  $f^{-1} \circ f = \mathbb{1}_X$ .

**Beweis:**

$(h \circ (g \circ f))(x) = h(g(f(x))) = (h \circ g) \circ f(x)$	$\forall x \in X$
$f \circ \mathbb{1}_X(x) = f(x) = (\mathbb{1}_Y \circ f)(x)$	$\forall x \in X$
$f \circ f^{-1}(y) = f(f^{-1}(y)) = y = \mathbb{1}_Y(y)$	$\forall y \in Y$
$f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}(f(x)) = x = \mathbb{1}_X(x)$	$\forall x \in X.$

**q.e.d.**

# Kapitel 2

## Reelle Zahlen

### 2.1 Axiome von angeordneten Körpern

Zunächst charakterisieren wir angeordnete Körper  $\mathbf{K}$  durch folgende Axiome:

- A1. Axiome der Addition
- A2. Axiome der Multiplikation
- A3. Distributivgesetz
- A4. Ordnungsaxiome

Es gibt mehrere angeordnete Körper. Der wichtigste ist der Körper der reellen Zahlen  $\mathbb{R}$ . Er wird später als der eindeutige angeordnete Körper charakterisiert, der zusätzlich das **A5**. Vollständigkeitsaxiom erfüllt.

**A1. Axiome der Addition 2.1.** *Es gibt eine Operation*

$+$ :  $\mathbf{K} \times \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{K}$ ,  $(x, y) \mapsto x + y$  mit

- (i) *Kommutativgesetz:  $x + y = y + x$  für alle  $x, y \in \mathbf{K}$ .*
- (ii) *Assoziativgesetz:  $x + (y + z) = (x + y) + z$  für alle  $x, y, z \in \mathbf{K}$ .*
- (iii) *Existenz der Null: es gibt eine Zahl  $0 \in \mathbf{K}$  mit  $x + 0 = x$  für alle  $x \in \mathbf{K}$*
- (iv) *Existenz des Negativen: zu jedem  $x \in \mathbf{K}$  gibt es ein  $-x \in \mathbf{K}$  mit  $x + (-x) = 0$ .*

**A2. Axiome der Multiplikation 2.2.** *Es gibt eine Operation*

$\cdot$ :  $\mathbf{K} \times \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{K}$ ,  $(x, y) \mapsto x \cdot y$  mit

- (i) *Kommutativgesetz:  $x \cdot y = y \cdot x$  für alle  $x, y \in \mathbf{K}$ .*
- (ii) *Assoziativgesetz:  $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$  für alle  $x, y, z \in \mathbf{K}$ .*

- (iii) *Existenz der Eins:* es gibt eine Zahl  $1 \in \mathbf{K}$ ,  $1 \neq 0$  mit  $x \cdot 1 = x$  für alle  $x \in \mathbf{K}$
- (iv) *Existenz des Inversen:* zu jedem  $x \in \mathbf{K} \setminus \{0\}$  gibt es ein  $x^{-1} \in \mathbf{K}$  mit  $x \cdot x^{-1} = 1$ .

### A3. Distributivgesetz 2.3.

$$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z) = x \cdot y + x \cdot z \text{ für alle } x, y, z \in \mathbf{K}.$$

**Definition 2.4.** Allgemein heißt eine Menge  $\mathbf{K}$ , die die Axiome **A1-A3** erfüllt Körper. Für Körper gelten daher auch alle Folgerungen aus **A1-A3**. Es gibt viele Körper.

**Beispiel 2.5.** Der kleinste Körper besteht aus zwei Elementen  $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ . Die Operationen  $+$  und  $\cdot$  sind dann definiert durch:

$$0 + 0 = 0 \quad 0 + 1 = 1 \quad 0 \cdot 0 = 0 \quad 0 \cdot 1 = 0$$

$$1 + 0 = 1 \quad 1 + 1 = 0 \quad 1 \cdot 0 = 0 \quad 1 \cdot 1 = 1$$

Zeige dass diese Definitionen von  $+$  und  $\cdot$  auf  $\mathbb{Z}_2$  die Axiome **A1-A3** erfüllen und umgekehrt durch **A1-A3** eindeutig bestimmt sind. In einem angeordneten Körper  $\mathbf{K}$  soll aber  $1 + 1 > 0$ , also  $1 + 1 \neq 0$  gelten, so dass wir noch weitere Axiome benötigen um angeordnete Körper zu charakterisieren.

Wir benützen folgende Abkürzungen:

$$\begin{array}{llll} x - y = x + (-y) & xy = x \cdot y & -xy = -(x \cdot y) & \forall x, y \in \mathbf{K} \\ \frac{1}{x} = x^{-1} & \frac{y}{x} = y \cdot x^{-1} & & \forall x \in \mathbf{K} \setminus \{0\}, y \in \mathbf{K} \\ x + y + z = x + (y + z) & xyz = x \cdot (y \cdot z) & xy + z = (x \cdot y) + z & \forall x, y, z \in \mathbf{K} \end{array}$$

**Satz 2.6** (Folgerungen aus **A1**).

- (i) Falls  $x + y = x + z$ , dann  $y = z$
- (ii) Falls  $x + y = x$ , dann  $y = 0$
- (iii) Falls  $x + y = 0$ , dann  $y = -x$
- (iv)  $-(-x) = x$

**Bemerkung 2.7.** (i) heißt Kürzungsregel.

(ii) zeigt, dass die Null eindeutig durch die Eigenschaft  $x + 0 = x$  bestimmt ist.

(iii) zeigt, dass das Negative  $(-x)$  eindeutig durch  $x + (-x) = 0$  bestimmt ist.

**Beweis:** (i) Sei  $x + y = x + z$ , dann folgern wir

$$\begin{aligned} y &= y + 0 &= 0 + y &= (x - x) + y \\ &= (-x + x) + y &= -x + (x + y) &= -x + (x + z) &= (-x + x) + z \\ &= (x - x) + z &= 0 + z &= z + 0 &= z. \end{aligned}$$

(ii) Sei  $x + y = x$ , dann gilt  $x + y = x + 0$ . Also folgt aus (i)  $y = 0$ .

(iii) Sei  $x + y = 0$ , dann gilt  $x + y = x + (-x)$ . Also folgt aus (i)  $y = -x$ .

(iv)  $-x + x = x + (-x) = 0$ . Also folgt aus (iii)  $x = -(-x)$ .

**q.e.d.**

**Satz 2.8** (Folgerungen aus **A2**).

(i) Falls  $x \neq 0$  und  $xy = xz$ , dann  $y = z$

(ii) Falls  $x \neq 0$  und  $xy = x$ , dann  $y = 1$

(iii) Falls  $x \neq 0$  und  $x \cdot y = 1$ , dann  $y = x^{-1}$

(iv) Falls  $x \neq 0$  und  $x^{-1} \neq 0$ , dann  $(x^{-1})^{-1} = x$

**Bemerkung 2.9.** Die Folgerungen sind analog zu denen aus **A1**. Wieder heißt (i) Kürzungsregel, (ii) impliziert wieder die Eindeutigkeit der Eins und (iii) die Eindeutigkeit des Inversen.

**Beweis:** (i) Sei  $x \neq 0$  und  $xy = xz$ , dann folgern wir

$$y = 1y = \left(x \frac{1}{x}\right) y = \left(\frac{1}{x} x\right) y = \frac{1}{x}(xy) = \frac{1}{x}(xz) = \left(\frac{1}{x} x\right) z = \left(x \frac{1}{x}\right) z = 1z = z.$$

(ii) Sei  $x \neq 0$  und  $xy = x$ , dann gilt  $xy = x \cdot 1$  Also folgt aus (i)  $y = 1$ .

(iii) Sei  $x \neq 0$  und  $xy = 1$ , dann gilt  $xy = x \cdot x^{-1}$ . Also folgt aus (i)  $y = x^{-1}$ .

(iv) Sei  $x \neq 0$ . Dann ist  $x^{-1}x = xx^{-1} = 1$ . Also folgt (iv) aus (iii).

**q.e.d.**

**Satz 2.10** (Folgerungen aus **A1-A3**).

(i)  $x \cdot 0 = 0$  für alle  $x$ . Insbesondere gilt  $x^{-1} \neq 0$  für alle  $x \neq 0$ .

(ii)  $x \cdot y = 0 \iff x = 0$  oder  $y = 0$

(iii)  $(-x)y = -xy = x(-y)$ .

(iv)  $(-1) \cdot x = -x$

(v)  $(-x)(-y) = xy$

(vi)  $x \neq 0, y \neq 0$  dann  $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$ .

**Bemerkung 2.11.** Die Null hat kein multiplikatives Inverses, sonst wäre wegen (i)  $0 = 0 \cdot 0^{-1} = 1$ . Daraus und aus (i) würde  $x = x \cdot 1 = x \cdot 0 = 0$  für alle  $x$  folgen.

**Beweis:** (i)  $x \cdot 0 + x \cdot 0 = x \cdot (0 + 0) = x \cdot 0$ . Aus (ii) von Satz 2.6 folgt dann  $x \cdot 0 = 0$   
(ii) Sei  $x \cdot y = 0$  und  $x \neq 0$ . Dann gilt wegen (i)  $x \cdot y = 0 = x \cdot 0$ . Also folgt aus Satz 2.8 (i)  $y = 0$ .

(iii)  $0 = 0 \cdot y = (x + (-x))y = xy + (-x)y$ . Aus (iii) im Satz 2.6 folgt dann

$$(-x)y = -xy = -yx = (-y)x = x(-y).$$

(iv) Setze in (iii)  $x = 1$ .

(v) Wegen (iii) und (iv) im Satz 2.6 gilt  $(-x)(-y) = -(x \cdot (-y)) = -(-xy) = xy$ .

(vi)  $1 = xy(xy)^{-1} = (xy)^{-1}xy = ((xy)^{-1}x)y = y((xy)^{-1}x)$ . Wegen Satz 2.8 (iii) folgt  $y^{-1} = (xy)^{-1}x$ , also  $y^{-1}x^{-1} = ((xy)^{-1}x)x^{-1} = (xy)^{-1}(xx^{-1}) = (xy)^{-1}$ . **q.e.d.**

**A4. Ordnungsaxiome 2.12.** Es gibt eine Relation  $<$  in  $\mathbf{K}$  mit drei Eigenschaften:

(i) *Totalität der Ordnung:* Für je zwei Zahlen  $x, y \in \mathbf{K}$  gilt genau eine der drei folgenden Relationen  $x < y$  oder  $x = y$  oder  $y < x$ .

(ii) *Transitivität:*  $x < y$  und  $y < z \implies x < z$

(iii) *Monotonie:*  $x < y \implies \begin{cases} x + c < y + c & \text{für alle } c \in \mathbf{K} \\ x \cdot c < y \cdot c & \text{für alle } 0 < c \in \mathbf{K} \end{cases}$

**Definition 2.13.** Ein Körper, der das Axiom A4 erfüllt, heißt angeordneter Körper.

Die rationalen Zahlen sind ein angeordneter Körper, und jeder angeordnete Körper enthält die rationalen Zahlen als Unterkörper. Wir benutzen folgende Abkürzungen:

$$x > y \iff y < x \qquad x \leq y \iff (x < y \text{ oder } x = y) \iff y \geq x.$$

**Satz 2.14** (Folgerungen aus A1-A4).

(i)  $0 < x \implies -x < 0$  und  $x < 0 \implies -x > 0$

(ii)  $x < y \iff 0 < y - x$

(iii)  $x < y$  und  $a < 0 \implies ya < xa$

(iv)  $x \neq 0 \implies x \cdot x = x^2 > 0$

(v)  $x > 0 \implies \frac{1}{x} > 0$

(vi)  $0 < x < y \implies 0 < \frac{1}{y} < \frac{1}{x}$

**Bemerkung 2.15.** Da  $1 \cdot 1 = 1$  folgt aus (iv)  $1 > 0$  und  $1 + 1 > 0 + 1 = 1 > 0$ . Also ist Beispiel 2.5 kein angeordneter Körper. Außerdem folgt aus (i)  $-1 < 0$ . Also gilt  $-1 < x^2$  für jedes  $x \in \mathbf{K}$ . Also gibt es keine Zahl  $x \in \mathbf{K}$  mit  $x^2 = -1$ .

**Beweis:** (i) Sei  $0 < x$ . Dann folgt mit Monotonie  $0 + (-x) < x + (-x)$ , also  $-x < 0$ . Sei  $x < 0$ . Dann folgt mit Monotonie  $x + (-x) < -x$  also auch  $0 < -x$ .

(ii) Sei  $x < y$ . Dann folgt mit Monotonie  $x - x < y - x$ , also auch  $0 < y - x$ .

Sei umgekehrt  $0 < y - x$ . Dann folgt mit Monotonie  $x < y$ .

(iii) Sei  $x < y$  und  $a < 0$ . Dann folgt aus (i)  $-a > 0$ . Also gilt wegen Monotonie  $-xa = x \cdot (-a) < y \cdot (-a) = -ya \iff 0 < xa - ya \iff ya < xa$ .

(iv) Sei  $x > 0$ . Dann folgt wegen Monotonie  $x^2 > 0 \cdot x = 0$ .

Sei  $x < 0$ . Dann folgt aus (i)  $-x > 0$  und mit Monotonie  $x^2 = (-x) \cdot (-x) > 0 \cdot (-x) = 0$ .

(v) Sei  $x > 0$ . Dann ist  $x \neq 0$  und  $\frac{1}{x} \neq 0$ . Aus (iv) folgt  $\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} > 0$ . Mit Monotonie folgt dann  $\frac{1}{x} = x \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} > 0 \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} = 0$ .

(vi) Sei  $0 < x < y$ . Dann ist  $x > 0$  und  $y > 0$  also wegen (v) auch  $\frac{1}{x} > 0$  und  $\frac{1}{y} > 0$ . Dann folgt mit Monotonie  $\frac{1}{y} = \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{x} \cdot x < \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{x} \cdot y = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y} \cdot y = \frac{1}{x}$ . **q.e.d.**

**Satz 2.16** (Arithmetisches Mittel). Seien  $x, y \in \mathbf{K}$ , dann gilt

$$x < y \implies x < \frac{x+y}{2} < y$$

Also liegt zwischen zwei verschiedenen Zahlen immer eine weitere.

**Beweis:** Aus  $x < y$  folgt mit Monotonie  $x + x < x + y < y + y$ . Weil aber  $x + x = x(1+1) = 2x$  und  $2 = 1+1 > 0$  folgt dann  $2x < x + y < 2y$  und  $x < \frac{x+y}{2} < y$  **q.e.d.**

**Übungsaufgabe 2.17.** Es gelten auch folgende Regeln:

(i)  $a < b$  und  $c < d \implies a + c < b + d$

(ii)  $0 < a < b$  und  $0 < c < d \implies ac < bd$

(iii)  $ab > 0 \iff$  entweder  $a > 0, b > 0$  oder  $a < 0, b < 0$

(iv)  $ab < 0 \iff$  entweder  $a > 0, b < 0$  oder  $a < 0, b > 0$

**Definition 2.18** (Betrag). Der Betrag einer Zahl  $x \in \mathbf{K}$  ist die Zahl

$$|x| = \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x \geq 0 \\ 2x < 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq -x \\ x < -x \end{cases} = \max\{x, -x\}.$$

$$\max\{x, y\} = \begin{cases} x & \text{falls } y \leq x \\ y & \text{falls } y > x \end{cases} \quad \forall x, y \in \mathbf{K}.$$

Aus der Definition folgt

$$\begin{array}{lll} |x| \geq 0 & \text{und} & |x| = 0 \iff x = 0. \\ -|x| \leq x \leq |x| & \iff & x \leq |x| \text{ und } -x \leq |x| \\ |-x| = |x| & \text{denn} & |-x| = \max\{-x, x\}. \end{array}$$

**Satz 2.19** (Eigenschaften des Betrags). *Für alle  $x, y \in \mathbf{K}$  gilt:*

(i)  $|x| \geq 0$  und  $|x| = 0 \iff x = 0$

(ii)  $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

(iii)  $|x + y| \leq |x| + |y|$

**Beweis:** (i) haben wir schon gesehen.

(ii) Wegen Satz 2.10 (iii) und (v) ändern sich beide Seiten nicht wenn wir  $x$  durch  $-x$  bzw.  $y$  durch  $-y$  ersetzen. Für  $x \geq 0$  und  $y \geq 0$  ist die Aussage klar.

(iii) Zwei Fälle:  $x + y \geq 0$ :  $|x + y| = x + y \leq |x| + y \leq |x| + |y|$  wegen Monotonie.  
 $x + y < 0$ :  $|x + y| = -(x + y) = -x - y \leq |x| - y \leq |x| + |y|$  wegen Monotonie. **q.e.d.**

**Korollar 2.20.** 
$$||x| - |y|| \leq |x - y|$$

**Beweis:**  $|x| = |x - y + y| \leq |x - y| + |y| \implies |x| - |y| \leq |x - y|$ .

Vertausche  $x$  und  $y \implies |y| - |x| \leq |y - x| = |x - y|$ . Also gilt  $||x| - |y|| \leq |x - y|$ . **q.e.d.**

**Definition 2.21** (Abstand).

Der Abstand  $d(x, y)$  zweier Zahlen  $x, y \in \mathbf{K}$  ist die nicht negative Zahl  $d(x, y) = |x - y|$ .

**Satz 2.22** (Eigenschaften des Abstands).

Der Abstand  $d : \mathbf{K} \times \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{K}$ ,  $(x, y) \mapsto d(x, y)$  hat folgende Eigenschaften:

(i)  $d(x, y) \geq 0$  und  $d(x, y) = 0 \iff x = y$

(ii)  $d(x, y) = d(y, x)$

(iii)  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$  für alle  $x, y, z \in \mathbf{K}$ .

**Beweis:** folgt aus den Folgerungen der Definition und Satz 2.19.

(iii)  $|x - y| = |x - z + z - y| \leq |x - z| + |z - y|$ . **q.e.d.**

**Definition 2.23.** Sei  $M \subset \mathbf{K}$  eine nicht leere Teilmenge von Zahlen.

(i)  $M$  heißt nach oben beschränkt, falls es eine Zahl  $\beta \in \mathbf{K}$  gibt, so dass  $x \leq \beta$  für alle  $x \in M$  gilt. Dann heißt  $\beta$  obere Schranke von  $M$ .

(ii)  $M$  heißt nach unten beschränkt, falls es eine Zahl  $\alpha \in \mathbf{K}$  gibt, so dass  $\alpha \leq x$  für alle  $x \in M$  gilt. Dann heißt  $\alpha$  untere Schranke von  $M$ .

(iii)  $M$  heißt beschränkt, wenn  $M$  nach oben und unten beschränkt ist.

**Definition 2.24** (Maximum und Minimum). Für eine nicht leere nach oben beschränkte Menge  $M \subset \mathbf{K}$  heißt eine obere Schranke  $m$  von  $M$ , die in  $M$  liegt, Maximum. Wir schreiben dann  $m = \max M$ . Analog heißt eine untere Schranke  $m$  einer nicht leeren nach unten beschränkten Menge  $M$ , die in  $M$  liegt, Minimum. Wir schreiben dann  $m = \min M$ .

**Definition 2.25** (Supremum und Infimum einer Menge). Ein Maximum  $s$  der Menge aller oberen Schranken von einer nicht leeren nach oben beschränkte Menge  $M \subset \mathbf{K}$  heißt Supremum. Wir schreiben dann  $s = \sup M$ . Analog heißt ein Maximum  $t$  der Menge aller unteren Schranken einer nach unten beschränkten Menge  $M$  Infimum. Wir schreiben dann  $t = \inf M$ .

**Bemerkung 2.26.** Wenn eine Menge ein Maximum bzw. Minimum besitzt, ist dieses eindeutig, weil es weder größer noch kleiner als ein anderes Maximum bzw. Minimum sein kann. Also sind auch Supremum und Infimum eindeutig, wenn sie existieren.

Folgende Charakterisierung erleichtert manche Beweise:

$$\begin{aligned} s = \sup M &\iff s \text{ ist obere Schranke von } M \text{ und } \forall \epsilon > 0 \exists x \in M \text{ mit } s - \epsilon < x. \\ t = \inf M &\iff t \text{ ist untere Schranke von } M \text{ und } \forall \epsilon > 0 \exists x \in M \text{ mit } x < t + \epsilon. \end{aligned}$$

Insbesondere ist jedes Maximum auch ein Supremum und jedes Minimum ein Infimum.

**Warnung 2.27.** Das Supremum  $\sup M$  bzw. das Infimum  $\inf M$  muss im Unterschied zum Maximum bzw. Minimum kein Element von  $M$  sein.

Wir definieren folgende Teilmengen eines angeordneten Körpers  $\mathbf{K}$ . Nachdem wir  $\mathbb{R}$  eingeführt haben, werden wir diese Symbole nur noch für Teilmengen von  $\mathbb{R}$  benutzen:

$$\begin{aligned} [a, b] &= \{x \in \mathbf{K} \mid a \leq x \leq b\} && \text{für alle } a \leq b \in \mathbf{K} \\ [a, b) &= \{x \in \mathbf{K} \mid a \leq x < b\} && \text{für alle } a < b \in \mathbf{K} \\ (a, b] &= \{x \in \mathbf{K} \mid a < x \leq b\} && \text{für alle } a < b \in \mathbf{K} \\ (a, b) &= \{x \in \mathbf{K} \mid a < x < b\} && \text{für alle } a < b \in \mathbf{K} \\ (-\infty, b] &= \{x \in \mathbf{K} \mid x \leq b\} && \text{für alle } b \in \mathbf{K} \\ (-\infty, b) &= \{x \in \mathbf{K} \mid x < b\} && \text{für alle } b \in \mathbf{K} \\ [a, \infty) &= \{x \in \mathbf{K} \mid a \leq x\} && \text{für alle } a \in \mathbf{K} \\ (a, \infty) &= \{x \in \mathbf{K} \mid a < x\} && \text{für alle } a \in \mathbf{K} \end{aligned}$$

$$\mathbf{K}^+ = (0, \infty) \text{ positive Zahlen}$$

$$\mathbf{K}^- = (-\infty, 0) \text{ negative Zahlen}$$

$$\mathbf{K}_0^+ = [0, \infty) \text{ nichtnegative Zahlen}$$

$$\mathbf{K}_0^- = (-\infty, 0] \text{ nichtpositive Zahlen}$$

Offenbar ist  $b$  eine obere Schranke von  $(a, b)$ . Andererseits gibt es wegen Satz 2.16 für jedes  $x < b$  ein  $y = \max\{\frac{x+b}{2}, \frac{a+b}{2}\}$  mit  $x < y$  und  $y \in (a, b)$ . Also gibt es keine obere Schranke von  $(a, b)$ , die kleiner ist als  $b$ . Damit ist  $b = \sup(a, b)$ . Analog gilt:

$$\begin{aligned} a = \inf[a, b] &= \inf[a, b) &= \inf(a, b] &= \inf(a, b) &= \inf[a, \infty) &= \inf(a, \infty) \\ b = \sup[a, b] &= \sup[a, b) &= \sup(a, b] &= \sup(a, b) &= \sup(-\infty, b] &= \sup(-\infty, b) \end{aligned}$$

$(-\infty, b]$  und  $(-\infty, b)$  sind nicht nach unten beschränkt  
 $[a, \infty)$  und  $(a, \infty)$  sind nicht nach oben beschränkt

Also existiert  $\max[a, b] = \max(a, b] = \max(-\infty, b] = b$   
 $\min[a, b] = \min[a, b) = \min[a, \infty) = a,$   
während  $[a, b)$  und  $(a, b)$  und  $(-\infty, b)$  kein Maximum besitzen  
und  $(a, b]$  und  $(a, b)$  und  $(a, \infty)$  kein Minimum.

## 2.2 Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N} \subset \mathbf{K}$

Wir wollen die natürlichen Zahlen als Teilmenge eines angeordneten Körpers  $\mathbf{K}$  charakterisieren. Aufgrund von **A2** gibt es das Element  $1 \in \mathbb{N} \subset \mathbf{K} \setminus \{0\}$ , das wegen (ii) in Satz 2.8 eindeutig ist. Aus (iv) im Satz 2.14 folgt  $1 > 0$  aus  $1 = 1 \cdot 1$ . Wegen der Monotonie ist dann die Nachfolgerabbildung streng monoton:

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &\rightarrow \mathbf{K}, & n &\mapsto n + 1 > n \\ 1 &\mapsto 1 + 1 = 2 > 1, & 2 &\mapsto 2 + 1 = 3 > 2, & \dots & n &\mapsto n + 1 > n, & \dots \end{aligned}$$

**Definition 2.28.** Eine Menge  $M \subset \mathbf{K}$  heißt induktiv, falls

- (i)  $1 \in M$  (Einselement).
- (ii)  $a \in M \implies a + 1 \in M$  (invariant unter der Nachfolgerabbildung).

$\mathbf{K}$  selber ist offenbar induktiv oder auch  $[1, \infty)$ . Offenbar ist der Durchschnitt von induktiven Mengen wieder induktiv.

**Definition 2.29** (Natürliche Zahlen).  $\mathbb{N}$  ist die kleinste induktive Teilmenge von  $\mathbf{K}$ , also der Durchschnitt aller induktiven Teilmengen von  $\mathbf{K}$ .

**Satz 2.30.** Es gilt  $\mathbb{N} = \{1\} \cup \{n \in \mathbf{K} \mid n - 1 \in \mathbb{N}\} = \{1\} \cup \text{Bild der Einschränkung der Nachfolgerabbildung auf } \mathbb{N}$ .

**Beweis:** Wegen  $(1+1) - 1 = 1$ ,  $(n+1) - 1 = (n-1) + 1$  und weil  $\mathbb{N}$  eine induktive Menge ist, ist auch  $S = \{1\} \cup \{n \in \mathbf{K} \mid n-1 \in \mathbb{N}\}$  eine induktive Menge. Also folgt  $S \supset \mathbb{N}$ . Weil  $\mathbb{N}$  eine induktive Menge ist, folgt  $S \subset \mathbb{N}$  aus  $n = (n-1) + 1$ . **q.e.d.**

**Satz 2.31** (Prinzip der vollständigen Induktion). *Eine Teilmenge  $S \subset \mathbb{N}$  erfülle*  
 (i)  $1 \in S$                       (ii)  $a \in S \implies a+1 \in S$ .                      *Dann ist  $S = \mathbb{N}$ .*

**Beweis:**  $S$  ist offenbar eine induktive Menge. Also gilt  $\mathbb{N} \subset S$ . Andererseits ist  $S$  eine Teilmenge von  $\mathbb{N}$ . Also folgt  $\mathbb{N} = S$ . **q.e.d.**

**Beweis durch vollständige Induktion:** Um eine Aussage  $A(n)$  über alle natürlichen Zahlen  $n \in \mathbb{N}$  zu beweisen genügt es also zu zeigen:

- (i) die Aussage  $A(1)$  ist richtig.
- (ii) Falls die Aussage  $A(n)$  richtig ist, dann auch  $A(n+1)$ .

Ein solcher Beweis heißt Beweis durch vollständige Induktion.

**Satz 2.32** (Bernoulli Ungleichung). *Sei  $x^n$  für alle  $x \in \mathbf{K}$  und  $n \in \mathbb{N}$  das  $n$ -fache Produkt von  $x$  mit sich selber und  $x^0 = 1$ . Für  $x \in \mathbf{K} \setminus \{0\}$  sei  $x^{-n} = 1/(x^n)$ . Dann gilt*

$$(1+x)^n \geq 1+nx \quad \text{für alle } x \in (-1, \infty) \text{ und alle } n \in \mathbb{N}.$$

*Gleichheit gilt nur für  $x = 0$  oder  $n = 1$ .*

**Beweis** durch vollständige Induktion: Für  $x = 0$  oder  $n = 1$  gilt offenbar die Gleichheit. Für jede natürliche Zahl  $n \in \mathbb{N}$  sei  $A(n)$  die Aussage

$$\text{Für alle } x \in (-1, 0) \cup (0, \infty) \quad \text{gilt} \quad (1+x)^{n+1} > 1+(n+1)x.$$

- (i) Wenn  $x \neq 0$  dann folgt  $(1+x)^2 = 1+2x+x^2 > 1+2x$ . Also gilt  $A(1)$ .
- (ii) Es gelte  $A(n)$ . Dann folgern wir für  $x \in (-1, 0) \cup (0, \infty)$  aufgrund der Monotonie:

$$\text{Wegen } x > -1 \text{ gilt } 1+x > 0, \quad \text{und wegen } x \neq 0 \text{ folgt daraus}$$

$$(1+x)(1+x)^{n+1} > (1+x)(1+(n+1)x) = 1+(n+2)x+(n+1)x^2 > 1+(n+2)x.$$

Also gilt  $A(n+1)$ . **q.e.d.**

**Satz 2.33.** *Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gibt es keine Zahl in  $\mathbb{N}$  zwischen  $n-1$  und  $n$ .*

**Beweis** durch vollständige Induktion:

- (i)  $[1, \infty)$  ist eine induktive Menge. Also ist  $\mathbb{N} \cap (0, 1) = \mathbb{N} \cap [1, \infty) \cap (0, 1) = \emptyset$ .
- (ii) Wir nehmen an, dass es für ein  $n \in \mathbb{N}$  keine natürliche Zahl in  $(n-1, n)$  gibt. Wenn es eine Zahl  $m \in \mathbb{N} \cap (n, n+1)$  gibt, dann liegt  $m$  wegen Satz 2.30 auch in  $\{1\} \cup \{x \in \mathbf{K} \mid x-1 \in \mathbb{N}\}$ . Wegen  $1 \leq n < m$  ist  $m$  nicht gleich 1. Also liegt  $m$  dann in  $\{n \in \mathbf{K} \mid n-1 \in \mathbb{N}\}$ . Wegen der Monotonie liegt  $m-1$  dann in  $\mathbb{N} \cap (n-1, n)$ , was der Annahme widerspricht. Also gibt es keine natürliche Zahl in  $\mathbb{N} \cap (n, n+1)$ . **q.e.d.**

Für alle  $n \in \mathbb{N}$  ist also  $\{m \in \mathbb{N} \mid m \leq n+1\} = \{m \in \mathbb{N} \mid m \leq n\} \cup \{n+1\}$ . Für alle  $n \in \mathbb{N}$  schreiben wir deshalb  $\{1, \dots, n\} = \{m \in \mathbb{N} \mid m \leq n\}$ .

**Satz 2.34** (Wohlordnungsprinzip). *Für jede nichtleere Menge  $M \subset \mathbb{N}$  existiert  $\min M$ .*

**Beweis:** Wenn  $n \in M \subset \mathbb{N}$ , dann ist offenbar jedes Minimum von  $M \cap \{1, \dots, n\}$  auch ein Minimum von  $M$  und umgekehrt. Deshalb zeigen wir mit vollständiger Induktion, dass für alle  $n \in \mathbb{N}$  jede nichtleere Teilmenge  $M \subset \{1, \dots, n\}$  ein Minimum besitzt:

(i) Jede nichtleere Teilmenge von  $\{1\}$  ist gleich  $\{1\}$  mit Minimum  $\min\{1\} = 1$ .

(ii) Für jede nichtleere Teilmenge  $M \subset \{1, \dots, n+1\}$  ist entweder  $M \cap \{1, \dots, n\}$  nichtleer oder  $M = \{n+1\}$ . Wenn also jede nichtleere Teilmenge von  $\{1, \dots, n\}$  ein Minimum hat, dann auch jede nichtleere Teilmenge von  $\{1, \dots, n+1\}$ . **q.e.d.**

Für zwei verschiedene angeordnete Körper  $\mathbf{K}$  und  $\mathbf{K}'$  gibt es eine eindeutige Abbildung, die  $1_{\mathbf{K}}$  auf  $1_{\mathbf{K}'}$  abbildet,  $1_{\mathbf{K}} + 1_{\mathbf{K}}$  auf  $1_{\mathbf{K}'} + 1_{\mathbf{K}'}$ ,  $1_{\mathbf{K}} + 1_{\mathbf{K}} + 1_{\mathbf{K}}$  auf  $1_{\mathbf{K}'} + 1_{\mathbf{K}'} + 1_{\mathbf{K}'}$  usw. Wegen dem Prinzip der vollständigen Induktion ist der Definitionsbereich  $\mathbb{N}_{\mathbf{K}}$ , und das Bild ist  $\mathbb{N}_{\mathbf{K}'}$ . Also sind die natürlichen Zahlen in dem Sinne eindeutig, dass  $\mathbb{N}_{\mathbf{K}}$  auf eindeutige Weise mit  $\mathbb{N}_{\mathbf{K}'}$  identifiziert wird, wenn  $1_{\mathbf{K}}$  mit  $1_{\mathbf{K}'}$  und Nachfolger mit Nachfolgern identifiziert werden. Analoge Aussagen gelten für folgende Mengen:

**Definition 2.35** (ganze Zahlen  $\mathbb{Z}$ , rationale Zahlen  $\mathbb{Q}$ ).

$$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad \mathbb{Z} = \mathbb{N}_0 \cup \{x \in K \mid -x \in \mathbb{N}\}, \quad \mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \in \mathbf{K} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

## 2.3 Mächtigkeit von Mengen

**Definition 2.36.** *Zwei Mengen heißen gleichmächtig, wenn es eine bijektive Abbildung zwischen ihnen gibt.*

Diese Relation von Mengen ist eine Äquivalenzrelation. Wir zeigen mit vollständiger Induktion, dass  $\{1, \dots, n\}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  nicht gleichmächtig zu einer echten Teilmenge von sich ist: (i) Die einzige echte Teilmenge von  $\{1\}$  ist leer. (ii) Eine bijektive Abbildung  $f$  von  $\{1, \dots, n+1\}$  auf eine echte Teilmenge von  $\{1, \dots, n+1\}$  bildet  $\{1, \dots, n\}$  bijektiv auf eine echte Teilmenge von  $\{1, \dots, n+1\} \setminus \{f(n+1)\}$  ab, also auf eine zu einer echten Teilmenge von  $\{1, \dots, n\}$  gleichmächtige Menge. Das zeigt die Aussage, also insbesondere, dass  $\{1, \dots, n\}$  und  $\{1, \dots, m\}$  nur für  $n = m$  gleichmächtig sind.

Wenn wir  $1 \in \mathbb{N}$  mit der Äquivalenzklasse von  $\{\emptyset\}$  identifizieren und für Mengen die Nachfolgerabbildung  $A \mapsto A \cup \{A\}$  definieren, werden die natürlichen Zahlen mit den Äquivalenzklassen folgender Mengen identifiziert:

$$\begin{array}{lll} 1 & \leftrightarrow & \{\emptyset\} \\ 2 & \leftrightarrow & \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \\ 3 & \leftrightarrow & \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \\ 4 & \leftrightarrow & \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\} \\ \vdots & & \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \dots, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \dots, \}\} \end{array}$$

Die Menge aller Äquivalenzklassen kann man als eine Erweiterung von  $\mathbb{N}$  betrachten.

**Definition 2.37.** Eine nicht leere Menge  $A$  heißt

**endlich**, falls es ein  $n \in \mathbb{N}$  gibt, so dass  $A$  gleichmächtig ist zu  $\{1, 2, \dots, n\}$ ,

**unendlich**, falls sie nicht endlich ist,

**abzählbar**, falls sie gleichmächtig ist zu  $\mathbb{N}$ ,

**höchstens abzählbar**, wenn sie endlich oder abzählbar ist,

**überabzählbar**, wenn sie weder endlich noch abzählbar ist.

**Satz 2.38.** (i) Jede nichtleere Teilmenge von  $\mathbb{N}$  ist höchstens abzählbar.

(ii) Eine Menge  $A$  ist genau dann höchstens abzählbar, wenn es eine surjektive Abbildung von  $\mathbb{N}$  auf  $A$  gibt.

**Beweis:** (i) Mit dem Wohlordnungsprinzip nummerieren wir der Größe nach mit dem kleinsten Element anfangend jede Teilmenge  $M \subset \mathbb{N}$  durch. Für alle  $m \in M$  ist  $\{1, \dots, m\} \cap M$  gleichmächtig zu  $\{1, \dots, n\}$  für ein  $n \in \{1, \dots, m\}$ . Wenn  $M$  nach oben unbeschränkt ist, erhalten wir eine bijektive Abbildung von  $\mathbb{N}$  nach  $M$  und  $M$  ist abzählbar. Andernfalls ist  $M \subset \{1, \dots, m\}$  für ein  $m \in M$  und damit endlich.

(ii) Sei  $A$  eine höchstens abzählbare Menge. Wenn  $A$  endlich ist, gibt es ein  $n \in \mathbb{N}$ , so dass  $A$  gleichmächtig ist zu  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Die Abbildung  $\mathbb{N} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $m \mapsto \min\{m, n\}$  ist eine surjektive Abbildung, so dass dann auch eine surjektive Abbildung auf  $A$  existiert. Wenn  $A$  abzählbar ist, gibt es eine bijektive Abbildung von  $\mathbb{N}$  auf  $A$ .

Sei umgekehrt  $A$  eine Menge und  $f$  eine surjektive Abbildung von  $\mathbb{N}$  auf  $A$ . Dann existiert eine Abbildung  $g : A \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $a \mapsto \min f^{-1}[\{a\}]$ , die offenbar eine bijektive Abbildung von  $A$  auf eine Teilmenge von  $\mathbb{N}$  definiert. Also ist  $A$  gleichmächtig zu einer Teilmenge von  $\mathbb{N}$  und damit wegen (i) höchstens abzählbar. **q.e.d.**

**Übungsaufgabe 2.39.** Zeige, dass jede endliche Teilmenge der reellen Zahlen ein Maximum und ein Minimum besitzt.

**Satz 2.40.** (i) Die Menge  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  ist abzählbar.

(ii) Eine höchstens abzählbare Vereinigung von höchstens abzählbaren Mengen ist wieder höchstens abzählbar.

**Beweis:** (i) Wir definieren die sogenannte Diagonalnummerierung als die Abbildung

$$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \quad (x, y) \mapsto f(x, y) = y + \frac{(x + y - 2)(x + y - 1)}{2} = y + \sum_{n=0}^{x+y-2} n.$$

Diese Abbildung ist injektiv. Gilt nämlich  $x + y < x' + y'$  so folgt aus

$$f(x, y) - y \leq f(x', y') - y' - (x' + y' - 2) \quad \text{und} \quad y - y' < y \leq x + y - 1 \leq x' + y' - 2$$

$$f(x, y) \leq f(x', y') + y - y' - (x' + y' - 2) < f(x', y').$$

Gilt aber  $x + y = x' + y'$  so gilt auch  $f(x, y) - f(x', y') = y - y'$ .

Also ist  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  gleichmächtig zum Bild von  $f$ . Wegen  $f(x, y) \geq y$  ist das Bild nicht beschränkt und nicht endlich. Wegen (i) vom vorangehenden Satz ist  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  abzählbar.

(ii) Wegen (ii) im vorangehenden Satz gibt es eine surjektive Abbildung  $n \mapsto A_n$  von  $\mathbb{N}$  auf die höchstens abzählbar vielen Mengen. Wegen (ii) im vorangehenden Satz gibt es dann für alle  $n \in \mathbb{N}$  eine surjektive Abbildung  $f_n : \mathbb{N} \rightarrow A_n$ . Dann ist

$$F : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n, \quad (n, m) \mapsto f_n(m)$$

eine surjektive Abbildung. Also folgt (ii) aus (i) und dem vorangehenden Satz. **q.e.d.**

**Korollar 2.41.**  $\mathbb{Q}$  ist abzählbar.

**Beweis:**  $\mathbb{Z} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}, \quad (m, n) \mapsto \frac{m}{n}$  ist eine surjektive Abbildung.  $\mathbb{Z}$  ist abzählbar, also ist  $\mathbb{Q}$  höchstens abzählbar.  $\mathbb{Q}$  ist aber nicht endlich und damit abzählbar. **q.e.d.**

## 2.4 $\mathbb{R}$ und das Vollständigkeitsaxiom

**A5. Vollständigkeitsaxiom 2.42.** Für jede nicht leere nach oben beschränkte Teilmenge  $M$  eines angeordneten Körpers  $\mathbf{K}$  existiert das Supremum  $s = \sup M \in \mathbf{K}$ .

Wir werden sehen, dass die rationalen Zahlen  $\mathbb{Q}$  **A1-A4** erfüllen aber nicht **A5**. Man kann zeigen, dass zwei angeordnete Körper, für die **A5** gilt, isomorph sind.

**Definition 2.43.** Sei  $\mathbb{R}$  der angeordnete Körper, in dem **A5** gilt.

**Satz 2.44** (Folgerungen aus **A5**).

- (i) Jede nicht leere nach unten beschränkte Menge  $M$  besitzt ein Infimum  $\inf M \in \mathbb{R}$ .
- (ii) Eine nicht leere nach oben beschränkte Menge  $M$  besitzt genau dann ein Maximum, wenn  $\sup M \in M$ . In diesem Fall ist  $\max M = \sup M$ .
- (iii) Eine nicht leere nach unten beschränkte Menge  $M$  besitzt genau dann ein Minimum, wenn  $\inf M \in M$ . In diesem Fall ist  $\min M = \inf M$ .

**Beweis:** (i) Weil die Ordnungsrelation nicht symmetrisch ist, erhalten wir dadurch, dass wir in einer Aussage alle auftauchenden Ordnungsrelationen umkehren, eine andere Aussage. Zum Beispiel erhalten wir die Definition der unteren Schranke, indem wir in der Definition der oberen Schranke alle Ordnungsrelationen umdrehen. Dann erhalten wir aber auch die Definition des Infimums, indem wir in der Definition des Supremums alle Ordnungsrelationen umkehren. Weil  $x < y \iff -y < -x$ , sind also Aussagen

über Ordnungsrelationen zwischen reellen Zahlen äquivalent zu den analogen Aussagen, in denen wir alle Ordnungsrelationen umdrehen und alle reellen Zahlen durch ihre Negativen ersetzen<sup>1</sup>. Insbesondere besitzt die Menge  $M$  genau dann ein Infimum, wenn die Menge  $-M = \{x \in \mathbb{R} \mid -x \in M\}$  ein Supremum besitzt und es gilt  $\inf M = -\sup -M$ . Also folgt (i) aus dem Vollständigkeitsaxiom **A5**.

(ii) Wenn  $\sup M \in M$ , dann ist  $\sup M$  eine obere Schranke von  $M$ , die Element von  $M$  ist. Wenn  $\sup M \notin M$ , dann gilt sogar  $x < \sup M \leq s$  für alle  $x \in M$  und alle oberen Schranken  $s$  von  $M$ . Also gibt es in  $M$  keine obere Schranke von  $M$ .

(iii) analog zu (ii).

**q.e.d.**

**Satz 2.45** (Archimedes-Eudoxos).

(i) Für jede reelle Zahl  $x \in \mathbb{R}$  gibt es eine natürliche Zahl  $n > x$  (Archimedes).

(ii) Für jedes  $\epsilon > 0$  gibt es ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $\frac{1}{n} < \epsilon$  (Eudoxos).

**Beweis:** (i) Es reicht zu zeigen, dass  $\mathbb{N}$  keine obere Schranke hat. Wenn  $\mathbb{N}$  eine obere Schranke hat, dann existiert  $\sup \mathbb{N}$ , und  $\exists n \in \mathbb{N}$  mit  $n > \sup \mathbb{N} - 1$ , weil  $\sup \mathbb{N} - 1$  keine obere Schranke von  $\mathbb{N}$  ist. Dann gilt  $\mathbb{N} \ni n + 1 > \sup \mathbb{N}$ , was ein Widerspruch ist.

(ii) Nach (i) gibt es ein  $n > \frac{1}{\epsilon}$ . Aus Satz 2.14 (v)-(vi) folgt  $\frac{1}{n} < \epsilon$ .

**q.e.d.**

**Bemerkung 2.46.** In einem angeordneten Körper sind die beiden Eigenschaften (i) und (ii) aus Satz 2.45 wegen Satz 2.14 (v)-(vi) äquivalent. Ein angeordneter Körper heißt archimedisch, wenn (i) oder (ii) gilt. In jedem angeordneten Körper sind die rationalen Zahlen archimedisch. Es gibt auch nicht archimedische angeordnete Körper.

Wegen dem Teil (i) von Archimedes enthalten die Intervalle  $(a, b)$  rationale Zahlen:

**Satz 2.47.** Sei  $a < b$ . Dann existiert  $r \in \mathbb{Q}$  mit  $a < r < b$ .

**Beweis:** Für alle  $n \in \mathbb{N}$  ist  $a < \frac{m}{n} < b$  äquivalent zu  $na < m < nb$ . Wegen  $b - a > 0$  gibt es nach Satz 2.45 (i) ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n > \frac{1}{b-a}$ . Dann gilt  $na < nb$  und  $nb - na > 1$ .

Wir nehmen zunächst  $a \geq 0$  an. Sei  $m$  die kleinste natürliche Zahl, die größer ist als  $na$ . Wegen Satz 2.30 sind die natürlichen Zahlen enthalten in  $\{1\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid x - 1 \in \mathbb{N}\}$ . Also ist  $m - 1$  entweder eine natürliche Zahl oder gleich Null. Dann folgt

$$m - 1 \leq na < m \iff na < m \leq na + 1 < nb.$$

Als nächstes nehmen wir  $b \leq 0$  an. Sei  $-m$  die kleinste natürliche Zahl, die größer ist als  $-nb$ . Wieder ist  $-m - 1$  entweder eine natürliche Zahl oder Null. Also folgt

$$-m - 1 \leq -nb < -m \iff na < nb - 1 \leq m < nb.$$

<sup>1</sup>Wenn diese Aussagen aber algebraische Operationen benutzen, die nicht verträglich sind mit der Abbildung jeder reellen Zahl auf ihre Negative, wie z. B. das Produkt zweier reeller Zahlen, dann müssen bei dieser Ersetzung auch die algebraischen Operationen entsprechend geändert werden, also z. B. das Produkt in das negative des Produktes.

Wenn  $a < 0$  und  $b > 0$  ist, wählen wir  $m = 0$ .

**q.e.d.**

Wir haben sogar gezeigt, dass  $\forall a < b$  mit  $b - a > 1$  das Intervall  $(a, b)$  eine ganze Zahl enthält. Also enthält jedes Intervall mindestens eine und damit sogar unendlich viele rationale Zahlen. Insbesondere gibt es für jede reelle Zahl  $x$  und jedes  $\epsilon > 0$  eine rationale Zahl  $r \in (x - \epsilon, x + \epsilon)$ , die dann  $d(x, r) < \epsilon$  erfüllt. Wir sagen, dass  $\mathbb{Q}$  dicht in  $\mathbb{R}$  liegt. Die rationalen Zahlen erfüllen als Unterkörper der reellen Zahlen die Axiome **A1-A4**. Wir werden gleich sehen, dass sie nicht das Vollständigkeitsaxiom **A5** erfüllen.

**Satz 2.48** (Quadratwurzeln). *Für alle  $a > 0$  gibt es genau ein  $b > 0$  mit  $b^2 = a$ .*

Wir schreiben  $b = \sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$ .

**Beweis der Eindeutigkeit:** Aus  $0 < x < y$  folgt aufgrund der Monotonie  $x^2 < xy < y^2$ . Also gibt es höchstens ein  $b > 0$  mit  $b^2 = a$ .

**Beweis der Existenz:** Die Menge  $M = \{x \in [0, \infty) \mid x^2 < a\}$  enthält 0. Dann gilt

$$x^2 > x(a+1) > (a+1)^2 = a^2 + 2a + 1 > 2a > a \quad \text{für } x > a+1.$$

Also ist  $a+1$  eine obere Schranke von  $M$ . Sei  $b = \sup M$ . Aus  $0 \in M$  folgt  $0 \leq b$ .

**Wenn  $b^2 < a$ ,** folgt  $0 < a - b^2$ . Für  $h = \min\{1, \frac{a-b^2}{2b+2}\}$  gilt also  $0 < h \leq 1$  und  $h(2b+2) \leq a - b^2$  und damit auch

$$(b+h)^2 = b^2 + 2bh + h^2 \leq b^2 + 2bh + h = b^2 + h(2b+1) < b^2 + h(2b+2) \leq b^2 + a - b^2 = a.$$

Also ist  $b < b+h \in M$  im Widerspruch zu  $b = \sup M$ .

**Wenn  $a < b^2$ ,** folgt  $0 < b$ ,  $-b^2 < a - b^2 < 0$  und  $-\frac{1}{2} < \frac{a-b^2}{2b^2} < 0$ . Also folgt aus der Bernoulli Ungleichung

$$\left(b \left(1 + \frac{a-b^2}{2b^2}\right)\right)^2 = b^2 \left(1 + \frac{a-b^2}{2b^2}\right)^2 \geq b^2 \left(1 + 2\frac{a-b^2}{2b^2}\right) = a.$$

Dann folgt aus  $x > b(1 + \frac{a-b^2}{2b^2})$  wieder  $x^2 > b^2(1 + \frac{a-b^2}{2b^2})^2 \geq a$  und damit auch  $x \notin M$ .

Also ist  $b(1 + \frac{a-b^2}{2b^2}) < b$  eine obere Schranke von  $M$  im Widerspruch zu  $b = \sup M$ .

Weil also weder  $b^2 < a$  noch  $a < b^2$  gilt, folgt  $b^2 = a$  und  $b \neq 0$ .

**q.e.d.**

Insbesondere gibt es also genau ein  $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ . Wir werden in Beispiel 3.9 für jedes  $n \in \mathbb{N}$  zeigen, dass es für jedes  $a > 0$  genau ein  $b > 0$  gibt mit  $b^n = a$ .

**Lemma 2.49.**  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ . *Insbesondere erfüllt  $\mathbb{Q}$  nicht das Vollständigkeitsaxiom **A5**.*

**Beweis:** Wir zeigen, dass es nicht zwei natürliche Zahlen  $n, m \in \mathbb{N}$  geben kann mit  $(\frac{m}{n})^2 = 2$ . Wenn es zwei solche Zahlen gibt, dann sei  $n_0$  das Minimum der Teilmenge

$$M = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists m \in \mathbb{N} \text{ mit } m^2 = 2n^2\}.$$

Also gibt es ein  $m_0 \in \mathbb{N}$  mit  $m_0^2 = 2n_0^2$ . Dann enthält  $(\frac{m_0-1}{2}, \frac{m_0+2}{2})$  eine positive ganze Zahl  $m_1$ . Aus  $m_0 \in (2m_1 - 2, 2m_1 + 1)$  folgt entweder  $m_0 = 2m_1 - 1$  oder  $m_0 = 2m_1$ .

Im ersten Fall widerspricht  $n_0^2 = 2m_1^2 - m_1 + \frac{1}{2} \in (2m_1^2 - m_1, 2m_1^2 - m_1 + 1)$  dem Satz 2.33. Im zweiten Fall ist  $n_0^2 = 2m_1^2$ , also  $m_1 \in M$ . Dann folgt  $n_0 = \inf M \leq m_1$  und  $n_0^2 \leq m_1^2$  im Widerspruch zu  $m_1^2 < 2m_1^2 = n_0^2$ . **q.e.d.**

**Satz 2.50** (Intervallschachtelungsprinzip). *Seien  $I_n = [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}$  für  $n = 1, 2, \dots$  abgeschlossene Intervalle mit  $a_n < b_n$  und den beiden folgenden Eigenschaften:*

(i)  $I_{n+1} \subset I_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

(ii) Für jedes  $\epsilon > 0$  gibt es ein  $n \in \mathbb{N}$ , so dass  $b_n - a_n < \epsilon$ .

Dann enthält der Durchschnitt  $\bigcap_{n \geq 1} I_n = \{x\}$  genau ein  $x \in \mathbb{R}$ .

Dieser Satz ist für offene Intervalle falsch. Z.B.  $\bigcap_{n \geq 1} (0, \frac{1}{n}) = \emptyset$  nach Satz 2.45.

**Beweis:** Wegen (i) gilt

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq \dots \leq b_{n+1} \leq b_n \leq \dots \leq b_2 \leq b_1$$

Also besteht die Menge  $A = \{a_1, a_2, \dots\}$  aus unteren Schranken der Menge  $B = \{b_1, b_2, \dots\}$  und umgekehrt die Menge  $B$  aus oberen Schranken der Menge  $A$ . Dann liegen  $x = \sup A$  und  $y = \inf B$  in der Schnittmenge der oberen Schranken von  $A$  mit den unteren Schranken von  $B$ , was gleich  $\bigcap_{n \geq 1} I_n$  ist. Dann folgt  $x \leq y$  und  $\bigcap_{n \geq 1} I_n = [x, y]$ . Andererseits gibt es wegen (ii) für alle  $\epsilon > 0$  ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $y - x \leq b_n - a_n < \epsilon$ . Dann muss aber  $0 \leq y - x \leq \inf \{\epsilon \mid \epsilon > 0\} = 0$  und deshalb  $y = x$  gelten. **q.e.d.**

**Satz 2.51.** *In jedem angeordneten archimedischen Körper folgt aus dem Intervallschachtelungsprinzip im Satz 2.50 das Vollständigkeitsaxiom A5.*

**Beweis\*:** Sei  $M$  eine nicht leere nach oben beschränkte Menge,  $a_1$  ein Element von  $M$  und  $b_1 > a_1$  eine obere Schranke von  $M$ . Wir definieren induktiv eine Folgen  $a_1 \leq a_2 \leq \dots$  von Elementen von  $M$  und eine Folge  $b_1 \geq b_2 \geq \dots$  von oberen Schranken von  $M$ . Wenn  $\frac{a_n + b_n}{2}$  keine obere Schranke von  $M$  ist, dann gibt es ein Element  $a_{n+1} \in [\frac{a_n + b_n}{2}, b_n] \cap M$  und wir setzen  $b_{n+1} = b_n$ . Wenn  $\frac{a_n + b_n}{2}$  eine obere Schranke von  $M$  ist setzen wir  $a_{n+1} = a_n$  und  $b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$ . Offenbar gilt

$$0 \leq b_{n+1} - a_{n+1} \leq 2^{-1}(b_n - a_n) \leq 2^{-2}(b_{n-1} - a_{n-1}) \leq \dots \leq 2^{-n}(b_1 - a_1).$$

Aus der Bernoulli Ungleichung folgt  $2^n > n$  und wegen Satz 2.45 (ii) gibt es für alle  $\epsilon > 0$  ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $2^{-n}(b_1 - a_1) < \frac{b_1 - a_1}{n} < \epsilon$ . Wegen dem Intervallschachtelungsprinzip besteht die Schnittmenge der Intervalle  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n]$  aus einer Zahl  $s \in \mathbb{R}$ .

Für jede Zahl  $x > s$  gibt es ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $\frac{x-s}{b_1 - a_1} > \frac{1}{n} > 2^{-n}$ . Daraus folgt  $b_{n+1} \leq a_{n+1} + 2^{-n}(b_1 - a_1) < s + (x - s) = x$ . Weil  $b_{n+1}$  eine obere Schranke von  $M$  ist folgt  $x \notin M$ . Also ist  $s$  eine obere Schranke von  $M$ . Für jede Zahl  $x < s$  gibt es ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $\frac{s-x}{b_1 - a_1} > \frac{1}{n} > 2^{-n}$ . Daraus folgt  $a_{n+1} \geq b_{n+1} - 2^{-n}(b_1 - a_1) > s - (s - x) = x$ . Wegen  $a_{n+1} \in M$  ist  $x$  keine obere Schranke von  $M$ . Also ist  $s = \sup M$ . **q.e.d.**

Deshalb können die reellen Zahlen auch als angeordneter archimedischer Körper charakterisiert werden, in dem das Intervallschachtelungsprinzip gilt.

**Satz 2.52.** *Die Menge der reellen Zahlen ist überabzählbar.*

**Beweis:** Wir nehmen an, dass  $\mathbb{R}$  abzählbar ist. Sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Durchnummerierung von  $\mathbb{R}$ . Wähle  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a < b$ . Sei  $I_1 = [a, b]$ . Wir definieren induktiv eine Folge  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von Intervallen. Für alle  $n \in \mathbb{N}$  wählen wir in  $I_n = [a_n, b_n]$  als  $I_{n+1}$  eins der beiden schnittfremden Teilintervalle  $[a_n, a_n + \frac{b_n - a_n}{3}]$  und  $[b_n - \frac{b_n - a_n}{3}, b_n]$ , das  $x_n$  nicht enthält. Für alle  $n \in \mathbb{N}$  liegt dann  $x_n$  nicht in  $I_{n+1}$ . Wegen der Bernoulli Ungleichung 2.32 gilt

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{3} = \dots = \frac{b_1 - a_1}{3^n} \leq \frac{b - a}{1 + 2n} < \frac{b - a}{2n} < \epsilon \text{ für } \epsilon > 0 \text{ und } n > \frac{b - a}{2\epsilon}.$$

Wegen dem Intervallschachtelungsprinzip enthält  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$  ein Element, das nicht zu  $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  gehört. Das widerspricht der Annahme, dass  $\mathbb{R}$  abzählbar ist. **q.e.d.**

Auch die Potenzmenge der natürlichen Zahlen ist nicht abzählbar. Wir können sie mit den Folgen identifizieren, die Werte in  $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$  annehmen, also der Menge aller Abbildungen von  $\mathbb{N}$  nach  $\mathbb{Z}_2$ . Diese Folgen werden wir mithilfe der dyadischen Entwicklung mit der Teilmenge  $[0, 1) \subset \mathbb{R}$  identifizieren. Diese ist gleichmächtig zu  $\mathbb{R}$ .

## 2.5 Die erweiterte Zahlengerade $\bar{\mathbb{R}}$

**Definition 2.53.** *Die erweiterte Zahlengerade besteht aus  $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$ .*

Mit  $\infty$  bezeichnen wir auch  $+\infty$ . Die Ordnungsrelation läßt sich auf  $\bar{\mathbb{R}}$  durch  $-\infty < x < \infty$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  fortsetzen und erfüllt offensichtlich auch (i) und (ii) des Ordnungsaxioms. Die Operationen  $+$  und  $\cdot$  lassen sich nicht auf  $\bar{\mathbb{R}}$  fortsetzen, so dass **A1-A4** gilt: Für alle  $x, y \in \mathbb{R}$  würde aus  $y - x < \infty$  wegen der Monotonie  $y < \infty + x$  folgen. Deshalb müsste  $\infty + x = \infty$  gelten. Aus Satz 2.6 (ii) würde  $x = 0$  folgen.  $\bar{\mathbb{R}}$  ist also kein angeordneter Körper.

Die Definitionen von oberen und unteren Schranken, von Supremum und Infimum, und von Maximum und Infimum übertragen sich auf die erweiterte Zahlengerade. Offenbar ist  $\infty$  das Maximum und  $-\infty$  das Minimum von  $\bar{\mathbb{R}}$ . Insbesondere ist  $\infty$  eine obere Schranke und  $-\infty$  eine untere Schranke von jeder Teilmenge von  $\bar{\mathbb{R}}$ . Weil  $\infty$  die einzige obere Schranke einer nicht leeren Teilmenge  $M$  von  $\mathbb{R} \subset \bar{\mathbb{R}}$  ist, die in  $\mathbb{R}$  keine obere Schranke hat, ist  $\infty$  dann das Supremum von  $M$  als Teilmenge von  $\bar{\mathbb{R}}$ . Analog ist  $-\infty$  das Infimum einer nicht leeren Teilmenge von  $\mathbb{R} \subset \bar{\mathbb{R}}$ , die keine untere Schranke in  $\mathbb{R}$  hat. In  $\bar{\mathbb{R}}$  gilt  $\sup \emptyset = -\infty$  und  $\inf \emptyset = \infty$ . Daraus folgt, dass jede Teilmenge von  $\bar{\mathbb{R}}$  ein Supremum und ein Infimum hat. Außerdem gilt wieder, dass eine Teilmenge  $M \subset \bar{\mathbb{R}}$  genau dann ein Maximum bzw. Infimum hat, wenn  $\sup M \in M$  bzw.  $\inf M \in M$  gilt. In diesen Fällen ist wieder  $\max M = \sup M$  bzw.  $\min M = \inf M$ . Wir benutzen die Symbole  $\sup$ ,  $\inf$ ,  $\max$  und  $\min$  sowohl für Teilmengen von  $\mathbb{R}$  als auch für Teilmengen von  $\bar{\mathbb{R}}$ , so dass aus dem Zusammenhang klar werden muss, was genau gemeint ist.

## 2.6 Die Peano Axiome

Es gibt andere Möglichkeiten die reellen Zahlen einzuführen. Man kann zuerst die natürlichen Zahlen einführen und danach der Reihe nach die ganzen Zahlen, die rationalen Zahlen und die reellen Zahlen. Dabei kann man die natürlichen Zahlen im Rahmen der Mengenlehre einführen oder sie durch die Peano Axiome charakterisieren:

1. **Peano Axiom:**  $1 \in \mathbb{N}$  (Einselement).
2. **Peano Axiom:**  $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists$  genau einen Nachfolger  $n' \in \mathbb{N}$  (Nachfolgerabbildung).
3. **Peano Axiom:** Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt  $n' \neq 1$  (Eins  $\notin$  Bild der Nachfolgerabbildung).
4. **Peano Axiom:** Für alle  $n, m \in \mathbb{N}$  folgt  $n = m$  aus  $n' = m'$  (Injektivität der Nachfolgerabbildung).
5. **Peano Axiom:** Jede induktive Teilmenge  $S \subset \mathbb{N}$ , d.h. jede Teilmenge mit folgenden Eigenschaften umfaßt die natürlichen Zahlen  $\mathbb{N} \subset S$ :
  - (i)  $1 \in S$ .
  - (ii) Falls  $n \in S$ , dann ist auch  $n' \in S$ .

Man kann die natürlichen Zahlen durch diese Axiome charakterisieren und damit die reellen Zahlen einführen. Dafür muss viel Schlussfolgerungsarbeit geleistet werden, bevor die reellen Zahlen eingeführt sind (vgl. E. Landau: Grundlagen der Analysis). Wir skizzieren in diesem Abschnitt, wodurch sich diese zweite Einführung der reellen Zahlen, von der von uns gewählten unterscheidet, und stellen sie in ihren Grundzügen vor.

**Die Addition von natürlichen Zahlen**  $n + m$  wird  $\forall n, m \in \mathbb{N}$  so eingeführt, dass (i)  $n + 1 = n'$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und (ii)  $n + m' = (n + m)'$  für alle  $n, m \in \mathbb{N}$  gilt. Für  $n = 1$  gilt  $1 + 1 = 1'$  und für alle  $m \in \mathbb{N}$  folgt aus  $1 + m = m'$  auch  $1 + m' = (m')' = (1 + m)'$ . Wegen dem 5. Peano Axiom ist also  $1 + m$  für alle  $m \in \mathbb{N}$  durch  $m'$  definiert. Wenn für ein  $n \in \mathbb{N}$  durch diese Bedingungen  $n + m$  für alle  $m \in \mathbb{N}$  definiert ist, dann folgt aus (i)  $n' + 1 = (n')' = (n + 1)'$ . Wenn  $n' + m$  für ein  $m \in \mathbb{N}$  definiert ist, dann folgt aus (ii)  $n' + m' = (n' + m)'$  also ist dann wegen dem 5. Peano Axiom  $n' + m$  für alle  $m \in \mathbb{N}$  definiert. Also ist wegen dem 5. Peano Axiom die Menge aller  $n \in \mathbb{N}$ , für die  $n + m$  durch diese Bedingungen für alle  $m \in \mathbb{N}$  definiert ist gleich  $\mathbb{N}$ . Deshalb ist dadurch die Addition zwischen allen natürlichen Zahlen definiert. Mit Hilfe der Peano Axiome kann man dann folgern, dass die Addition kommutativ und assoziativ ist.

**Die Multiplikation von natürlichen Zahlen**  $nm$  wird  $\forall n, m \in \mathbb{N}$  so eingeführt, dass (i)  $n1 = n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und (ii)  $nm' = n \cdot m + n$  für alle  $n, m \in \mathbb{N}$  gilt. Wieder kann man aus den Peano Axiomen folgern, dass diese Bedingungen eine Multiplikation  $n \cdot m$  für alle  $n, m \in \mathbb{N}$  definiert. Danach zeigt man, dass auch die Multiplikation kommutativ, assoziativ und zusammen mit der Addition distributiv ist.

**Die Ordnungsrelation** wird auf den natürlichen Zahlen durch  $n < n + m$  und  $m < n + m \quad \forall n, m \in \mathbb{N}$  eingeführt. Sie erfüllt **A4** wobei alle  $n \in \mathbb{N}$  als positiv gelten.

**Ganze Zahlen:** Die ganzen Zahlen werden als formale Differenzen  $n - m$  eingeführt. Wegen  $n - m = \tilde{n} - \tilde{m} \Leftrightarrow n + \tilde{m} = \tilde{n} + m$  sind das Äquivalenzklassen in  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$$(n, m) \sim (\tilde{n}, \tilde{m}) \iff n + \tilde{m} = \tilde{n} + m \quad \forall (n, m), (\tilde{n}, \tilde{m}) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

Die Addition, Multiplikation und Ordnungsrelation von  $\mathbb{N}$  wird auf  $\mathbb{Z}$  fortgesetzt.

**Rationale Zahlen:** Die rationalen Zahlen werden als formale Brüche  $\frac{m}{n}$  mit  $(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$  eingeführt. Wegen  $\frac{m}{n} = \frac{\tilde{m}}{\tilde{n}} \Leftrightarrow m\tilde{n} = \tilde{m}n$  sind das Äquivalenzklassen in  $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$

$$(m, n) \sim (\tilde{m}, \tilde{n}) \iff m\tilde{n} = \tilde{m}n \quad \forall (m, n), (\tilde{m}, \tilde{n}) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$$

Addition, Multiplikation, Ordnungsrelation wird auf  $\mathbb{Q}$  definiert, so dass **A1-A4** gilt. **Reelle Zahlen** werden als Dedekindsche Schnitte eingeführt, also Mengen  $A \subset \mathbb{Q}$  mit

- (i)  $A \neq \emptyset, \mathbb{Q}$       (ii)  $p \in A$  und  $q < p \Rightarrow q \in A$ .      (iii)  $A$  hat kein Maximum.  
Dabei entspricht  $a \in \mathbb{R}$  dem Dedekindschen Schnitt  $A = (-\infty, a) \cap \mathbb{Q}$  mit  $a = \sup A$ .  
Addition, Multiplikation, Ordnungsrelation wird auf  $\mathbb{R}$  definiert, so dass **A1-A5** gilt.

## 2.7 Der Körper der komplexen Zahlen

Motivation: Wir hatten aus der Ordnungsrelation gefolgert, dass  $x^2 > 0$  gilt, falls  $x \neq 0$ . Deshalb existieren in den reellen Zahlen keine Quadratwurzeln von negativen Zahlen. Erweitert man die reellen Zahlen durch eine Quadratwurzel  $i$  von  $-1$ , so erhält man die komplexen Zahlen, in denen sich dann alle algebraischen Gleichungen lösen lassen.

**Definition 2.54** (Komplexe Zahlen). *Die Komplexen Zahlen  $\mathbb{C}$  ist die Menge  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  aller geordneten Paare  $(x, y)$  von reellen Zahlen zusammen mit den Operationen*

$$\begin{aligned} + : & \quad \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, & ((x, y), (u, v)) & \mapsto (x, y) + (u, v) = (x + u, y + v) \\ \cdot : & \quad \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, & ((x, y), (u, v)) & \mapsto (xu - yv, xv + yu) \end{aligned}$$

Mit dieser Definition erfüllt  $\mathbb{C}$  die Körperaxiome **A1-A3**. Dabei ist

$$\text{Null :} \quad 0_{\mathbb{C}} = (0, 0) \quad \text{Eins :} \quad 1_{\mathbb{C}} = (1, 0)$$

$$\text{negatives Element :} \quad -(x, y) = (-x, -y)$$

$$\text{inverses Element :} \quad (x, y)^{-1} = \left( \frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) \quad \text{für } (x, y) \neq (0, 0).$$

Wir bezeichnen komplexe Zahlen meistens durch einen Buchstaben, üblicherweise  $z$ . Die Null und die Eins bezeichnen wir auch durch 0 und 1, so dass aus dem Zusammenhang

klar werden muss, ob es sich um die Null bzw. Eins der reellen oder komplexen Zahlen handelt. Außerdem benutzen wir dieselben Abkürzungen wie bei den reellen Zahlen:

$$z + (-z) = z - z = 0 \qquad z^{-1} = \frac{1}{z} \qquad z \cdot \frac{1}{z} = 1 \qquad \text{usw.}$$

Da die komplexen Zahlen eine Erweiterung der reellen Zahlen sind, wollen wir  $\mathbb{R}$  als Teilmenge von  $\mathbb{C}$  auffassen. Dafür definieren wir eine injektive Abbildung

$$\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{C}, \quad x \mapsto (x, 0)$$

Offenbar ist diese Abbildung verträglich mit den Operationen  $+$  und  $\cdot$  von  $\mathbb{R}$  und  $\mathbb{C}$ :

$$\begin{aligned} (x, 0) + (y, 0) &= (x + y, 0) & (x, 0) \cdot (y, 0) &= (xy, 0) \\ (0, 0) &= 0 & (1, 0) &= 1 \\ -(x, 0) &= (-x, 0) & (x, 0)^{-1} &= (x^{-1}, 0) \end{aligned}$$

**Definition 2.55** (Imaginäre Einheit).  $i = (0, 1) \in \mathbb{C}$  mit  $i^2 = (-1, 0) = -1$ .

Wir schreiben also  $(x, y) = x + iy$ . Dann ergeben sich die Operationen  $+$  und  $\cdot$

$$\begin{aligned} x + iy + u + iv &= x + u + i(y, v) \\ (x + iy)(u + iv) &= xu + i(yu + xv) + i^2yv = xu - yv + i(yu + xv) \end{aligned}$$

Für die komplexe Zahl  $z = x + iy$  heißt

$$\begin{aligned} x &= \Re(z) \text{ Realteil von } z & y &= \Im(z) \text{ Imaginärteil von } z \\ z \text{ heißt reell, falls } \Im(z) &= 0 & z \text{ heißt imaginär, falls } \Re(z) &= 0 \end{aligned}$$

**Definition 2.56** (komplexe Konjugation). Die Abbildung  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z = x + iy \mapsto \bar{z} = x - iy$  heißt *komplexe Konjugation* oder *einfach nur Konjugation*

Die komplexen Zahlen erhalten wir aus den reellen Zahlen, indem wir reelle Vielfache einer Wurzel aus  $-1$  hinzufügen. Weil aber  $(-1) \cdot (-1) = 1$  ist das Negative einer Wurzel aus  $-1$  wieder eine Wurzel aus  $-1$ . Welche dieser beiden Wurzeln aus  $-1$  wir zur imaginären Einheit machen ist aber eine Konvention. Das legt nahe, dass die Konjugation ein Endomorphismus der komplexen Zahlen, d.h. eine bijektive Abbildung, die mit den Operationen  $+$  und  $\cdot$  verträglich ist, die die reellen Zahlen invariant läßt:

**Satz 2.57.** (i)  $\overline{\bar{z}} = z$

(ii)  $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$

(iii)  $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$

(iv)  $z + \bar{z} = 2\Re z$  und  $z - \bar{z} = 2i\Im(z)$

(v)  $z \cdot \bar{z}$  ist reell und nicht negativ.

**Beweis:** (i)-(iv) nachrechnen. (v)  $(x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 \geq 0$ . **q.e.d.**

**Definition 2.58** (Betrag). *Der Betrag einer komplexen Zahl  $z = x + iy$  ist definiert als die reelle nicht negative Wurzel aus  $z \cdot \bar{z}$ , d.h.  $|\cdot| : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $z \mapsto |z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$ .*

**Satz 2.59** (Eigenschaften des Betrags).

(i)  $|z| \geq 0$  und  $|z| = 0 \iff z = 0$

(ii)  $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$

(iii)  $|z + w| \leq |z| + |w|$  (Dreiecksungleichung)

(iv)  $||z| - |w|| \leq |z - w|$

(v)  $|\bar{z}| = |z|$

(vi)  $|\Re(z)| \leq |z|$  und  $|\Im(z)| \leq |z|$

**Beweis:** (i) Für  $x \neq 0$  oder  $y \neq 0$  gilt  $|x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$  und andernfalls  $|0| = 0$ .

(ii) folgt wegen der Eindeutigkeit der Wurzel aus  $|z \cdot w|^2 = zw \overline{zw} = z\bar{z}w\bar{w} = (|z||w|)^2$ .

(v) folgt wegen der Eindeutigkeit der Wurzel aus  $|\bar{z}|^2 = \bar{z}z = |z|^2$ .

(vi) Für  $z = 0$  gilt die Aussage. Sei also  $z = x + iy \neq 0$ . Dann gilt  $x^2 \leq x^2 + y^2$ . Aus  $0 < \sqrt{x^2 + y^2} < x$  folgt aber mit Monotonie  $x^2 + y^2 < x\sqrt{x^2 + y^2} < x^2$ . Also gilt  $x \leq \sqrt{x^2 + y^2}$  und damit  $|\Re(z)| \leq |z|$ . Vertauschen von  $x$  und  $y$  ergibt  $|\Im(z)| \leq |z|$ .

(iii)  $|z + w|^2 = (z + w)(\bar{z} + \bar{w}) = z\bar{z} + z\bar{w} + w\bar{z} + w\bar{w} = z\bar{z} + 2\Re(z\bar{w}) + w\bar{w}$   
 $\leq |z|^2 + 2|z\bar{w}| + |w|^2 = |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 = (|z| + |w|)^2$ .

Aus  $0 < |z| + |w| < |z + w|$  folgt mit Monotonie  $(|z| + |w|)^2 < (|z| + |w|)|z + w| < |z + w|^2$ . Also gilt  $|z + w| \leq |z| + |w|$ .

(iv) folgt aus (i)-(iii) genau wie im reellen Fall. **q.e.d.**

**Definition 2.60** (Abstand). *Der Abstand zweier komplexer Zahlen ist die nicht negative Zahl  $d : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(z, w) \mapsto d(z, w) = |z - w|$*

Aus den Eigenschaften des Betrages folgt genau wie für die reellen Zahlen

**Satz 2.61** (Eigenschaften des Abstandes).

(i)  $d(z, w) \geq 0$  und  $d(z, w) = 0 \iff z = w$

(ii)  $d(z, w) = d(w, z)$

(iii)  $d(z, w) \leq d(z, u) + d(u, w)$ . (Dreiecksungleichung).

Wir veranschaulichen die komplexen Zahlen in der zweidimensionalen Ebene. Der Abstand ist der euklidische Abstand zwischen den entsprechenden Punkten der Ebene.

# Kapitel 3

## Zahlenfolgen

### 3.1 Konvergenz

Im folgenden werden wir des öfteren Aussagen vorstellen, die sowohl für die reellen Zahlen als auch für die komplexen Zahlen gelten. Wir benutzen dann das Symbol  $\mathbb{K}$  um entweder die reellen oder die komplexen Zahlen zusammen mit den entsprechenden Abbildungen und Operationen zu bezeichnen. Die Elemente von  $\mathbb{K}$  wollen wir dann einfach Zahlen nennen. Eine Folge ist eine Abbildung  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}$ ,  $n \mapsto a_n$ . Wir bezeichnen sie mit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Wir interessieren uns vorwiegend für die Grenzwerte solcher Zahlenfolgen.

**Definition 3.1.** Die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  heißt konvergent, wenn es eine Zahl  $a \in \mathbb{K}$  gibt und für jedes  $\epsilon > 0$  ein  $N \in \mathbb{N}$ , so dass  $|a_n - a| < \epsilon$  für alle natürlichen Zahlen  $n \geq N$  gilt. Die Zahl  $a$  heißt dann Grenzwert der Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

Wir schreiben dann  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  oder  $\lim a_n = a$  oder auch  $a_n \rightarrow a$  für  $n \rightarrow \infty$ .

**Beispiel 3.2.**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$  (Folgen, die gegen 0 konvergieren heißen Nullfolgen).

**Beweis:** Nach dem Satz von Archimedes-Eudoxos gibt es für jedes  $\epsilon > 0$  ein  $N \in \mathbb{N}$  mit  $\frac{1}{N} < \epsilon$ . Dann gilt wegen Satz 2.14 (vi) für alle  $n \geq N$  auch  $|\frac{1}{n} - 0| < \epsilon$ . **q.e.d.**

**Satz 3.3. (i)** Der Grenzwert einer konvergenten Folge ist eindeutig.

**(ii)** Eine komplexe Folge konvergiert genau dann, wenn die entsprechenden Folgen der Realteile und Imaginärteile konvergieren.

**(iii)** Für jede konvergente Zahlenfolge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist  $\{|a_n| \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$  beschränkt.

**Beweis: (i)** Seien  $a$  und  $b$  zwei Grenzwerte einer konvergenten Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Für ein  $\epsilon > 0$  gilt dann  $|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$  für alle  $n \geq N$  und  $|a_n - b| < \frac{\epsilon}{2}$  für alle  $n \geq M$ . Dann folgt

$$0 \leq |a - b| \leq |a - a_n| + |a_n - b| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \text{ für alle } n \geq \max\{N, M\}.$$

Dann gilt auch  $0 \leq |a - b| \leq \inf(0, \infty) = 0$ . Also ist  $|a - b| = 0$  und damit auch  $a = b$ .

(ii) Die Realteile und Imaginärteile einer komplexen Folge  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  bilden zwei reelle Folgen  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $z_n = x_n + iy_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Sei  $z = x + iy$  die Zerlegung einer komplexen Zahl in Realteil und Imaginärteil. Wegen Satz 2.59 (vi)

$$\max\{|x_n - x|, |y_n - y|\} \leq |z_n - z|$$

konvergieren die Real- bzw. Imaginärteile einer konvergenten komplexen Folge gegen den Realteil bzw. Imaginärteil des Grenzwertes. Konvergieren umgekehrt die Folgen  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  bzw.  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gegen  $x$  bzw.  $y$ , dann gibt es für jedes  $\epsilon > 0$  zwei natürliche Zahlen  $N, M \in \mathbb{N}$  so dass  $|x_n - x| < \frac{\epsilon}{2}$  für alle  $n \geq N$  gilt, und  $|y_n - y| < \frac{\epsilon}{2}$  für alle  $n \geq M$ . Dann gilt für alle  $n \geq \max\{N, M\}$

$$|x_n + iy_n - (x + iy)| \leq |x_n - x| + |i(y_n - y)| = |x_n - x| + |y_n - y| < \epsilon.$$

Also konvergiert eine komplexe Folge mit ihren Realteilen und Imaginärteilen.

(iii) Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine konvergente Folge mit Grenzwert  $a$ . Dann gibt es ein  $N \in \mathbb{N}$ , so dass  $|a_n - a| < 1$  für alle  $n \geq N$  gilt und damit auch  $|a_n| \leq |a_n - a + a| < 1 + |a|$ . Daraus folgt  $|a_n| \leq \max\{|a| + 1, |a_1|, |a_2|, \dots, |a_{N-1}|\}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . **q.e.d.**

Eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  heißt divergent, wenn sie nicht konvergiert, wenn es also kein  $a \in \mathbb{K}$  gibt, so dass  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ . Wenn es für eine reelle Folge für jedes  $b \in \mathbb{R}$  ein  $N \in \mathbb{N}$  gibt, so dass für alle natürlichen Zahlen  $n \geq N$  gilt  $a_n > b$  bzw.  $a_n < b$  dann schreiben wir  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$  bzw.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ . Weil in beiden Fällen die Folgen nicht beschränkt sind, können sie wegen dem vorangehenden Satz nicht konvergieren. Es gilt offenbar  $\lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} -n = -\infty$ .

**Satz 3.4.** (i) Sei  $|x| < 1$  dann gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$

(ii) Sei  $|x| > 1$  dann ist  $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$  divergent.

(iii) Sei  $x = 1$  dann gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 1$

(iv) Sei  $x \in (1, \infty)$  dann gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \infty$ .

(v) Sei  $|x| = 1$  und  $x \neq 1$  dann ist  $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$  divergent.

**Beweis:** (i) Für  $x = 0$  gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$ . Sei also  $0 < |x| < 1$ . Dann ist  $1 < \frac{1}{|x|} = 1 + y$  mit  $y = \frac{1 - |x|}{|x|}$ . Aus der Bernoulli Ungleichung folgt  $\frac{1}{|x|^n} = (1 + y)^n \geq 1 + ny > ny = n \frac{1 - |x|}{|x|}$  und  $|x|^n < \frac{1}{n} \frac{|x|}{1 - |x|}$ . Aus dem Satz von Archimedes-Eudoxos folgt dann, dass es für jedes  $\epsilon > 0$  ein  $N \in \mathbb{N}$  gibt, so dass  $\frac{1}{N} < \epsilon \cdot \frac{1 - |x|}{|x|}$ . Daraus folgt für alle  $n \geq N$

$$|x^n - 0| = |x|^n < \frac{1}{n} \frac{|x|}{1 - |x|} \leq \frac{1}{N} \frac{|x|}{1 - |x|} < \epsilon.$$

(iii) Wegen  $1^n = 1$  ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} 1^n = 1$ .

(iv) Sei  $x > 1$ . Dann ist  $y = x - 1 > 0$ . Für jedes  $b \in \mathbb{R}$  gibt es ein  $N \in \mathbb{N}$  mit  $N > \frac{b}{x-1}$ . Dann folgt für alle  $n \geq N$  aufgrund der Bernoulli Ungleichung

$$x^n = (1 + y)^n \geq 1 + ny > ny = n(x - 1) \geq N(x - 1) > b.$$

Also gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \infty$ .

(ii) Für  $|x| > 1$  gilt wegen (iv)  $\lim_{n \rightarrow \infty} |x^n| = \infty$ . Also ist  $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$  nicht beschränkt.

(v) Für alle  $y \in \mathbb{K}$  und alle natürlichen Zahlen  $n$  gilt

$$|x^n - y| + |y - x^{n+1}| \geq |x^n - y + y - x^{n+1}| = |(1 - x)x^n| = |1 - x| \cdot |x|^n.$$

Für  $|x| = 1$  gilt also  $\max\{|x^n - y|, |x^{n+1} - y|\} \geq \frac{|1 - x|}{2}$ .

Also kann es für  $x \neq 1$  keinen Grenzwert geben. **q.e.d.**

**Satz 3.5** (Rechenregeln). *Für konvergente Zahlenfolgen  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gilt*

(i)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$

(ii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda x_n = \lambda \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  für alle  $\lambda \in \mathbb{K}$ .

(iii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = (\lim_{n \rightarrow \infty} x_n)(\lim_{n \rightarrow \infty} y_n)$

(iv) Wenn  $x_n \neq 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \neq 0$ , dann gilt auch  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}$ .

(v)  $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = |\lim_{n \rightarrow \infty} x_n|$ .

(vi) Wenn zwei reelle konvergente Folgen  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$   $x_n \leq y_n$  erfüllen, dann gilt auch  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ .

(vii) Wenn zwei reelle konvergente Folgen  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$   $x_n \leq y_n$  erfüllen und den gleichen Grenzwert haben, dann gilt für jede reelle Folge  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , die  $x_n \leq z_n \leq y_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  erfüllt,  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ .

**Beweis:** Seien  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  und  $y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ . (i) Für jedes  $\epsilon > 0$  gibt es natürliche Zahlen  $N, M \in \mathbb{N}$ , so dass  $|x_n - x| < \frac{\epsilon}{2}$  für alle  $n \geq N$  und  $|y_n - y| < \frac{\epsilon}{2}$  für alle  $n \geq M$  gilt. Dann gilt  $|x_n + y_n - (x + y)| \leq |x_n - x| + |y_n - y| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$  für alle  $n \geq \max\{N, M\}$ . Also konvergiert  $(x_n + y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gegen  $x + y$ .

(ii) Für  $\lambda = 0$  gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda x_n = \lambda \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ . Sei also  $\lambda \neq 0$  und damit  $0 < |\lambda|$ . Dann gibt es für jedes  $\epsilon > 0$  ein  $N \in \mathbb{N}$ , so dass  $|x_n - x| < \frac{\epsilon}{|\lambda|}$  für alle  $n \geq N$  gilt. Daraus folgt:

$$|\lambda x_n - \lambda x| = |\lambda| \cdot |x_n - x| < \epsilon \quad \text{für alle } n \geq N.$$

(iii) Weil  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert, gibt es ein  $\lambda > 0$  mit  $|x_n| \leq \lambda$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Also gibt es für alle  $\epsilon > 0$  zwei natürliche Zahlen  $N, M \in \mathbb{N}$ , so dass  $|x_n - x| < \frac{\epsilon}{2|y|+1}$  für  $n \geq N$  gilt und  $|y_n - y| < \frac{\epsilon}{2\lambda}$  für alle  $n \geq M$ . Dann gilt für alle  $n \geq \max\{N, M\}$

$$|x_n y_n - xy| = |x_n y_n - x_n y + x_n y - xy| \leq |x_n| \cdot |y_n - y| + |x_n - x| \cdot |y| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon|y|}{2|y|+1} < \epsilon.$$

(iv) Aufgrund der Voraussetzungen gibt es ein  $N \in \mathbb{N}$ , so dass  $|x_n - x| < \frac{|x|}{2}$  für alle  $n \geq N$  gilt. Aus  $|x| = |x - x_n + x_n| \leq |x - x_n| + |x_n|$  folgt dann

$$|x_n| \geq |x| - |x - x_n| > \frac{|x|}{2} \quad \text{und} \quad \frac{1}{|x_n|} < \frac{2}{|x|} \quad \text{für alle } n \geq N.$$

Dann gibt es für jedes  $\epsilon > 0$  ein  $M \in \mathbb{N}$ , so dass  $|x_n - x| < \frac{\epsilon|x|^2}{2}$  für alle  $n \geq M$  gilt. Dann gilt für alle  $n \geq \max\{N, M\}$  auch

$$\left| \frac{1}{x_n} - \frac{1}{x} \right| = \left| \frac{x - x_n}{x_n x} \right| = \frac{|x - x_n|}{|x_n| \cdot |x|} < \frac{\epsilon \cdot |x|^2}{2} \frac{2}{|x|} \frac{1}{|x|} = \epsilon$$

(v) folgt aus der Ungleichung  $||x_n| - |x|| \leq |x_n - x|$ .

(vi) Für alle  $\epsilon > 0$  gibt es zwei natürliche Zahlen  $N$  und  $M$ , so dass  $|x_n - x| < \frac{\epsilon}{2}$  für alle  $n \geq N$  gilt und  $|y_n - y| < \frac{\epsilon}{2}$  für alle  $n \geq M$ . Dann gilt für alle  $n \geq \max\{N, M\}$

$$x - y \leq (x - x_n) + (y_n - y) + (x_n - y_n) < \epsilon$$

Also ist  $x - y \leq \inf(0, \infty) = 0$ . Daraus folgt  $x \leq y$ .

(vii) Für alle  $\epsilon > 0$  gibt es zwei natürliche Zahlen  $N, M \in \mathbb{N}$ , so dass  $|x_n - x| < \epsilon$  für alle  $n \geq N$  gilt und  $|y_n - x| < \epsilon$  für alle  $n \geq M$ . Für alle  $n \geq \max\{N, M\}$  gilt dann

$$-\epsilon < x_n - x \leq z_n - x \leq y_n - x < \epsilon$$

Daraus folgt  $|z_n - x| < \epsilon$ .

**q.e.d.**

Offenbar gilt für alle  $n \in \mathbb{N}_0$

$$(1 + x + x^2 + \dots + x^n)(1 - x) = (1 + x + \dots + x^n) - (x + x^2 + \dots + x^{n+1}) = 1 - x^{n+1}$$

Also gilt  $1 + x + \dots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$  für  $x \neq 1$  und  $n \in \mathbb{N}_0$ .

Aus Satz 3.4 folgt, dass die Folge  $y_n = 1 + x + \dots + x^n$  für  $|x| < 1$  gegen  $\frac{1}{1-x}$  konvergiert.

**Satz 3.6.**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^n x^m = \frac{1}{1-x}$  für  $|x| < 1$ . **q.e.d.**

## 3.2 Konvergenzprinzipien

Wir stellen 3 Methoden vor, um zu entscheiden, ob eine Folge konvergiert oder nicht.

**Definition 3.7** (Monotonie). *Eine reelle Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  heißt:*

**monoton wachsend**, wenn  $a_{n+1} \geq a_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

**streng monoton wachsend**, wenn  $a_{n+1} > a_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

**monoton fallend**, wenn  $a_{n+1} \leq a_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

**streng monoton fallend**, wenn  $a_{n+1} < a_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

**Satz 3.8** (Monotonieprinzip). **(i)** *Eine monoton wachsende (fallende) beschränkte reelle Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist konvergent, und es gilt*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \quad \text{bzw.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

**(ii)** *Für eine monoton wachsende (fallende) unbeschränkte reelle Folge gilt*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \quad \text{bzw.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty.$$

**Beweis:** **(i)** Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine monoton wachsende (fallende) beschränkte reelle Folge. Dann existiert  $\sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  bzw.  $\inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ . Für alle  $\epsilon > 0$  gibt es  $N \in \mathbb{N}$  mit

$$\begin{aligned} \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} - \epsilon &< a_N \leq a_m \leq \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} && \text{für alle } m \geq N && \text{bzw.} \\ \inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} &\leq a_m \leq a_N < \inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} + \epsilon && \text{für alle } m \geq N. \end{aligned}$$

Daraus folgt  $|a_m - \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}| < \epsilon$  bzw.  $|a_m - \inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}| < \epsilon$ .

**(ii)** Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine monoton wachsende (fallende) unbeschränkte reelle Folge. Für jedes  $b \in \mathbb{R}$  gibt es  $N \in \mathbb{N}$  mit  $a_m \geq a_N > b$  bzw.  $a_m \leq a_N < b$  für alle  $m \geq N$ . **q.e.d.**

**Beispiel 3.9** (Existenz und Konstruktion der  $k$ -ten Wurzel). *Für alle  $a > 0$  und alle  $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$  definieren wir die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  rekursiv durch*

$$a_0 = 1 + \frac{a-1}{k} \quad a_{n+1} = a_n \left( 1 + \frac{a - a_n^k}{k \cdot a_n^k} \right) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

Für  $a = 1$  ist dann  $a_n = 1$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Für  $a \neq 1$  gilt für alle  $n \in \mathbb{N}$

$$0 < a_n < a_0, \quad a_n < a_{n-1} \quad \text{und} \quad a < a_n^k.$$

**Beweis** durch vollständige Induktion in  $n$ :

(i) Für  $a > 0$  und  $a \neq 1$  ist  $-1 < -\frac{1}{k} < \frac{a-1}{k} \neq 0$ . Wegen der Bernoulli Ungleichung gilt  $a_0^k = \left(1 + \frac{a-1}{k}\right)^k > 1 + a - 1 = a$ . Es folgt  $-1 < -\frac{1}{k} < \frac{a-a_0^k}{ka_0^k} < 0$ . Also gilt  $0 < a_1 < a_0$

und mit der Bernoulli Ungleichung  $a_1^k = a_0^k \left(1 + \frac{a-a_0^k}{ka_0^k}\right)^k > a_0^k \left(1 + k \frac{a-a_0^k}{ka_0^k}\right) = a$ .

(ii) Wir nehmen an es gilt  $0 < a_n < a_0$ ,  $a_n < a_{n-1}$  und  $a < a_n^k$  für ein  $n \in \mathbb{N}$ . Dann folgt  $-1 < -\frac{1}{k} < \frac{a-a_n^k}{ka_n^k} < 0$ . Daraus folgt  $0 < a_{n+1} < a_n < a_0$  und wegen der Bernoulli

Ungleichung:  $a_{n+1}^k = a_n^k \left(1 + \frac{a-a_n^k}{ka_n^k}\right)^k > a_n^k \left(1 + k \frac{a-a_n^k}{ka_n^k}\right) = a$ . **q.e.d.**

Die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist monoton fallend und beschränkt. Wegen dem Monotonieprinzip konvergiert sie gegen  $b \geq 0$ . Wir multiplizieren die Rekursionsgleichung mit  $ka_n^{k-1}$ :

$$a_{n+1} \cdot ka_n^{k-1} = ka_n^k + a - a_n^k.$$

Bilden wir links und rechts den Grenzwert  $n \rightarrow \infty$  so erhalten wir mit Satz 3.5

$$kb^k = (k-1)b^k + a \text{ oder auch } b^k = a.$$

Also existiert eine positive Zahl  $b$  mit  $b^k = a$ . Diese Folge konvergiert sehr schnell. Außerdem sind für rationale  $a$  alle Folgenglieder rational.

**Satz 3.10. (i)** Für jede positive Zahl  $a > 0$  und jede rationale Zahl  $r$  gibt es genau eine positive Zahl  $a^r$ . Für  $r=0$  setzen wir  $a^0 = 1$ .

(ii) Für jede positive rationale Zahl  $r > 0$  und  $0 < a < b$  gilt auch  $0 < a^r < b^r$ .

(iii) Für jede negative rationale Zahl  $r < 0$  und  $0 < a < b$  gilt auch  $0 < b^r < a^r$ .

**Beweis:** (i) Für  $r = \frac{p}{q}$  definieren wir  $a^r = \sqrt[q]{a^p}$ . Offenbar ist  $a^r$  eine positive Lösung der Gleichungen  $(a^r)^{qn} = (a^p)^n = a^{pn}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Wir zeigen, dass für  $a, b \in (0, \infty)$  und für  $n \in \mathbb{N}$  die Ungleichung  $a < b$  äquivalent ist zu  $a^n < b^n$ . Für  $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$  gilt

$$b^n - a^n = (b-a)(b^{n-1} + b^{n-2}a + \dots + ba^{n-2} + a^{n-1}).$$

Also folgt aus  $0 < a < b$  auch  $a^n < b^n$  und aus  $0 < b \leq a$  auch  $a^n \leq b^n$ . Also ist für  $a > 0$  und  $b > 0$  die Ungleichung  $a < b$  äquivalent zu der Ungleichung  $a^n < b^n$ . Also gibt es für alle  $n \in \mathbb{N}$  und alle  $r = \frac{p}{q} > 0$  genau eine positive Lösung  $a^r$  der Gleichung  $(a^r)^{qn} = a^{pn}$ . Für  $r < 0$  ist  $a^r = \frac{1}{a^{-r}}$  die entsprechende positive Zahl.

(ii) Sei  $r = \frac{p}{q} > 0$ . Dann ist für  $a, b \in (0, \infty)$  die Ungleichung  $a < b$  äquivalent zu  $a^p < b^p$  und das wiederum äquivalent zu  $a^{\frac{p}{q}} < b^{\frac{p}{q}}$ .

(iii) Sei  $r = \frac{-p}{q} < 0$ . Dann folgt (iii) aus (ii) wegen Satz 2.14 (vi). **q.e.d.**

**Definition 3.11** (Teilfolge). Eine Teilfolge einer Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist eine Folge  $(b_m)_{m \in \mathbb{N}}$  von der Form  $b_m = a_{n_m}$ , wobei  $0 < n_1 < n_2 < \dots$  eine streng monoton wachsende Folge von natürlichen Zahlen ist.

Z.B. hat die divergente Folge  $a_n = (-1)^n$  zwei konvergente Teilfolgen  $b_m = a_{2m} = 1$  und  $c_m = a_{2m+1} = -1$ .

**Satz 3.12** (monotone Teilfolgen). *Jede reelle Folge enthält eine monotone Teilfolge.*

**Beweis:** Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine reelle Folge und  $A$  die Menge  $A = \{n \in \mathbb{N} \mid a_n \geq a_m \forall m > n\}$ . Wenn  $A$  eine unendliche Menge ist, dann sei  $n_1 < n_2 < \dots$  eine Abzählung der Elemente von  $A$ . Die Teilfolge  $(b_m)_{m \in \mathbb{N}} = (a_{n_m})_{m \in \mathbb{N}}$  ist dann monoton fallend.

Wenn  $A$  eine endliche Menge ist besitzt sie ein Maximum  $N$ . Dann gibt es also zu jedem  $n > N$  ein  $m > n$ , so dass  $a_m > a_n$  ist. Also definieren wir induktiv eine Teilfolge  $(b_m)_{m \in \mathbb{N}}$ , so dass  $b_1 = a_{N+1}$  und für alle  $m \in \mathbb{N}$   $b_{m+1} > b_m$  gilt. Diese Folge ist streng monoton steigend. Also besitzt  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  entweder eine monoton fallende oder eine streng monoton steigende Teilfolge. Umgekehrt gilt auch, dass  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  entweder eine monoton steigende oder eine streng monoton fallende Teilfolge besitzt. **q.e.d.**

**Satz 3.13** (Auswahlprinzip von Bolzano–Weierstraß). *Jede beschränkte reelle Folge besitzt eine konvergente Teilfolge.*

**Beweis:** Wegen dem vorangehenden Satz besitzt jede Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine monotone Teilfolge  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Wenn die ursprüngliche Folge beschränkt ist, ist auch die Teilfolge beschränkt. Diese konvergiert dann wegen dem Monotonieprinzip. **q.e.d.**

**Korollar 3.14.** *Jede beschränkte komplexe Folge besitzt eine konvergente Teilfolge.*

**Beweis:** Wegen  $\max\{|x|, |y|\} \leq |x + iy|$  sind die reellen Folgen der Realteile und Imaginärteile einer komplexen beschränkten Folge beschränkt. Wegen dem Auswahlprinzip von Bolzano–Weierstraß besitzt die Folge der Realteile eine konvergente Teilfolge, und dann auch die entsprechende Teilfolge der Imaginärteile. Wegen Satz 3.3 (ii) konvergiert die der zweiten Teilfolge entsprechende komplexe Teilfolge. **q.e.d.**

**Definition 3.15** (Cauchyfolge). *Eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  heißt Cauchyfolge, wenn es für jedes  $\epsilon > 0$  ein  $N \in \mathbb{N}$  gibt, so dass  $|a_n - a_m| < \epsilon$  für alle  $n, m \geq N$  gilt.*

**Satz 3.16** (Kriterium von Cauchy). *Eine Zahlenfolge konvergiert genau dann, wenn sie eine Cauchyfolge ist.*

**Beweis:** Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine konvergente Folge. Dann gibt es für jedes  $\epsilon > 0$  ein  $N \in \mathbb{N}$ , so dass alle  $m \geq N$  die Ungleichung  $|a_m - \lim_{n \rightarrow \infty} a_n| < \frac{\epsilon}{2}$  erfüllen. Also gilt auch

$$|a_m - a_l| \leq |a_m - \lim_{n \rightarrow \infty} a_n| + |\lim_{n \rightarrow \infty} a_n - a_l| < \epsilon \quad \text{für alle } m, l \geq N.$$

Sei umgekehrt  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchyfolge. Dann gibt es ein  $N \in \mathbb{N}$ , so dass für alle  $m \geq N$  gilt  $|a_m - a_N| < 1$ , und damit auch  $|a_m| \leq |a_N| + |a_m - a_N| < |a_N| + 1$ . Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt dann aber  $|a_n| \leq \max\{|a_1|, \dots, |a_{N-1}|, |a_N| + 1\}$ . Deshalb ist die Folge  $a_n$  beschränkt und besitzt wegen dem Auswahlprinzip von Bolzano–Weierstraß eine

konvergente Teilfolge  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Sei  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ . Dann gibt es für jedes  $\epsilon > 0$  zwei natürliche Zahlen  $N, M \in \mathbb{N}$ , so dass alle  $n, m \geq N$  die Ungleichung  $|a_n - a_m| < \frac{\epsilon}{2}$  erfüllen und alle  $n \geq M$  die Ungleichung  $|b_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$ . Weil  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Teilfolge von  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist, folgt  $|a_n - a| \leq |a_n - b_n| + |b_n - a| < \epsilon$  für alle  $n \geq \max\{N, M\}$ . **q.e.d.**

**Satz 3.17.** *Für einen angeordneten archimedischen Körper ist folgendes äquivalent:*

**Vollständigkeitsaxiom A5.**

(i) **aus dem Monotonieprinzip.**

**Auswahlprinzip von Bolzano–Weierstraß.**

**Jede Cauchyfolge konvergiert.**

**Intervallschachtelungsprinzip.**

**Beweis\*:** Wegen der Beweise des Monotonieprinzips, des Auswahlprinzips von Bolzano–Weierstraß und des Kriteriums von Cauchy und wegen Satz 2.51 genügt es zu zeigen, dass aus dem Kriterium von Cauchy das Vollständigkeitsaxiom **A5** folgt.

Sei  $M$  eine nicht leere nach oben beschränkte Menge. Sei  $a_1 \in M$  und  $b_1 > a_1$  eine obere Schranke von  $M$ . Wir konstruieren wie im Beweis von Satz 2.51 eine Folge  $a_1 \leq a_2 \dots$  in  $M$  und eine Folge  $b_1 \geq b_2 \geq \dots$  von oberen Schranken von  $M$  mit

$$0 \leq \max\{b_{n+1} - b_{n+m}, a_{n+m} - a_{n+1}\} \leq b_{n+1} - a_{n+1} \leq 2^{-n}(b_1 - a_1) \text{ für alle } m \in \mathbb{N}.$$

Dann sind  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  Cauchyfolgen und konvergieren gegen den gleichen Grenzwert  $s$ . Für alle  $x \in M$  gilt  $x \leq b_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Aus Satz 3.5 (vi) folgt  $x \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = s$ . Also ist  $s$  eine obere Schranke von  $M$ . Für alle  $x < s = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  gibt es ein  $a_n > x$ . Deshalb ist  $s$  das Minimum der oberen Schranken von  $M$ . **q.e.d.**

Insbesondere sind die reellen Zahlen auch als der angeordnete archimedische Körper charakterisiert, in dem jede Cauchyfolge konvergiert. Wir werden die reellen Zahlen später auch als Äquivalenzklasse von Cauchyfolgen von rationalen Zahlen auffassen, wobei zwei Cauchyfolgen äquivalent heißen, wenn ihre Differenz eine Nullfolge ist.

### 3.3 Häufungspunkte

**Definition 3.18** (Häufungspunkt). *Die Grenzwerte von konvergenten Teilfolgen heißen Häufungspunkte. Bei reellen Folgen sind in  $\mathbb{R}$  zusätzlich  $+\infty$  bzw.  $-\infty$  Häufungspunkte, wenn es Teilfolgen mit diesen Grenzwerten in  $\overline{\mathbb{R}}$  gibt.*

**Satz 3.19** (Limes superior und Limes inferior). *Ist die Menge der reellen Häufungspunkte einer reellen Folge nicht leer und nach oben (unten) in  $\mathbb{R}$  beschränkt, so besitzt sie ein Maximum (Minimum) in  $\mathbb{R}$ .*

**Beweis:** Sei die Menge der Häufungspunkte der reellen Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathbb{R}$  nach oben beschränkt. Sei  $a \in \mathbb{R}$  das Supremum der Häufungspunkte, und  $b_m$  für jedes  $m \in \mathbb{N}$  ein Häufungspunkt  $b_m \in (a - \frac{1}{2m}, a]$ . Wir definieren induktiv eine Teilfolge  $(c_m)_{m \in \mathbb{N}}$  von  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $|c_m - b_m| < \frac{1}{2m}$  für alle  $m \in \mathbb{N}$ . Für alle  $m \in \mathbb{N}$  gilt  $|c_m - a| \leq |c_m - b_m| + |b_m - a| < \frac{1}{m}$ . Also ist  $a$  ein Häufungspunkt von  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und damit das Maximum der Häufungspunkte. Der Beweis für das Minimum ist analog. **q.e.d.**

**Definition 3.20.** Für eine nach oben (unten) beschränkte reelle Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  heißt das Supremum (bzw. Infimum) der Häufungspunkte Limes superior bzw. inferior. Wir bezeichnen es mit  $\overline{\lim} a_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$  bzw.  $\underline{\lim} a_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$ . Wenn  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  nicht nach oben (unten) beschränkt ist, dann sei  $\overline{\lim} a_n = \infty$  bzw.  $\underline{\lim} a_n = -\infty$ .

**Satz 3.21. (i)**  $\bar{a}$  ist genau dann der Limes superior einer nach oben beschränkten reellen Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , wenn für alle  $\epsilon > 0$  unendlich viele Elemente der Folge  $a_n > \bar{a} - \epsilon$  erfüllen, aber höchstens endlich viele  $a_n > \bar{a} + \epsilon$ .

**(ii)**  $\underline{a}$  ist genau dann der Limes inferior einer nach unten beschränkten reellen Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , wenn für alle  $\epsilon > 0$  unendlich viele Elemente  $a_n < \underline{a} + \epsilon$  erfüllen, aber höchstens endlich viele  $a_n < \underline{a} - \epsilon$ .

**Beweis:** Wir beweisen wieder nur (i), weil (ii) analog zu beweisen ist. Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine nach oben beschränkte reelle Folge. Wegen dem Auswahlprinzip von Bolzano–Weierstraß ist jede untere Schranke einer Teilfolge von  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  auch eine untere Schranke von mindestens einem Häufungspunkt. Aus der Charakterisierung der Zahl  $\bar{a}$  in (i) folgt also, dass  $\bar{a} - 2\epsilon$  keine obere Schranke, aber  $\bar{a} + \epsilon$  eine obere Schranke der Häufungspunkte von  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist. Umgekehrt folgt sie daraus, dass  $\bar{a} - \epsilon$  keine obere Schranke, aber  $\bar{a}$  eine obere Schranke der Häufungspunkte ist. Damit ist ihre Gültigkeit für alle  $\epsilon > 0$  äquivalent dazu, dass  $\bar{a}$  das Supremum der Häufungspunkte ist. **q.e.d.**

**Korollar 3.22.** Eine reelle Folge konvergiert genau dann, wenn sie beschränkt ist und wenn  $\overline{\lim} a_n = \underline{\lim} a_n$  gilt, sie also nur einen Häufungspunkt hat.

Weil  $\overline{\lim} a_n$  und  $\underline{\lim} a_n$  das Maximum und das Minimum der Häufungspunkte sind, ist  $\overline{\lim} a_n = \underline{\lim} a_n$  äquivalent zu der Bedingung, dass es nur einen Häufungspunkt gibt.

**Beweis:** Wenn  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  beschränkt ist und  $\overline{\lim} a_n = \underline{\lim} a_n = a$  gilt, dann folgt aus dem vorangehenden Satz, dass es für jedes  $\epsilon > 0$  ein  $N$  gibt, so dass  $\underline{\lim} a_n - \epsilon \leq a_n \leq \overline{\lim} a_n + \epsilon$  für alle  $n \geq N$  gilt. Also gilt  $|a_n - a| \leq \epsilon$  und  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert gegen  $a$ .

Wenn  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert, dann konvergiert jede Teilfolge gegen  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ . Also besitzt  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  nur einen Häufungspunkt und es gilt  $\overline{\lim} a_n = \underline{\lim} a_n = a$ . **q.e.d.**

**Korollar 3.23.** Seien  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  nach unten (bzw. oben) beschränkte reelle Folgen, die für alle  $n \in \mathbb{N}$   $a_n \leq b_n$  erfüllen. Dann gilt  $\underline{\lim} a_n \leq \underline{\lim} b_n$  bzw.  $\overline{\lim} a_n \leq \overline{\lim} b_n$ .

**Beweis:** Sei  $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Teilfolge von  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , die gegen  $\underline{\lim} b_n$  (bzw.  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Teilfolge von  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  die gegen  $\overline{\lim} a_n$ ) konvergiert. Dann gibt es eine Teilfolge  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  (bzw.  $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ), die für alle  $n \in \mathbb{N}$  auch  $c_n \leq d_n$  erfüllt. Diese Teilfolge ist beschränkt und besitzt eine konvergente Teilfolge. Wir können also ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  (bzw.  $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ) konvergiert. Dann ist aber  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n$  ein Häufungspunkt von  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  (bzw.  $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n$  ein Häufungspunkt von  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ). Also gilt

$$\underline{\lim} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} c_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} d_n = \underline{\lim} b_n$$

(bzw.  $\overline{\lim} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} d_n \leq \overline{\lim} b_n$ ). **q.e.d.**

### 3.4 Beispiele

(i) Für alle  $x \in \mathbb{C}$  ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0$ .

**Beweis:** Wegen dem Satz von Archimedes–Eudoxos gibt es ein  $N \in \mathbb{N}$  mit  $|x| < N$ . Dann gilt für alle  $n \geq N$

$$\left| \frac{x^n}{n!} \right| = \frac{|x|^{N-1}}{(N-1)!} \cdot \frac{|x|^{n+1-N}}{N \cdots n} \leq \frac{|x|^{N-1}}{(N-1)!} \left( \frac{|x|}{N} \right)^{n-N} \cdot \frac{|x|}{n} < \frac{|x|^N}{(N-1)!} \cdot \frac{1}{n}$$

Weil aber  $\frac{1}{n}$  eine Nullfolge ist, konvergiert dann  $\left| \frac{x^n}{n!} \right|$  auch gegen Null. **q.e.d.**

(ii) Für alle positiven rationalen Zahlen  $r > 0$  gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^r} = 0$ .

**Beweis:** Nach dem Satz von Archimedes–Eudoxos, gibt es für alle  $\epsilon > 0$  ein  $N \in \mathbb{N}$  mit  $N > \frac{1}{\epsilon^{\frac{1}{r}}}$ . Für alle  $n \geq N$  folgt  $\frac{1}{n^r} \leq \frac{1}{N^r} < \epsilon$ . Also konvergiert  $\frac{1}{n^r}$  nach Null. **q.e.d.**

(iii) Für alle  $x \in (0, \infty)$  gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x} = 1$ .

**Beweis:** Sei zunächst  $x \geq 1$ . Sei also  $y_n = \sqrt[n]{x} - 1 \geq 0$ . Wegen der Bernoulli Ungleichung gilt dann  $x = (1 + y_n)^n \geq 1 + ny_n$ . Daraus folgt  $0 \leq y_n \leq \frac{x-1}{n}$ . Dann konvergiert  $y_n$  aber gegen Null.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x} = 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 1$ .

Sei jetzt  $0 < x < 1$ . Dann ist  $\frac{1}{x} > 1$ . Also gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{x}}} = 1$ . **q.e.d.**

**Binomische Formel 3.24.** Für alle  $n \in \mathbb{N}$  und alle Zahlen  $x, y \in \mathbb{K}$  gilt

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}, \text{ wobei } \binom{n}{k} = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} \text{ und } 0! = 1 = \binom{n}{0}.$$

**Beweis:** durch vollständige Induktion:

(i) Offenbar ist  $\binom{1}{0} = \binom{1}{1} = 1$ , und die binomische Formel ist für  $n = 1$  richtig.

(ii) Wenn die binomische Formel für  $n \in \mathbb{N}$  gilt, dann folgt

$$\begin{aligned}
 (x+y)^{n+1} &= (x+y)(x+y)^n = (x+y) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \\
 &= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} x^k y^{n+1-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n+1-k} \\
 &= \sum_{k=0}^{n+1} \left( k \frac{n(n-1) \cdots (n-k+2)}{k!} + \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} \right) x^k y^{n+1-k} \\
 &= \sum_{k=0}^{n+1} \left( \frac{(n+1)n \cdots (n-k+2)}{k!} \right) x^k y^{n+1-k}.
 \end{aligned}$$

Also gilt sie auch für  $n+1$ .

**q.e.d.**

(iv)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ .

**Beweis:** Sei  $y_n = \sqrt[n]{n} - 1 \geq 0$ . Wegen der binomischen Formel gilt für alle  $n \in \mathbb{N}$

$$n = (\sqrt[n]{n})^n = (1 + y_n)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} y_n^k$$

Für alle  $n \geq 2$  folgt  $n \geq 1 + \frac{n(n-1)}{2} y_n^2 \iff y_n^2 \leq \frac{2}{n} \iff y_n \leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}$ .

Wegen (ii) ist dann  $y_n$  eine Nullfolge.

**q.e.d.**

(v)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$ .

**Beweis:** Wegen (i) gibt es für alle  $x \in (0, \infty)$  ein  $N$ , so dass für alle  $n \geq N$  gilt  $\frac{x^n}{n!} < 1$ . Dann gilt auch  $\frac{x}{\sqrt[n]{n!}} < 1 \iff x < \sqrt[n]{n!}$ . Also folgt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$ . **q.e.d.**

**Satz 3.25.** Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine reelle positive Folge, dann gilt

$$\underline{\lim} \left( \frac{a_{n+1}}{a_n} \right) \leq \underline{\lim} \sqrt[n]{a_n} \qquad \overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} \leq \overline{\lim} \left( \frac{a_{n+1}}{a_n} \right).$$

Wenn die Folge  $\sqrt[n]{a_n}$  also einen reellen Häufungspunkt hat, dann hat auch die Folge  $\frac{a_{n+1}}{a_n}$  einen reellen Häufungspunkt. Und wenn gilt  $\overline{\lim} \left( \frac{a_{n+1}}{a_n} \right) < \infty$  dann auch  $\overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} < \infty$ .

**Beweis:** Wenn  $\underline{\lim} \left( \frac{a_{n+1}}{a_n} \right) = 0$  ist, ist die erste Aussage richtig. Für  $\underline{\lim} \left( \frac{a_{n+1}}{a_n} \right) > 0$  gibt es wegen Satz 3.21 (ii) ein  $a > 0$ , und für alle  $0 < \epsilon < a$  ein  $N \in \mathbb{N}$  gibt, so dass alle  $n \geq N$  auch  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq a - \epsilon$  erfüllen. Dann gilt für alle  $n > N$

$$\frac{a_n}{a_N} = \frac{a_{N+1}}{a_N} \cdots \frac{a_n}{a_{n-1}} \geq (a - \epsilon)^{n-N} \implies a_n \geq a_N \frac{(a - \epsilon)^n}{(a - \epsilon)^N} \implies \sqrt[n]{a_n} \geq \sqrt[n]{\frac{a_N}{(a - \epsilon)^N}} \cdot (a - \epsilon).$$

Wegen (iii) und Korollar 3.23 gilt dann  $\underline{\lim} \sqrt[n]{a_n} \geq (a - \epsilon)$ . Weil dies für alle  $\epsilon > 0$  gilt, folgt auch  $\underline{\lim} \sqrt[n]{a_n} \geq a$ . Also ist  $\underline{\lim} \sqrt[n]{a_n} \geq a$  nicht kleiner als der kleinste Häufungspunkt von  $(\frac{a_{n+1}}{a_n})_{n \in \mathbb{N}}$ . Und für  $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \infty$  gilt auch  $\lim \sqrt[n]{a_n} = \infty$ .

Für die Folge  $(a_n^{-1})_{n \in \mathbb{N}}$  gilt entsprechend  $\underline{\lim} \frac{a_n}{a_{n+1}} \leq \underline{\lim} \sqrt[n]{a_n^{-1}} = \underline{\lim} (\sqrt[n]{a_n})^{-1}$ . Wegen Satz 2.14 (vi) und Satz 3.5 (iv) ist für eine positive Folge  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$   $\underline{\lim} b_n^{-1} = (\overline{\lim} b_n)^{-1}$  (mit  $\frac{1}{\infty} = 0$  und  $\frac{1}{0} = \infty$ ). Also folgt die zweite Ungleichung aus Satz 2.14 (vi). **q.e.d.**

(vi)  $\left( \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \right)_{n \in \mathbb{N}}$  ist streng monoton wachsend und durch 3 beschränkt: Für  $n > 2$  gilt

$$\frac{5}{2} < \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \leq 2 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)} = 2 + \sum_{k=2}^n \left( \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = 2 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} = 2 + 1 - \frac{1}{n}.$$

Also konvergiert diese Folge. Der Grenzwert heißt Eulersche Zahl  $e \in (\frac{5}{2}, 3]$ .

(vii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n = e$ .

**Beweis:** Wegen der binomischen Formel gilt für alle  $n \in \mathbb{N}$

$$\left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^n \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{n^k} \cdot \frac{1}{k!} \leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \leq e.$$

Für alle  $k \in \mathbb{N}$  gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{n^k} \cdot \frac{1}{k!} = \frac{1}{k!}$ .

Also gilt für alle  $m \in \mathbb{N}$   $\underline{\lim} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n \geq \sum_{k=0}^m \lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!}$ .

Wegen  $\sup \{ \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} \mid m \in \mathbb{N} \} = e$  folgt  $e \leq \underline{\lim} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n \leq \overline{\lim} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n \leq e$ . **q.e.d.**

(viii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$ .

**Beweis:** Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  die positive Folge  $\frac{n^n}{n!}$ . Dann gilt  $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)n^n} = \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n$ . Wegen (vii) folgt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = e$  Dann folgt aus Satz 3.25

$$e = \underline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \underline{\lim} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} \leq \overline{\lim} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} \leq \overline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} = e.$$

Daraus folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e.$$

**q.e.d.**

# Kapitel 4

## Reihen

### 4.1 Konvergenzkriterien

**Definition 4.1.** Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge. Dann heißt die Folge  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $s_n = \sum_{j=1}^n a_j$  die zu  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gehörende Reihe. Diese Folge bezeichnen wir mit  $(\sum a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

Wenn die Reihe  $(\sum a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert, dann bezeichnen wir den Grenzwert mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n a_j = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ . Analog definieren wir  $\sum_{n=m}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=m}^n a_j$ .

**Beispiel 4.2. (i)** Geometrische Reihe  $(\sum q^n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ . Für  $q \neq 1$  hatten wir berechnet:

$\sum_{j=0}^n q^j = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ . Dann folgt aus dem letzten Abschnitt

Für  $|q| < 1$  ist  $(\sum_{n \in \mathbb{N}_0} q^n)$  konvergent:  $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ .

Für  $|q| \geq 1$  ist  $(\sum_{n \in \mathbb{N}_0} q^n)$  divergent.

Für reelles  $q \geq 1$  ist  $(\sum_{n \in \mathbb{N}_0} q^n)$  divergent:  $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \infty$ .

**(ii)** Die  $\zeta$ -Funktion ist definiert als  $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$  der Grenzwert (wenn er existiert) der Reihe  $(\sum \frac{1}{n^s})_{n \in \mathbb{N}}$ . Zunächst ist diese Reihe nur für alle rationalen Zahlen  $s \in \mathbb{Q}$  definiert. Für  $s = 1$  ist  $(\sum \frac{1}{n^s})_{n \in \mathbb{N}}$  divergent.

**Beweis:** Diese Reihe ist monoton wachsend. Also ist nur die Frage, ob sie beschränkt ist oder nicht. Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt aber  $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} \geq \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$ . Also

sind für alle  $n \in \mathbb{N}_0$  jeweils die Summen  $\sum_{j=1}^{2^n} \frac{1}{j} = 1 + \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{j=2^{m+1}}^{2^{m+1}} \frac{1}{j} \geq 1 + \frac{n}{2}$ . **q.e.d.**

(iii) Für  $k \in \mathbb{N}$  konvergiert die Reihe  $\left(\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n(n+1)\cdots(n+k)}\right)$  gegen  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)\cdots(n+k)} = \frac{1}{k \cdot k!}$ .

**Beweis:**

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^m \frac{1}{n(n+1)\cdots(n+k)} &= \sum_{n=1}^m \frac{1}{k} \frac{n+k-n}{n(n+1)\cdots(n+k)} \\ &= \frac{1}{k} \left( \sum_{n=1}^m \frac{1}{n \cdots (n+k-1)} - \sum_{n=2}^{m+1} \frac{1}{n \cdots (n+k-1)} \right) = \frac{1}{k} \left( \frac{1}{k!} - \frac{1}{(m+1)\cdots(m+k)} \right) \end{aligned}$$

Die Folge  $\frac{1}{(m+1)\cdots(m+k)} < \frac{1}{m^k}$  konvergiert aber gegen Null. **q.e.d.**

Wir wenden das Cauchy Kriterium und das Monotonieprinzip auf Reihen an.

**Satz 4.3** (Cauchy Kriterium für Reihen). *Die Reihe  $(\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n)$  konvergiert genau dann, wenn es für jedes  $\epsilon > 0$  ein  $N$  gibt, so dass  $|\sum_{j=n}^m a_j| < \epsilon$  für alle  $m \geq n > N$  gilt. Insbesondere ist  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Nullfolge, wenn die Reihe  $(\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n)$  konvergiert. **q.e.d.***

**Satz 4.4** (Monotonieprinzip für Reihen). *Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge von nicht negativen reellen Zahlen. Dann konvergiert die Reihe  $(\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n)$  genau dann, wenn sie beschränkt ist. Für den Grenzwert gilt dann  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sup\{\sum_{n=1}^m a_n \mid m \in \mathbb{N}\}$ . **q.e.d.***

**Definition 4.5** (absolut konvergent). *Die Reihe  $(\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n)$  heißt absolut konvergent, wenn die Reihe  $(\sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|)$  konvergiert.*

**Satz 4.6.** *Jede absolut konvergente Reihe konvergiert. Und es gilt  $\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ .*

**Beweis:** Aus der Dreiecksungleichung folgt  $|\sum_{j=n}^m a_j| \leq \sum_{j=n}^m |a_j|$  für alle  $m \geq n$ . Also ist die Reihe einer absolut konvergenten Reihe eine Cauchyfolge und konvergiert. Insbesondere gilt für alle  $m \in \mathbb{N}$  auch  $|\sum_{n=1}^m a_n| \leq \sum_{n=1}^m |a_n|$ . Dann erfüllen auch die Grenzwerte  $|\sum_{n=1}^{\infty} a_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ . **q.e.d.**

Aus dem Monotonieprinzip und Satz 3.5 folgt das

**Satz 4.7** (Majoranten Kriterium). *Die Folgen von nicht negativen reellen Zahlen  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  erfüllen  $b_n \leq a_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .*

(i) *Wenn außerdem  $(\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n)$  konvergiert, dann konvergiert auch  $(\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n)$*

(ii) *Wenn außerdem  $(\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n)$  divergiert, dann gilt  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ . **q.e.d.***

**Beispiel 4.8.** Für alle  $n, k \in \mathbb{N}$  ist  $\frac{1}{(n+k)^{k+1}} \leq \frac{1}{n \cdots (n+k)}$ . Also folgt aus der Konvergenz von  $(\sum \frac{1}{n \cdots (n+k)})$  auch die Konvergenz von  $(\sum \frac{1}{n^{k+1}})_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Satz 4.9** (Wurzeltest). Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge und sei  $\alpha = \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}$ , wenn  $(|a_n|)_{n \in \mathbb{N}}$  nach oben beschränkt ist und ansonsten  $\alpha = \infty$ .

(i) Falls  $\alpha < 1$ , dann konvergiert  $(\sum a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  absolut.

(ii) Falls  $\alpha > 1$ , dann divergieren  $(\sum a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(\sum |a_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ .

Im Fall  $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$  kann die Reihe  $(\sum a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sowohl konvergent als auch divergent sein. So ist z.B.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}}$ . Aber die Reihe  $(\sum \frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$  ist divergent, während die Reihe  $(\sum \frac{1}{n^2})_{n \in \mathbb{N}}$  konvergent ist.

**Beweis:** (i) Sei  $\alpha < 1$ . Dann gibt es für jedes  $\alpha < \beta < 1$  aufgrund von Satz 3.21 (i) ein  $N \in \mathbb{N}$ , so dass für alle  $n \geq N$  gilt  $\sqrt[n]{|a_n|} \leq \beta \iff |a_n| \leq \beta^n$ . Weil aber  $(\sum \beta^n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert, ist auch  $(\sum a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  absolut konvergent.

(ii) Sei  $\alpha > 1$ . Dann gibt es wieder aufgrund von Satz 3.21 (i) unendlich viele  $\sqrt[n]{|a_n|} > 1$ . Also kann die Folge  $(|a_n|)_{n \in \mathbb{N}}$  nicht gegen Null konvergieren. Dann sind Reihen  $(\sum a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(\sum |a_n|)_{n \in \mathbb{N}}$  keine Cauchyfolgen, also divergent. **q.e.d.**

**Satz 4.10** (Exponentialfunktion). Für alle  $x \in \mathbb{K}$  definieren wir

$$\exp(x) : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}, \quad x \mapsto \exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Aufgrund des Beispiels (v) im letzten Kapitel ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$ . Für  $\epsilon > 0$  gibt es also

$$N \in \mathbb{N} \quad \text{mit} \quad \sqrt[n]{n!} > \frac{|x| + 1}{\epsilon} \quad \text{für} \quad n \geq N \quad \implies \quad \sqrt[n]{\frac{|x^n|}{n!}} = \frac{|x|}{\sqrt[n]{n!}} < \frac{|x|\epsilon}{|x| + 1} < \epsilon.$$

Deshalb ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{|x|^n}{n!}} = 0$  und die Reihe  $(\sum \frac{x^n}{n!})_{n \in \mathbb{N}_0}$  konvergiert absolut.

**Satz 4.11** (Quotiententest). Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $\mathbb{K} \setminus \{0\}$ .

(i) Falls  $\overline{\lim} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| < 1$ , dann konvergiert  $(\sum a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  absolut.

(ii) Falls es ein  $N \in \mathbb{N}$  gibt, so dass  $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \geq 1$  alle  $n \geq N$  erfüllen (das folgt wegen Satz 3.21 (ii) aus  $\underline{\lim} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| > 1$ ), dann divergieren  $(\sum a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(\sum |a_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Beweis:** (i) Wegen  $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \overline{\lim} |\frac{a_{n+1}}{a_n}|$  (Satz 3.25) folgt (i) aus dem Wurzeltest.

(ii) Aus  $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \geq 1$  folgt  $|a_{n+1}| = |\frac{a_{n+1}}{a_n}| \cdot |a_n| \geq |a_n|$ . Also ist  $(|a_n|)_{n \in \mathbb{N}}$  keine Nullfolge und, die Reihen  $(\sum a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(\sum |a_n|)_{n \in \mathbb{N}}$  sind divergent. **q.e.d.**

**Beispiel 4.12.** Für  $\overline{\lim} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \geq 1$  und  $\underline{\lim} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq 1$  kann die Reihe konvergieren und divergieren: Die Reihe zu  $a_n = n^{-(l+(-1)^n)}$  für  $n \in \mathbb{N}$  divergiert für  $l = 2$  und konvergiert für  $l = 3$  und hat in beiden Fällen  $\overline{\lim} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \infty$  und  $\underline{\lim} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 0$ .

**Satz 4.13** (Cauchy's Verdichtungssatz). Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine nicht negative monoton fallende Folge. Dann konvergiert  $(\sum a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  genau dann, wenn  $(\sum 2^n a_{2^n})_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert.

**Beweis:** Für alle  $n \in \mathbb{N}$  sei  $s_n = \sum_{j=1}^n a_j$  und  $t_n = \sum_{j=0}^n 2^j a_{2^j}$ . Wegen der Monotonie von  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gilt für alle  $j \in \mathbb{N}$ :

$$a_{2^j} + a_{2^j+1} + \dots + a_{2^{j+1}-1} \leq 2^j a_{2^j} \leq 2(a_{2^{j-1}+1} + a_{2^{j-1}+2} + \dots + a_{2^j})$$

und für  $j = 0$  gilt:  $a_1 \leq a_1 \leq 2a_1$ . Deshalb gilt für alle  $n \in \mathbb{N}$

$$0 \leq s_{2^{n+1}-1} \leq t_n \leq 2s_{2^n}.$$

Also ist die Beschränktheit von der Folge  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  äquivalent zu der von  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . **q.e.d.**

Die Reihe  $(\sum \frac{1}{n^s})_{n \in \mathbb{N}}$  ist für  $s \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$  genau dann konvergent, wenn die Reihe

$$\left( \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \frac{2^n}{(2^n)^s} \right)_{n \in \mathbb{N}_0} = \left( \sum_{n \in \mathbb{N}_0} 2^{(1-s) \cdot n} \right)_{n \in \mathbb{N}_0}$$

konvergent ist, also für  $s > 1$ .  $\implies$  Für alle  $s \in \mathbb{Q}$  mit  $s > 1$  ist  $\zeta(s)$  wohl definiert.

**Satz 4.14** (Alternierende Reihe von Leibniz). Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  eine monoton fallende reelle Nullfolge. Dann konvergiert  $(\sum (-1)^n a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$

**Beweis:** Wegen dem Monotonieprinzip sind die Glieder einer monoton fallenden Nullfolge nicht negativ. Sei  $s_n = \sum_{m=0}^n (-1)^m a_m$  für alle  $n \in \mathbb{N}_0$ . Aus der Monotonie folgt:

$$s_1 \leq s_3 \leq \dots \leq s_{2n+1} \leq \dots \leq s_{2n} \leq \dots \leq s_2 \leq s_0.$$

Also ist die Folge  $(s_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}_0}$  monoton wachsend und beschränkt und  $(s_{2n})_{n \in \mathbb{N}_0}$  monoton fallend und beschränkt. Dann konvergieren aber beide Folgen und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n} - \lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n+1} = - \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{2n+1} a_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} = 0$$

Also konvergiert die Reihe  $(\sum (-1)^n a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . **q.e.d.**

Also ist  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$  konvergent, aber nicht absolut konvergent, weil  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$ .

## 4.2 Dezimalbruchdarstellung von reellen Zahlen

Als Ziffern wählen wir  $Z = \{0, 1, \dots, 9\}$  (bzw.  $\{0, 1, \dots, p-1\}$  mit  $p \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ ). Für jede Folge  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit Werten in  $Z$  definieren wir die Zahlenfolge  $(\sum x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $x_n = \frac{z_n}{p^n}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Dann ist  $(\sum x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  wegen dem Majorantenkriterium und wegen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p-1}{p^n} = \frac{p-1}{p} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{p^n} = \frac{p-1}{p} \frac{1}{1-\frac{1}{p}} = 1$$

absolut konvergent. Also definiert  $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$  eine reelle Zahl in  $[0, 1]$ . Sei jetzt  $M$  die Menge aller Folgen  $M = \{(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid (z_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ konvergiert nicht gegen } p-1\}$ . Wir zeigen jetzt, dass die Abbildung  $M \rightarrow [0, 1), (z_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_n}{p^n}$  surjektiv und injektiv ist

**Bemerkung 4.15.** *Wir können auch fordern, dass  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  nicht gegen Null konvergiert. Reelle Zahlen, deren Ziffernfolge gegen 0 konvergiert, haben auch eine Dezimalbruchdarstellung, deren Ziffernfolge gegen 9 konvergiert, z.B.  $\frac{1}{2} = 0,500\dots = 0,499\dots$*

**Surjektiv:** Sei  $x \in [0, 1)$ . Wir definieren  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  induktiv, so dass für jedes  $n \in \mathbb{N}$

$$0 \leq \frac{z_n}{p^n} \leq x - \sum_{m=1}^{n-1} \frac{z_m}{p^m} < \frac{z_n + 1}{p^n} \leq \frac{1}{p^{n-1}} \Leftrightarrow x \in \left[ \frac{z_n}{p^n} + \sum_{m=1}^{n-1} \frac{z_m}{p^m}, \frac{z_n + 1}{p^n} + \sum_{m=1}^{n-1} \frac{z_m}{p^m} \right)$$

gilt. Es folgt  $0 \leq x - \sum_{m=1}^n \frac{z_m}{p^m} < \frac{1}{p^n}$  und  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_n}{p^n} = x$ . Weil für alle  $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{p-1}{p^m} = \frac{p-1}{p^{n+1}} \frac{1}{1-\frac{1}{p}} = \frac{1}{p^n} \text{ gilt, konvergiert } (z_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ nicht gegen } p-1.$$

**Injektiv:** Seien  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  Ziffernfolgen, mit  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_n}{p^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w_n}{p^n}$ . Sei  $n \in \mathbb{N}$  der kleinste Index mit  $z_n \neq w_n$ , also  $\sum_{m=n}^{\infty} \frac{z_m - w_m}{p^m} = 0$  und o.B.d.A.  $z_n > w_n$ .

$$\Rightarrow \frac{z_n - w_n}{p^n} = \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{w_m - z_m}{p^m} \leq \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{p-1}{p^m} = \frac{p-1}{p^{n+1}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{p^m} = \frac{p-1}{p^{n+1}} \frac{1}{1-\frac{1}{p}} = \frac{1}{p^n}.$$

Also ist  $z_n - w_n \leq 1$  und damit  $z_n = w_n + 1$ . Für alle  $m > n$  gilt dann  $w_m - z_m = p-1 \Rightarrow z_m = 0$  und  $w_m = p-1 \Rightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} w_m = p-1$  und  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}} \notin M$ . **q.e.d.**

**Übungsaufgabe 4.16.** *Wir ordnen den Teilmengen  $A \subset \mathbb{N}$  die Folgen mit Werten in  $\{0, 1\}$  zu, die nur auf den Elementen von  $A$  1 sind. Zeige mithilfe der bijektiven Abbildung  $M \simeq [0, 1)$  für  $p = 2$ , dass die Potenzmenge von  $\mathbb{N}$  gleichmächtig zu  $(0, 1)$  und zu  $\mathbb{R}$  ist (Tipp: Zeige zuerst mit Satz 2.40, dass  $(0, 1)$  gleichmächtig ist zu  $(0, 1) \cup \mathbb{N}_0$ ).*

### 4.3 Addition, Multiplikation, Umordnung

Aus dem Satz 3.5 folgt

**Satz 4.17** (Rechenregeln für Reihen). *Die Reihen  $(\sum a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(\sum b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  seien konvergent, dann konvergieren auch die Reihen*

$$\left(\sum (a_n + b_n)\right)_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{und} \quad \left(\sum \lambda a_n\right)_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{für alle } \lambda \in \mathbb{K}. \quad \text{q.e.d.}$$

**Definition 4.18.** *Für gegebene Reihen  $(\sum a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  und  $(\sum b_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  heißt die Reihe  $(\sum c_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  mit  $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$  für  $n \in \mathbb{N}_0$  das (Cauchy-)Produkt der beiden Reihen.*

Diese Definition stammt aus der Theorie der Potenzreihen. Das Produkt der beiden Potenzreihen  $(\sum a_n x^n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  und  $(\sum b_n x^n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  ist die Potenzreihe  $(\sum c_n x^n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ , d.h. wir haben alle Summanden des Produktes mit gleichen Potenzen zusammengefasst.

**Satz 4.19** (Konvergenz des Produktes). *Wenn die Reihe  $(\sum a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  absolut konvergiert und die Reihe  $(\sum b_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  konvergiert, dann konvergiert das Produkt  $(\sum c_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  der beiden Reihen. Wenn auch  $(\sum b_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  absolut konvergiert, dann auch  $(\sum c_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ .*

**Beweis:** Mit  $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$ ,  $A_n = \sum_{k=0}^n a_k$ ,  $B_n = \sum_{k=0}^n b_k$  und  $C_n = \sum_{k=0}^n c_k$  für  $n \in \mathbb{N}_0$  gilt

$$\begin{aligned} C_n &= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + \dots + (a_0 b_n + \dots + a_n b_0) \\ &= a_0 B_n + a_1 B_{n-1} + \dots + a_n B_0 \\ &= a_0 (B - \beta_n) + a_1 (B - \beta_{n-1}) + \dots + a_n (B - \beta_0) \end{aligned}$$

Hierbei ist  $B = \lim_{n \rightarrow \infty} B_n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n$  und  $\beta_n = B - B_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k$ . Daraus ergibt sich

$$C_n = A_n \cdot B - (a_0 \beta_n + a_1 \beta_{n-1} + \dots + a_n \beta_0).$$

Also gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n B$ , wenn  $a_0 \beta_n + \dots + a_n \beta_0$  im Grenzwert  $n \rightarrow \infty$  gegen Null konvergiert. Es gibt tatsächlich  $\alpha, \beta > 0$  und für jedes  $\epsilon > 0$   $N, M \in \mathbb{N}$  mit

$$|\beta_n| \leq \beta \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^n |a_k| \leq \alpha \quad \text{für } n \in \mathbb{N}_0, \quad |\beta_n| < \frac{\epsilon}{2\alpha} \quad \text{für } n \geq N, \quad |a_n| < \frac{\epsilon}{2N\beta} \quad \text{für } n \geq M.$$

Dann gilt für alle  $n \geq N + M - 1$ , also  $n - N + 1 \geq M$ :

$$\begin{aligned} |a_0 \beta_n + \dots + a_n \beta_0| &\leq |a_0 \beta_n + \dots + a_{n-N} \beta_N| + |a_{n-N+1} \beta_{N-1} + \dots + a_n \beta_0| \\ &< \frac{\epsilon}{2\alpha} \sum_{k=0}^{n-N} |a_k| + N\beta \cdot \frac{\epsilon}{2N\beta} \leq \epsilon. \end{aligned}$$

Also konvergiert  $(\sum c_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  gegen das Produkt der Grenzwerte von  $(\sum a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  und  $(\sum b_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  wenn beide konvergieren und eine absolut konvergiert. Wenn beide Reihen absolut konvergieren, dann gilt für alle  $N \in \mathbb{N}_0$

$$\sum_{n=0}^N |c_n| \leq \left( \sum_{n=0}^N |a_n| \right) \left( \sum_{n=0}^N |b_n| \right) \leq \left( \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} |b_n| \right).$$

Also ist dann das Produkt absolut konvergent.

**q.e.d.**

**Beispiel 4.20.** Das Quadrat der Reihe  $\left( \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} \right)$  ist nicht konvergent, obwohl die Reihe als Beispiel einer alternierenden Reihe nach Leibniz konvergiert, aber nicht absolut konvergiert. Die Koeffizienten des Quadrates sind gegeben durch:

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k (-1)^{n-k}}{\sqrt{k+1} \sqrt{n-k+1}} = (-1)^n \sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{k+1} \sqrt{n-k+1}}$$

Es gilt aber  $\sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{k+1} \sqrt{n-k+1}} \geq \sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{n+1} \sqrt{n+1}} = 1$ . Also ist das Quadrat der Reihe keine Cauchyfolge.

**q.e.d.**

**Satz 4.21** (Eigenschaften der Exponentialfunktion).

- (i) für alle  $x, y \in \mathbb{K}$  gilt  $\exp(x+y) = \exp(x) \exp(y)$ .
- (ii) Für alle  $x \in \mathbb{K}$  ist  $\exp(x) \neq 0$  und für alle  $x \in \mathbb{R}$  sogar  $\exp(x) > 0$ .
- (iii) Für alle  $x \in \mathbb{R}$  und alle  $r \in \mathbb{Q}$  ist  $\exp(rx) = (\exp(x))^r$ .
- (iv) Für alle  $x \in \mathbb{C}$  ist  $\exp(\bar{x}) = \overline{\exp(x)}$ .
- (v) Für alle  $x \in \mathbb{R}$  ist  $|\exp(ix)| = 1$ .

Die Zahl  $\exp(1)$  wird Eulersche Zahl genannt und mit  $e$  bezeichnet. Wegen (iii) gilt dann für alle  $r \in \mathbb{Q}$ :  $\exp(r) = \exp(r \cdot 1) = e^r$ . Deshalb schreiben wir auch  $e^x$  für  $\exp(x)$ .

**Beweis:** (i) Wir hatten schon gesehen, dass die Reihe  $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$  für alle  $x \in \mathbb{K}$  absolut konvergiert. Dann ist das Produkt von  $\exp(x) \cdot \exp(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k y^{n-k}}{k!(n-k)!}$ . Wegen der binomischen Formel gilt

$$\sum_{k=0}^n \frac{x^k y^{n-k}}{k!(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \frac{(x+y)^n}{n!}.$$

Dann folgt  $\exp(x)\exp(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = \exp(x+y)$ .

(ii) Wegen (i) gilt  $\exp(x)\exp(-x) = 1$ . Also besitzt  $\exp(x)$  für alle  $x \in \mathbb{K}$  ein Inverses und ist ungleich Null. Wegen (i) gilt  $\exp(x) = \left(\exp\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 > 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ .

(iii) Offenbar ist für alle  $n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}$   $(\exp(\frac{x \cdot m}{n}))^n = \exp(x \cdot m) = (\exp(x))^m$ . Also gilt auch wegen (ii)  $\exp\left(\frac{xm}{n}\right) = (\exp(x))^{\frac{m}{n}}$ .

(iv)  $\exp(\bar{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{x}^n}{n!} = \overline{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}} = \overline{\exp(x)}$  wegen Satz 2.57, Satz 3.3 (ii) und Satz 4.17.

(v) Für  $x \in \mathbb{R}$  gilt  $\exp(ix)\exp(ix) = \exp(ix)\exp(-ix) = 1$ . **q.e.d.**

Wir können jetzt für jede Zahl  $y > 0$ , für die es ein  $x \in \mathbb{R}$  gibt, so dass  $y = \exp(x)$  gilt, und für jedes  $z \in \mathbb{R}$  die Zahl  $y^z = \exp(zx)$  definieren. Wir werden später sehen, dass wir so für alle  $y \in (0, \infty)$  und alle  $z \in \mathbb{R}$   $y^z$  definieren können.

**Definition 4.22** (Umordnen von Reihen). Sei  $\tau : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  eine bijektive Abbildung von den natürlichen Zahlen auf sich selber. Dann heißt die Reihe  $(\sum a_{\tau(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  eine Umordnung der Reihe  $(\sum a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

Analog könnten wir auch die Umordnung von Folgen bilden. Letztere sind aber weniger interessant, weil jede Umordnung einer konvergenten Folge wieder gegen den gleichen Grenzwert konvergiert (Übungsaufgabe). Dagegen gilt dies bei Reihen nicht.

**Satz 4.23.** Konvergiert eine Reihe  $(\sum a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  absolut, so konvergiert auch jede Umordnung  $(\sum a_{\tau(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  absolut. In diesem Fall gilt 
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\tau(n)}.$$

**Beweis:** Sei also  $\tau$  eine gegebene bijektive Abbildung  $\tau : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ . Wenn  $(\sum a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  absolut konvergent, dann gibt es für jedes  $\epsilon > 0$  ein  $N \in \mathbb{N}$ , so dass  $\sum_{k=n}^m |a_k| < \epsilon$  für alle  $m \geq n > N$  gilt. Dann gibt es auch ein  $M = \max\{\tau^{-1}(1), \dots, \tau^{-1}(N)\} \in \mathbb{N}$ , so dass  $\tau(n) > N$  für alle  $n > M$  gilt. Dann folgt für alle  $m \geq n > M$

$$\sum_{k=n}^m |a_{\tau(k)}| \leq \sum_{k=N+1}^{\max\{\tau(n), \tau(n+1), \dots, \tau(m)\}} |a_k| < \epsilon.$$

Also ist  $(\sum |a_{\tau(n)}|)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchyfolge und die Umordnung konvergiert sogar absolut.

Mit denselben  $N$  und  $M$  in Abhängigkeit von  $\epsilon > 0$  gilt für alle  $m > M \geq N$

$$\left| \sum_{k=1}^m a_{\tau(k)} - \sum_{k=1}^m a_k \right| \leq \sum_{k=N+1}^{\max\{\tau(1), \tau(2), \dots, \tau(m), m\}} |a_k| < \epsilon.$$

Also konvergiert  $(\sum a_{\tau(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  gegen den gleichen Grenzwert wie  $(\sum a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . **q.e.d.**

**Satz 4.24** (Riemann). *Sei  $(\sum a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine konvergente reelle Reihe, die nicht absolut konvergiert, und  $\alpha \leq \beta$  zwei reelle Zahlen. Dann gibt es eine Umordnung  $(\sum a_{\tau(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ , die als Reihe beschränkt ist und für die  $\alpha$  der Limes inferior der Reihe ist und  $\beta$  der Limes superior. Wenn  $\alpha \neq \beta$  konvergiert die Reihe also nicht.*

**Beweis\***: Weil  $(\sum a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert, ist die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Nullfolge. Wir betrachten im folgenden die beiden Teilfolgen aller nichtnegativen Elemente  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und aller negativen Elemente  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Weil  $(\sum a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  nicht absolut konvergiert, und  $(\sum 2b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  genau dann konvergiert, wenn  $(\sum a_n + |a_n|)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert, bzw.  $(\sum 2c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  genau dann konvergiert, wenn  $(\sum a_n - |a_n|)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert, konvergieren die beiden monotonen Reihen  $(\sum b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(\sum c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  nicht und sind auch nicht beschränkt.

Wir setzen die umgeordnete Folge  $(a_{\tau(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  abwechselnd jeweils der Reihe nach aus den Folgen  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  zusammen. Wenn die Summe aller bisherigen Folgenglieder größer ist als  $\beta$ , dann fahren wir solange mit Folgengliedern aus  $c_n$  fort, bis die Summe kleiner als  $\alpha$  ist. Wenn die Summe aller bisherigen Folgenglieder kleiner als  $\alpha$  ist, dann fahren wir solange mit Folgengliedern aus  $b_n$  fort, bis die Summe größer als  $\beta$  ist. Wenn  $0 \in [\alpha, \beta]$  starten wir mit Folgengliedern aus  $b_n$ , bis die Summe größer als  $\beta$  ist. Für jedes  $\epsilon > 0$  gibt es nur endlich viele Glieder von  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , deren Absolutbetrag nicht kleiner als  $\epsilon$  ist. Deshalb gibt es ein  $N \in \mathbb{N}$ , so dass die Summen  $\sum_{k=1}^n a_{\tau(k)}$  für alle  $n \geq N$  in  $(\alpha - \epsilon, \beta + \epsilon)$  liegen. Es gibt unendlich viele Glieder von  $(\sum a_{\tau(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  die kleiner als  $\alpha$  sind und unendlich viele, die größer als  $\beta$  sind. Die umgeordnete Reihe  $(\sum a_{\tau(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  hat also als Limes inferior  $\alpha$  und als Limes superior  $\beta$ . **q.e.d.**

Weil für jedes  $\epsilon > 0$  und  $x \in [\alpha, \beta]$  unendlich viele Glieder von  $(\sum a_{\tau(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  in  $(x - \epsilon, x + \epsilon)$  liegen, ist die Menge der Häufungspunkte dieser Reihe gleich  $[\alpha, \beta]$ .

**Definition 4.25.** *Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  eine Folge, dann heißt  $(\sum a_n x^n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  die entsprechende Potenzreihe mit Koeffizienten  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ .*

Aus dem Wurzeltest folgt sofort

**Satz 4.26** (Konvergenzradius von Potenzreihen). *Seien  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  die Koeffizienten der Potenzreihe  $(\sum a_n x^n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  und  $\alpha = \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}$  wenn  $(\sqrt[n]{|a_n|})_{n \in \mathbb{N}_0}$  nach oben beschränkt ist und sonst  $\alpha = \infty$ , und sei  $R = \frac{1}{\alpha}$  ( $R = 0$  für  $\alpha = \infty$  und  $R = \infty$  für  $\alpha = 0$ ).*

(i) *Für  $|x| < R$  konvergiert  $(\sum a_n x^n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  absolut.*

(ii) *Für  $|x| > R$  divergiert  $(\sum a_n x^n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ .*

Wenn  $\alpha < \infty$  definiert die Potenzreihe also folgende Funktion:

$$f: \{x \in \mathbb{K} \mid |x| < R\} \rightarrow \mathbb{K}, \quad x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \quad \mathbf{q.e.d.}$$

**Beispiel 4.27.** (i)  $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ ,  $\alpha = \overline{\lim} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!}} = 0 \implies R = \infty$ .

(ii)  $\left(\sum_{n \in \mathbb{N}_0} x^n\right)$  also  $\alpha = \overline{\lim} \sqrt[n]{1} = 1 \implies R = 1$ . Für  $|x| < 1$  gilt  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ .

(iii)  $\left(\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{x^n}{n}\right)$  also  $\alpha = \overline{\lim} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}} = 1 \implies R = 1$ .

Für  $|x| < 1$  ist die Potenzreihe also konvergent, aber für  $x = 1$  divergent und für  $x = -1$  konvergent (alternierende Reihe von Leibniz).

(iv)  $\left(\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{x^n}{n^2}\right)$  also  $\alpha = \overline{\lim} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \left(\frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}}\right)^2 = 1 \implies R = 1$ .

Für  $|x| \leq 1$  also konvergent und für  $|x| > 1$  divergent.

**Satz 4.28** (Eigenschaften von Potenzreihenfunktionen).

(i) Seien  $(\sum_{n \in \mathbb{N}_0} a_n x^n)$  und  $(\sum_{n \in \mathbb{N}_0} b_n x^n)$  Potenzreihen mit Konvergenzradius  $R_1$  bzw.  $R_2$ . Dann konvergieren für  $|x| < \min\{R_1, R_2\}$  die Summe  $(\sum_{n \in \mathbb{N}_0} (a_n + b_n) x^n)$  und das Cauchyprodukt  $(\sum_{n \in \mathbb{N}} c_n x^n)$  der beiden Potenzreihen und es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right).$$

(ii) Für  $r < R_1$  gibt es ein  $M(r) \in (0, \infty)$ , so dass  $\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right| \leq M(r)$  für  $|x| \leq r$  gilt.

(iii) Für  $r < R_1$  und für  $\epsilon > 0$  gibt es ein  $N \in \mathbb{N}$ , so dass für  $|x| \leq r$  folgendes gilt:

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^N a_n x^n\right| < \epsilon.$$

(iv) Für  $r < R_1$  gibt es ein  $L > 0$ , so dass für  $x, y$  mit  $|x|, |y| \leq r$  folgendes gilt:

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n\right| \leq L|x - y|.$$

**Beweis:** (i) Folgt aus den Rechenregeln für Reihen und der Konvergenz des Produktes.

(ii) Für  $|x| \leq r$  gilt  $\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n = M(r) < \infty$ .

(iii) Weil die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$  absolut konvergiert gibt es für jedes  $\epsilon > 0$  ein  $N \in \mathbb{N}$ , so dass  $\left| \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| - \sum_{n=0}^N |a_n| \right| = \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| r^n < \epsilon$  gilt. Dann folgt für  $|x| \leq r$

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^N a_n x^n \right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| r^n < \epsilon.$$

(iv)  $(x^n - y^n) = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1})$ . Für  $|x| \leq r$  und  $|y| \leq r$  folgt also  $|x^n - y^n| \leq |x - y| n r^{n-1}$ . Weil aber gilt

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{n|a_n|} = \overline{\lim} \left( \sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{|a_n|} \right) = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} \right) \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|},$$

haben die Reihen  $(\sum_{n \in \mathbb{N}_0} a_n x^n)$  und  $(\sum_{n \in \mathbb{N}_0} n \cdot a_n x^{n-1})$  den gleichen Konvergenzradius. Also gilt für  $|x| \leq r$  und  $|y| \leq r$

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot |x^n - y^n| \leq |x - y| L \text{ mit } L = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \cdot n r^{n-1}. \quad \mathbf{q.e.d.}$$

**Satz 4.29** (Identitätssatz für Potenzreihenfunktionen).

- (i) Sei  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  eine Potenzreihe mit Konvergenzradius  $R > 0$ , die nicht identisch verschwindet, dann hat die Potenzreihenfunktion für ein  $0 < r < R$  in  $\{x \in \mathbb{K} \mid 0 < |x| < r\}$  keine Nullstelle.
- (ii) Sei  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  eine Potenzreihenfunktion mit Konvergenzradius  $R > 0$ . Für alle  $x_0$  mit  $|x_0| < R$  und alle  $n \in \mathbb{N}_0$  konvergiert  $b_n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} a_{n+k} x_0^k$ . Außerdem ist der Konvergenzradius der Potenzreihenfunktion  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$  nicht kleiner als  $R - |x_0|$  und für alle  $|x| < R - |x_0|$  gilt auch  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x + x_0)^n$ .
- (iii) Seien  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  und  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$  zwei Potenzreihenfunktionen, deren Konvergenzradien größer sind als  $r > 0$ . Falls  $\{x \in \mathbb{K} \mid |x| \leq r\}$  unendliche viele verschiedene Elemente enthält, an denen die beiden Potenzreihenfunktionen übereinstimmen, dann gilt  $a_n = b_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}_0$ , d.h. sie stimmen als Potenzreihen überein.

**Beweis:** (i) Sei  $N \in \mathbb{N}_0$  der kleinste Index, so dass  $a_N \neq 0$ . Wenn alle anderen Koeffizienten  $(a_n)_{n > N}$  verschwinden, hat die Potenzreihe höchstens Nullstellen bei  $x = 0$ . Andernfalls gilt für ein  $0 < r < R$  und alle  $|x| \leq r$

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - a_N x^N \right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| \cdot |x|^n \leq |x|^{N+1} \left( \sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+N+1}| r^n \right).$$

Also gilt für alle Nullstellen  $x_m$  mit  $|x_m| \leq r$  der Potenzreihenfunktionen

$$|a_N| \cdot |x_m|^N \leq |x_m|^{N+1} \left( \sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+N+1}| r^n \right).$$

Wenn  $|x_m| \neq 0$  ist folgt daraus  $0 < |a_N| \leq |x_m| (\sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+N+1}| r^n)$ . Also hat die Potenzreihenfunktion keine Nullstelle in

$$\left\{ x \in \mathbb{K} \mid 0 < |x| < \min \left\{ r, |a_N| \left( \sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+N+1}| r^n \right)^{-1} \right\} \right\}.$$

(ii) Für  $x_0 = 0$  trivial. Sei  $0 < |x_0| = r < R$ . Dann ist für alle  $0 < s < R - r$  die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (r+s)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n a_n \binom{n}{k} r^k s^{n-k} < \infty$$

absolut summierbar. Dann gilt für alle  $m = n - k \in \mathbb{N}_0$  und  $K \in \mathbb{N}_0$ :

$$s^m \sum_{k=0}^K |a_{m+k}| \binom{m+k}{k} r^k \leq \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n |a_n| \binom{n}{k} r^k s^{n-k} < \infty.$$

Für alle  $m = n - k \in \mathbb{N}_0$  konvergiert also  $b_m = \sum_{k=0}^{\infty} a_{m+k} \binom{m+k}{k} x_0^k$  absolut. Und es gilt

$$\sum_{m=0}^M s^m \sum_{k=0}^{\infty} |a_{m+k}| \binom{m+k}{k} r^k \leq \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n |a_n| \binom{n}{k} r^{n-k} s^k < \infty$$

für alle  $M \in \mathbb{N}_0$ . Also ist auch  $\sum_{m=0}^{\infty} |b_m| s^m \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| (r+s)^n < \infty$ .

Also ist  $\sum_{m=0}^{\infty} b_m x^m$  für alle  $|x| < R - r$  konvergent, und der Konvergenzradius nicht kleiner als  $R - r = R - |x_0|$ . Für  $|x| < R - |x_0|$  und alle  $M, K \in \mathbb{N}_0$  gilt dann

$$\left| \sum_{m=0}^M x^m \sum_{k=0}^K a_{m+k} \binom{m+k}{k} x_0^k - \sum_{n=0}^{M+K} a_n (x+x_0)^n \right| \leq \sum_{n=\min\{M+1, K+1\}}^{M+K} |a_n| (|x| + |x_0|)^n.$$

Also folgt im Grenzwert  $K \rightarrow \infty$

$$\left| \sum_{m=0}^M b_m x^m - \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+x_0)^n \right| \leq \sum_{n=M+1}^{\infty} |a_n| (|x| + |x_0|)^n < \infty.$$

und im Grenzwert  $M \rightarrow \infty$  auch  $\sum_{m=0}^{\infty} b_m x^m - \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+x_0)^n = 0$ .

(iii) Sei  $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$  eine Folge von paarweise verschiedenen Nullstellen der Potenzreihenfunktion  $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n) x^n$  in  $\{x \in \mathbb{K} \mid |x| \leq r\}$ . Dann hat die Folge  $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$  einen Häufungspunkt  $x_0$  mit  $|x_0| \leq r$  und für alle  $\epsilon > 0$  unendlich viele Glieder in  $\{x \in \mathbb{K} \mid |x - x_0| < \epsilon\}$ . Sei  $R$  das Minimum der Konvergenzradien von  $(\sum a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$

und  $(\sum b_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ . Dann hat aufgrund der Voraussetzung und wegen (ii) die Potenzreihe  $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n)(y+x_0)^n$ , als Potenzreihe in  $y$  mindestens den Konvergenzradius  $R-r > 0$ , und für alle  $0 < \epsilon \leq R-r$  unendlich viele Nullstellen auf  $\{y \in \mathbb{C} \mid |y| < \epsilon\}$ . Also verschwindet wegen (i) diese Potenzreihe in  $y$  identisch. Dann stimmen wegen (ii) die beiden Potenzreihen  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  und  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$  auf dem Ball  $\{x \in \mathbb{K} \mid |x-x_0| < R-r\}$  überein. Also gibt es eine Folge  $(\tilde{x}_m)_{m \in \mathbb{N}}$  von paarweise verschiedenen Nullstellen von  $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n)x^n$ , die gegen ein  $\tilde{x}_0$  mit  $|\tilde{x}_0| = \max\{r - (R-r), 0\} < r$  konvergiert. Dabei ist  $R - |\tilde{x}_0| > R-r$ . Sei  $\frac{R}{R-r} < N \in \mathbb{N}$ . Indem wir die beiden Potenzreihe immer wieder an einer Stelle mit minimalem Radius in dem Bereich entwickeln, in dem wir schon die Gleichheit beider Potenzreihen gezeigt haben, erhalten wir nach höchstens  $N$  Schritten, dass beide Potenzreihen auf einer Nullfolge übereinstimmen. Wegen (i) sind dann die beiden Potenzreihen  $(\sum a_n x^n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  und  $(\sum b_n x^n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  identisch. **q.e.d.**

## 4.4 Sinus und Cosinus

**Definition 4.30.** Für alle  $x \in \mathbb{K}$  sei

$$\cos(x) = \frac{\exp(ix) + \exp(-ix)}{2} \quad \sin(x) = \frac{\exp(ix) - \exp(-ix)}{2i}$$

Also gilt für reelle  $x$   $\cos(x) = \Re(\exp(ix))$   $\sin(x) = \Im(\exp(ix))$   
und für alle  $x \in \mathbb{K}$  die **Eulersche Formel**:  $\exp(ix) = \cos(x) + i \sin(x)$ .  
Außerdem gilt für alle  $x \in \mathbb{K}$

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = \frac{\exp(2ix) + 2 + \exp(-2ix)}{4} - \frac{\exp(2ix) - 2 + \exp(-2ix)}{4} = 1,$$

$$\cos(-x) = \cos(x) \quad \text{und} \quad \sin(-x) = -\sin(x).$$

**Satz 4.31** (Additionstheorem). Für alle  $x, y \in \mathbb{K}$  gilt:

$$\begin{aligned} \cos(x+y) &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) \\ \sin(x+y) &= \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y) \end{aligned}$$

**Beweis:**  $\exp(i(x+y)) = \exp(ix)\exp(iy)$ .

$$\begin{aligned} \cos(x+y) + i \sin(x+y) &= (\cos(x) + i \sin(x))(\cos(y) + i \sin(y)) \\ &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) + i(\sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)). \end{aligned}$$

Ersetzen wir  $x$  und  $y$  durch  $-x$  und  $-y$  und benutzen  $\cos(-x) = \cos(x)$  und  $\sin(-x) = -\sin(x)$ , dann erhalten wir

$$\cos(x+y) - i \sin(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) - i(\sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)).$$

Die Summe und die Differenz dieser beiden Gleichungen ergibt

$$\begin{aligned}\cos(x+y) &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) \\ \sin(x+y) &= \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y).\end{aligned}\quad \text{q.e.d.}$$

Durch Einsetzen von  $(x, y)$  und  $(x, -y)$  erhalten wir für alle  $x, y \in \mathbb{K}$

$$\begin{aligned}\cos(x+y) + \cos(x-y) &= 2\cos(x)\cos(y) \\ \cos(x-y) - \cos(x+y) &= 2\sin(x)\sin(y) \\ \sin(x+y) + \sin(x-y) &= 2\sin(x)\cos(y)\end{aligned}$$

**Satz 4.32** (Potenzreihen von Sinus und Cosinus).

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \qquad \sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

**Beweis:** Weil  $i^2 = -1$  gilt für alle  $k \in \mathbb{N}_0$   $i^{2k} = (-1)^k$  und  $i^{2k+1} = i(-1)^k$ . Also gilt

$$\begin{aligned}(ix)^{2k} + (-ix)^{2k} &= 2(-1)^k x^{2k}, & (ix)^{2k+1} + (-ix)^{2k+1} &= 0, \\ (ix)^{2k} - (-ix)^{2k} &= 0, & (ix)^{2k+1} - (-ix)^{2k+1} &= 2i(-1)^k x^{2k+1}\end{aligned}$$

für alle  $x \in \mathbb{K}$  und damit auch

$$\begin{aligned}\cos(x) &= \frac{\exp(ix) + \exp(-ix)}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n + (-ix)^n}{2 \cdot n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} \\ \sin(x) &= \frac{\exp(ix) - \exp(-ix)}{2i} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n - (-ix)^n}{2i \cdot n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}\end{aligned}\quad \text{q.e.d.}$$

# Kapitel 5

## Stetigkeit

### 5.1 Teilmengen von $\mathbb{K}$

In diesem Abschnitt betrachten wir Teilmengen  $X$  von  $\mathbb{K}$ , also von  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ . Der Absolutbetrag  $|x - y|$  der Differenz zweier Elemente  $x, y \in X$  definiert einen Abstand. Wir hatten in den Sätzen 2.22 und 2.61 folgende Eigenschaften hergeleitet:

(i) Für alle  $x, y \in X$  ist  $|x - y| \geq 0$  und  $|x - y| = 0 \iff x = y$  (Positivität).

(ii) Für alle  $x, y \in X$  ist  $|x - y| = |y - x|$  (Symmetrie).

(iii) Für alle  $x, y, z \in X$  ist  $|x - y| \leq |x - z| + |z - y|$  (Dreiecksungleichung).

**Definition 5.1** (offener Ball, Umgebung, offene Menge). Sei  $X \subset \mathbb{K}$ . Ein offener Ball in  $X$  mit Zentrum  $x \in X$  und Radius  $r > 0$  ist die Menge  $B(x, r) = \{y \in X \mid |x - y| < r\}$ . Eine Umgebung eines Punktes  $x \in X$  ist eine Menge  $U \subset X$ , die für ein  $\epsilon > 0$  den Ball  $B(x, \epsilon)$  enthält. Eine offene Menge  $O \subset X$  ist eine Teilmenge, die eine Umgebung aller ihrer Punkte ist, d.h. für alle  $x \in O$  gibt es ein  $\epsilon > 0$ , so dass  $B(x, \epsilon) \subset O$ .

**Beispiel 5.2.** In  $\mathbb{R}$  bestehen die Bälle  $B(x, r)$  aus den Intervallen  $(x - r, x + r)$ . In  $\mathbb{C}$  bestehen die Bälle  $B(x, r)$  aus Kreisscheiben um  $x$  mit Radius  $r$  ohne den Rand.

In  $[0, \infty)$  ist  $[0, 1)$  eine Umgebung von 0, weil sie der offene Ball  $B(0, 1)$  ist. In  $\mathbb{R}$  ist  $[0, 1)$  keine Umgebung von 0, weil sie keinen Ball  $B(0, r)$  mit  $r > 0$  von  $\mathbb{R}$  enthält.

Alle offene Bälle  $B(x, r)$  sind offenbar Umgebungen von  $x$ . Sei  $y \in B(x, r)$ . Dann ist  $|x - y| < r$ . Sei  $z \in B(y, r - |x - y|)$ . Dann gilt  $|x - z| \leq |x - y| + |y - z| < r$ , also auch  $B(y, r - |x - y|) \subset B(x, r)$ . Deshalb sind die offenen Bälle offene Mengen.

Insbesondere ist  $[0, 1)$  in  $[0, \infty)$  offen aber in  $\mathbb{R}$  nicht.

Offenbar ist eine beliebige Vereinigung von offenen Mengen offen. Seien  $O$  und  $O'$  zwei offene Mengen und  $x \in O \cap O'$ . Dann gibt es  $r > 0$  und  $r' > 0$  so dass  $B(x, r) \subset O$  und  $B(x, r') \subset O'$ . Also ist  $B(x, \min\{r, r'\}) = B(x, r) \cap B(x, r') \subset O \cap O'$ . Also ist  $O \cap O'$  offen. Damit ist auch die Schnittmenge von endlich vielen offenen Mengen offen.

**Definition 5.3** (abgeschlossene Mengen, Abschluss). *Sei  $X \subset \mathbb{K}$ . Die abgeschlossenen Teilmengen von  $X$  sind die Komplemente der offenen. Der Abschluss  $\bar{A}$  einer Teilmenge  $A \subset X$  ist die Schnittmenge aller abgeschlossenen Teilmengen, die  $A$  enthalten.*

Wegen der Regel von de Morgan, sind beliebige Schnitte und endliche Vereinigungen von abgeschlossenen Teilmengen von  $X$  abgeschlossen. Deshalb ist der Abschluss einer beliebigen Teilmenge von  $X$  abgeschlossen und der Abschluss einer abgeschlossenen Teilmenge gleich der Menge.

Ein Punkt  $x \in X$  gehört genau dann zu dem Abschluss  $\bar{A}$  in  $X$ , wenn es keine offene Teilmenge von  $X$  gibt, die  $x$  enthält aber mit  $A$  schnittfremd ist. Dies ist äquivalent dazu, dass für alle  $n \in \mathbb{N}$  die offenen Bälle  $B(x, \frac{1}{n})$  in  $X$  ein Element  $a_n$  aus  $A$  enthalten, oder auch dazu, dass es eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $A$  gibt, die gegen  $x$  konvergiert. Dabei konvergiert eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $X$ , wenn es einen Grenzwert in  $X$  gibt, gegen den sie konvergiert. Damit haben wir gezeigt:

**Lemma 5.4.** *Der Abschluss  $\bar{A}$  einer Teilmenge  $A \subset X$  besteht aus den Grenzwerten von allen Folgen in  $A$ , die in  $X$  konvergieren.  $A \subset X$  ist genau dann abgeschlossen, wenn die Grenzwerte von allen Folgen in  $A$ , die in  $X$  konvergieren, in  $A$  liegen. **q.e.d.***

Wegen Satz 3.5 ist in  $\mathbb{K}$  der Abschluss der offenen Bälle  $\overline{B(x, r)} = \{y \mid |y - x| \leq r\}$ .

## 5.2 Vollständigkeit und Kompaktheit

Wenn eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $X$  konvergiert, dann auch in  $\mathbb{K}$ . Deshalb gilt

**Satz 5.5.** *In  $X \subset \mathbb{K}$  ist jede konvergente Folge eine Cauchyfolge. **q.e.d.***

**Definition 5.6.**  *$X \subset \mathbb{K}$  heißt vollständig, wenn jede Cauchyfolge in  $X$  konvergiert.*

Wegen dem Vollständigkeitsaxiom sind  $\mathbb{R}$  und  $\mathbb{C}$  vollständig. Wegen Lemma 5.4 ist  $A \subset \mathbb{K}$  genau dann vollständig, wenn  $A$  in  $\mathbb{K}$  abgeschlossen ist.

Weil jede reelle Zahl der Grenzwert einer Folge von rationalen Zahlen ist, sind die reellen Zahlen der Abschluss der rationalen Zahlen  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ . Anstelle unserer axiomatischen Charakterisierung der reellen Zahlen können wir also die reellen Zahlen auch aus den rationalen Zahlen konstruieren als Äquivalenzklassen von rationalen Cauchyfolgen, wobei zwei Cauchyfolgen als äquivalent gelten, wenn ihre Differenz eine Nullfolge ist.

**Definition 5.7** (Kompakte Mengen). *Eine Teilmenge  $X \subset \mathbb{K}$  heißt kompakt, wenn jede Folge in  $X$  eine in  $X$  konvergente Teilfolge besitzt.*

**Definition 5.8.** *Eine Teilmenge  $X \subset \mathbb{K}$  heißt beschränkt, wenn für ein  $x \in X$ , die Menge der Abstände  $\{|x - y| \mid y \in X\}$  beschränkt ist.*

Wegen der Dreiecksungleichung ist diese Bedingung äquivalent dazu, dass für jedes  $x \in \mathbb{K}$  die Menge der Abstände  $\{|x - y| \mid y \in X\}$  beschränkt ist.

**Satz 5.9** (Heine-Borel). *Eine Teilmenge  $X \subset \mathbb{K}$  ist genau dann kompakt, wenn sie in  $\mathbb{K}$  abgeschlossen und beschränkt ist.*

**Beweis:** Wegen dem Auswahlprinzip von Bolzano Weierstraß besitzt jede Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in einer beschränkten Menge  $X \subset \mathbb{K}$  eine in  $\mathbb{K}$  konvergente Teilfolge. Der Grenzwert einer Folge in einer kompakten Teilmenge  $X \subset \mathbb{K}$ , die in  $\mathbb{K}$  konvergiert, muss in  $X$  liegen. Wegen Lemma 5.4 ist dann eine beschränkte Teilmenge  $X \subset \mathbb{K}$  genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen ist. Wenn es für endlich viele paarweise disjunkte Bälle  $B(x_1, 2), \dots, B(x_n, 2)$  einer Teilmenge  $X \subset \mathbb{K}$  kein  $x_{n+1} \in X$  gibt, so dass auch  $B(x_1, 2), \dots, B(x_{n+1}, 2)$  paarweise disjunkt sind, dann ist  $X$  in  $B(x_1, 4) \cup \dots \cup B(x_n, 4)$  enthalten und beschränkt. Also gibt es in unbeschränkten  $X$  Folgen  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit paarweise disjunkten Bällen  $B(x_n, 2)$ . Für  $x \in X$  folgt  $B(x, 1) \subset B(x_n, 2)$  aus  $x_n \in B(x, 1)$ . Also hat eine solche Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $X$  keinen Häufungspunkt. **q.e.d.**

**Korollar 5.10.** *Teilmengen  $A \subset X$  einer kompakten Teilmenge  $X \subset \mathbb{K}$  sind genau dann kompakt, wenn sie in  $X$  abgeschlossen sind.*

**Beweis:** Teilmengen  $A$  einer beschränkten Menge  $X \subset \mathbb{K}$  sind beschränkt. Wegen Lemma 5.4 ist eine Teilmenge  $A$  einer in  $\mathbb{K}$  abgeschlossenen Menge  $X \subset \mathbb{K}$  genau dann in  $X$  abgeschlossen, wenn sie es in  $\mathbb{K}$  ist. Also folgt die Aussage aus Satz 5.9. **q.e.d.**

**Korollar 5.11.** *Die kompakten Teilmengen von  $\mathbb{R}$  besitzen Minimum und Maximum.*

**Beweis:** Für jede beschränkte nicht leere Teilmenge  $A \subset \mathbb{R}$  und für jedes  $n \in \mathbb{N}$  ist  $\sup A - \frac{1}{n}$  keine obere Schranke von  $A$  und  $\inf A + \frac{1}{n}$  keine untere Schranke. Deshalb gibt es ein  $a_n \in (\sup A - \frac{1}{n}, \sup A] \cap A$  und ein  $b_n \in [\inf A, \inf A + \frac{1}{n}) \cap A$ . Die Folgen  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergieren gegen  $\sup A$  bzw.  $\inf A$ . Also liegen  $\sup A$  und  $\inf A$  im Abschluss von  $A$ . Kompakte Teilmengen besitzen Minimum und Maximum. **q.e.d.**

**Beispiel 5.12.** *In  $\mathbb{K}$  sind alle abgeschlossenen Bälle  $\overline{B(x, r)}$  für  $r \geq 0$  kompakt. Dasselbe gilt in  $X \subset \mathbb{K}$  genau dann, wenn  $X$  in  $\mathbb{K}$  abgeschlossen ist.*

## 5.3 Stetigkeit

**Definition 5.13.** *Seien  $X$  und  $Y$  jeweils eine Teilmenge entweder von  $\mathbb{R}$  oder von  $\mathbb{C}$ . Eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$ ,  $x \mapsto f(x)$  heißt stetig in  $x \in X$ , wenn es für jedes  $\epsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  gibt, so dass  $|f(x) - f(y)| < \epsilon$  für alle  $y \in X$  gilt, die  $|x - y| < \delta$  erfüllen. Die Abbildung  $f$  heißt stetig, wenn sie in allen Punkten von  $X$  stetig ist.*

Stetig im Punkt  $x$  heißt also, dass alle Punkte, die hinreichend nahe bei  $x$  liegen, auf Werte abgebildet werden, die beliebig nahe bei  $f(x)$  liegen.

**Satz 5.14.** *Für eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$ ,  $x \mapsto f(x)$  zwischen zwei Teilmengen  $X$  und  $Y$  jeweils von  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$  ist folgendes äquivalent: (i)  $f$  ist stetig in  $x$ .*

(ii) Das Urbild jeder Umgebung von  $f(x)$  ist eine Umgebung von  $x$ .

(iii) Für gegen  $x$  konvergente Folgen  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $X$  konvergiert  $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  gegen  $f(x)$ .

**Beweis:** (i)  $\Leftrightarrow$  (ii): Umgebungen von  $x$  bzw.  $f(x)$  sind Mengen, die  $B(x, \delta)$  mit  $\delta > 0$  bzw.  $B(f(x), \epsilon)$  mit  $\epsilon > 0$  enthalten. Also ist (ii) äquivalent dazu, dass das Urbild jeder Menge, die  $B(f(x), \epsilon)$  für ein  $\epsilon > 0$  enthält,  $B(x, \delta)$  mit  $\delta > 0$  enthält und dazu, dass  $f^{-1}[B(f(x), \epsilon)]$  für alle  $\epsilon > 0$  ein  $B(x, \delta)$  mit  $\delta > 0$  enthält. Das ist äquivalent zu (i).

(ii)  $\Leftrightarrow$  (iii): Folgen  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  konvergieren genau dann gegen  $x$  bzw.  $f(x)$ , wenn jede Umgebung von  $x$  bzw.  $f(x)$  alle bis auf endlich viele Folgenglieder enthält. Wenn also (ii) gilt und  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gegen  $x$  konvergiert, dann konvergiert  $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  gegen  $f(x)$  und (iii) folgt aus (ii). Wenn umgekehrt das Urbild einer Umgebung von  $f(x)$  keine Umgebung von  $x$  enthält, dann gibt es für alle  $n \in \mathbb{N}$  ein  $x_n \in B(x, \frac{1}{n})$ , so dass  $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  im Komplement der Umgebung von  $f(x)$ , also für ein  $\epsilon > 0$  nicht in  $B(f(x), \epsilon)$  liegt. Dann konvergiert  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gegen  $x$ , aber  $f(x_n)$  nicht gegen  $f(x)$ . **q.e.d.**

**Korollar 5.15.** Für eine Funktion  $f : X \rightarrow Y$  zwischen zwei Teilmengen  $X$  und  $Y$  jeweils von  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$  ist folgendes äquivalent: (i)  $f$  ist stetig.

(ii) Für in  $X$  konvergente Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert  $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  gegen  $f(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n)$ .

(iii) Das Urbild jeder offenen Teilmenge von  $Y$  ist offen in  $X$ .

(iv) Das Urbild jeder abgeschlossenen Teilmenge von  $Y$  ist abgeschlossen in  $X$ .

**Beweis:** Wegen dem vorangehenden Satz sind (i) und (ii) äquivalent. Weil eine Menge genau dann offen ist, wenn sie eine Umgebung von allen ihren Punkten ist, zeigt der vorangehende Satz, dass aus (i) bzw. (ii) auch (iii) folgt. Weil jede Umgebung eines Punktes auch eine offene Umgebung des Punktes enthält, folgt wieder wegen dem vorangehenden Satz aus (iii) auch (i) bzw. (ii). Weil nun die abgeschlossenen Mengen gerade die Komplemente der offenen Mengen sind und das Urbild eines Komplementes gerade gleich dem Komplement des Urbildes ist, ist (iii) zu (iv) äquivalent. **q.e.d.**

**Korollar 5.16.** Die Komposition zweier stetiger Abbildungen  $f : X \rightarrow Y$  und  $g : Y \rightarrow Z$  ist stetig. Die analoge punktweise Aussage gilt auch.

**Beweis:**  $g(f(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n)) = g(\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(f(x_n))$  für  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergent. **q.e.d.**

**Korollar 5.17.** Das Bild einer kompakten Menge unter einer stetigen Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  zwischen zwei Teilmengen  $X$  und  $Y$  jeweils von  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$  ist kompakt.

**Beweis:** Sei  $f : X \rightarrow Y$ ,  $x \mapsto f(x)$  eine stetige Abbildung zwischen zwei Teilmengen  $X$  und  $Y$  jeweils von  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$  und  $A \subset X$  eine kompakte Menge. Für jede Folge  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $f[A]$  gibt es eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $A$  mit  $f(x_n) = y_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Weil  $A$  kompakt ist, besitzt  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine konvergente Teilfolge. Die entsprechende Teilfolge von  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} = (f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert wegen der Stetigkeit von  $f$ . Also besitzt jede Folge in  $f[A]$  eine konvergente Teilfolge. **q.e.d.**

**Korollar 5.18.** Sei  $f$  eine bijektive stetige Abbildung von einer kompakten Teilmenge  $X$  auf eine Teilmenge  $Y$  jeweils von  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ . Dann ist die Umkehrabbildung stetig.

**Beweis:** Wegen dem vorangehenden Korollar ist das Bild  $f[X] = Y$  kompakt und wegen Korollar 5.10 das Bild  $f[A]$  jeder abgeschlossenen Teilmenge  $A \subset X$  abgeschlossen. Wegen  $(f^{-1})^{-1}[A] = f[A]$  folgt die Aussage aus Korollar 5.15 (iv). **q.e.d.**

**Beispiel 5.19.** (i) Auf jeder Teilmenge  $X \subset \mathbb{K}$  ist die identische Abbildung  $\mathbb{1}_X$  stetig.  
(ii) Die konstante Abbildung, die alle  $x \in X$  auf einen Punkt  $y$  abbildet ist stetig.  
(iii) Aus den Rechenregeln für Folgen Satz 3.5 folgt, dass für jede Teilmenge  $X$  von  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$  und alle (bei  $x \in X$ ) stetigen Abbildungen  $f, g : X \rightarrow \mathbb{K}$  auch die Abbildung

$$f + g : X \rightarrow \mathbb{K}, \quad x \mapsto f(x) + g(x) \quad f \cdot g : X \rightarrow \mathbb{K}, \quad x \mapsto f(x) \cdot g(x)$$

(bei  $x$ ) stetig ist. Das gilt auch (bei  $x \in X$  bzw.  $x \in X \setminus f^{-1}[\{0\}]$ ) für die Abbildungen

$$-f : X \rightarrow \mathbb{K}, \quad x \mapsto -f(x) \quad \text{und} \quad \frac{1}{f} : X \setminus f^{-1}[\{0\}] \rightarrow \mathbb{K} \setminus \{0\}, \quad x \mapsto \frac{1}{f(x)}.$$

**Definition 5.20** (Gleichmäßige Stetigkeit, Lipschitzstetigkeit). Eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$ ,  $x \mapsto f(x)$  zwischen den beiden Teilmengen  $X$  und  $Y$  jeweils von  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$  heißt gleichmäßig stetig auf einer Teilmenge  $A \subset X$ , wenn es für alle  $\epsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  gibt, so dass  $|f(x) - f(y)| < \epsilon$  für alle  $x, y \in A$  mit  $|x - y| < \delta$  gilt.

Die Abbildung heißt lipschitzstetig auf  $A$ , wenn es eine Konstante  $L > 0$  (Lipschitzkonstante) gibt, so dass  $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$  für alle  $x, y \in A$  gilt.

**Beispiel 5.21.** (i) Eine Potenzreihenfunktion  $f : x \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}_0} a_n x^n$  mit Konvergenzradius  $R$  ist nach Satz 4.28 (iv) für alle  $0 < r < R$  auf  $\overline{B(0, r)}$  lipschitzstetig. Auf der Vereinigung  $B(0, R) = \bigcup_{0 < r < R} B(0, r)$  der offenen Bälle  $B(0, r)$  ist  $f$  dann stetig.  
(ii) Wegen Korollar 2.20 und Satz 2.59 (iv) ist  $x \mapsto |x|$  lipschitzstetig mit  $L = 1$ .

Offenbar ist jede lipschitzstetige Abbildung auch gleichmäßig stetig und jede gleichmäßig stetige Abbildung auch stetig. Es gilt auch folgende Umkehrung:

**Satz 5.22.** Eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  von einer kompakten Teilmenge  $X$  von  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$  auf eine Teilmenge  $Y \subset \mathbb{K}$  ist genau dann stetig, wenn sie gleichmäßig stetig ist.

**Beweis:** Sei  $X$  kompakt und  $f : X \rightarrow Y$ ,  $x \mapsto f(x)$  eine Abbildung. Wenn  $f$  nicht gleichmäßig stetig ist, dann gibt es ein  $\epsilon > 0$  und für alle  $n \in \mathbb{N}$  zwei Punkte  $x_n$  und  $y_n$  in  $X$  mit  $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$  und  $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon$ . Die Folge  $(x_n - y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist also eine Nullfolge. Weil  $X$  kompakt ist, besitzt  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine in  $X$  konvergente Teilfolge, also mindestens einen Häufungspunkt in  $X$ . Dann konvergiert auch die entsprechende Teilfolge von  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gegen den gleichen Grenzwert. Wegen  $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon$  konvergieren die entsprechenden Teilfolgen von  $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(f(y_n))_{n \in \mathbb{N}}$  nicht gegen den gleichen Grenzwert, und  $f$  ist an allen Häufungspunkten von  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  nicht stetig. Wenn  $f$  umgekehrt gleichmäßig stetig ist, dann ist  $f$  auch stetig. **q.e.d.**

**Definition 5.23.** Eine Folge von Funktionen  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von  $X$  nach  $\mathbb{K}$  heißt

**punktweise konvergent**, wenn die Folgen  $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  für jedes  $x \in X$  konvergieren.

Die Grenzwerte definieren eine Funktion  $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ ,  $x \mapsto \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ .

**gleichmäßig konvergent**, wenn es eine Funktion  $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ ,  $x \mapsto f(x)$  gibt, und für alle  $\epsilon > 0$  ein  $N \in \mathbb{N}$ , so dass  $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$  für  $n \geq N$  und  $x \in X$  gilt.

Gleichmäßig konvergente Folgen sind punktweise konvergent, aber nicht umgekehrt.

**Beispiel 5.24.** Die Folge von Funktionen  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto x^n$  konvergiert wegen Satz 3.4 punktweise gegen die Funktion

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } x \in [0, 1) \\ 1 & \text{für } x = 1 \end{cases}$$

Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt  $\lim_{m \rightarrow \infty} (1 - 1/m)^n = 1$  und damit  $\sup\{|f_n(x) - f(x)| \mid x \in [0, 1]\} = \sup\{x^n \mid x \in [0, 1)\} = 1$ . Also konvergiert die Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  nicht gleichmäßig gegen  $f$ .

**Definition 5.25.** Sei  $X$  eine Teilmenge von  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ . Die Menge aller stetigen Funktionen von  $X$  nach  $\mathbb{K}$  bezeichnen wir mit  $C(X, \mathbb{K})$ . Eine Funktion  $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ ,  $x \mapsto f(x)$  heißt beschränkt, wenn das Bild  $f[X]$  eine beschränkte Menge ist.  $B(X, \mathbb{K})$ , bezeichne die Menge aller beschränkten Funktionen auf  $X$ .  $C(X, \mathbb{K})$  und  $B(X, \mathbb{K})$  sind offenbar  $\mathbb{K}$ -Algebren. Auf  $B(X, \mathbb{K})$  bezeichne  $\|\cdot\|_\infty$  folgende Abbildung:

$$\|\cdot\|_\infty : B(X, \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f \mapsto \|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| \mid x \in X\}.$$

**Satz 5.26.** Auf einer kompakten Teilmenge  $X \subset \mathbb{K}$  sind alle stetigen reellen Funktionen beschränkt. Das Bild einer solchen Funktion besitzt Minimum und Maximum.

**Beweis:** Wegen Satz 5.17 ist das Bild jeder kompakten Teilmenge  $X \subset \mathbb{K}$  unter einer stetigen Abbildung kompakt und wegen Heine-Borel beschränkt. Für reelle Funktionen besitzt es wegen Korollar 5.11 ein Maximum und ein Minimum. **q.e.d.**

Dieser Satz hat viele Anwendungen, z.B. den Fundamentalsatz der Algebra.

**Satz 5.27.** Sei  $X$  eine Teilmenge von  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ . Dann ist der Grenzwert  $f$  einer gleichmäßig konvergenten Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $C(X, \mathbb{K})$  auch stetig.

**Beweis:** Für alle  $\epsilon > 0$  gibt es ein  $N$ , so dass  $|f(y) - f_n(y)| \leq \frac{\epsilon}{3}$  für alle  $n \geq N$  und alle  $y \in X$  gilt. Dann gibt es für alle  $x \in X$  ein  $\delta > 0$ , so dass  $|f_N(x) - f_N(y)| < \frac{\epsilon}{3}$  für alle  $y \in X$  mit  $|x - y| < \delta$  gilt. Dann folgt für diese  $x$  und  $y$

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(y)| + |f_N(y) - f(y)| < \epsilon. \quad \mathbf{q.e.d.}$$

# Kapitel 6

## Stetige Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

### 6.1 Umkehrfunktionen

**Satz 6.1** (Zwischenwertsatz). *Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto f(x)$  stetig. Dann enthält das Bild  $f[[a, b]]$  das abgeschlossene Intervall  $[\min\{f(a), f(b)\}, \max\{f(a), f(b)\}]$ .*

**Beweis:** Für  $f(a) = f(b)$  ist die Aussage trivial. Sei  $y$  eine reelle Zahl im offenen Intervall zwischen  $f(a)$  und  $f(b)$  und  $A = f^{-1}[(-\infty, y]]$  für  $f(a) < f(b)$  bzw.  $A = f^{-1}[[y, \infty))$  für  $f(a) > f(b)$ . Diese Menge enthält  $a$ , ist beschränkt und wegen der Stetigkeit von  $f$  abgeschlossen. Also ist  $A$  kompakt und besitzt ein Maximum  $x = \max A$  mit  $f(x) \leq y$  für  $f(a) < f(b)$  bzw.  $f(x) \geq y$  für  $f(a) > f(b)$ . Weil  $y$  zwischen  $f(a)$  und  $f(b)$  liegt, ist  $x < b$  und für alle  $z \in (x, b]$  liegt  $f(z)$  auf der selben Seite von  $y$  wie  $f(b)$ . Sei  $(x_n)_n$  eine Folge in  $(x, b]$ , die gegen  $x$  konvergiert. Dann gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x)$  und  $f(x) \geq y$  für  $f(a) < f(b)$  bzw.  $f(x) \leq y$  für  $f(a) > f(b)$ . Also ist  $f(x) = y$  und das Bild von  $f$  enthält neben  $f(a)$  und  $f(b)$  alle reellen Zahlen zwischen  $f(a)$  und  $f(b)$ . **q.e.d.**

**Korollar 6.2.** *Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall und  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann ist  $f[I]$  ein Intervall.*

**Beweis:** Sei  $J = f[I]$ . Für  $a < b$  und  $a, b \in J$  folgt aus dem Zwischenwertsatz  $[a, b] \subset J$ . Dann enthält  $J$  alle reelle Zahlen, die weder eine untere noch eine obere Schranke von  $J$  sind, also  $(\inf J, \sup J)$ . Jenachdem, ob  $\min J$  bzw.  $\max J$  existiert, ist dann  $J$  eines der Intervalle  $(\inf J, \sup J)$ ,  $[\min J, \sup J)$ ,  $(\inf J, \max J]$  oder  $[\min J, \max J]$ . Dabei ist  $\inf J = -\infty$  bzw.  $\sup J = \infty$  wenn  $J$  keine untere bzw. obere Schranke hat. **q.e.d.**

Die Injektivität von solchen Funktionen ist äquivalent zur strengen Monotonie:

**Definition 6.3** (Monotonie). *Eine Funktion  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto f(x)$  auf einer Teilmenge  $X$  von  $\mathbb{R}$  heißt*

**monoton wachsend**, wenn  $f(x) \leq f(x')$  für alle  $x, x' \in X$  mit  $x \leq x'$  gilt

**streng monoton wachsend**, wenn  $f(x) < f(x')$  für alle  $x, x' \in X$  mit  $x < x'$  gilt.

**monoton fallend**, wenn  $f(x) \geq f(x')$  für alle  $x, x' \in X$  mit  $x \leq x'$  gilt.

**streng monoton fallend**, wenn  $f(x) > f(x')$  für alle  $x, x' \in X$  mit  $x < x'$  gilt.

**Satz 6.4.** Eine stetige reelle Funktion  $f$  auf einem Intervall ist genau dann injektiv, wenn  $f$  entweder streng monoton wachsend oder streng monoton fallend ist.

**Beweis:** Eine auf einem Intervall stetige Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  ist genau dann streng monoton, wenn  $f(b) - f(a)$  für alle  $a < b \in I$  nicht verschwindet und das Vorzeichen unabhängig von der Wahl von  $a < b \in I$  ist, also auch wenn für alle  $a < b < c \in I$  die beiden Differenzen  $f(b) - f(a)$  und  $f(c) - f(b)$  nicht verschwinden und untereinander das gleiche Vorzeichen haben, also  $f(b)$  zwischen  $f(a)$  und  $f(c)$  liegt. Gilt das für  $a < b < c$  nicht, dann nimmt  $f$  wegen dem Zwischenwertsatz die Werte nahe bei  $f(b)$ , die auf der gleichen Seite wie  $f(a)$  und  $f(c)$  liegen, die also sowohl zwischen  $f(a)$  und  $f(b)$  als auch zwischen  $f(b)$  und  $f(c)$  liegen, sowohl in  $(a, b)$  als auch in  $(b, c)$  an. Dann ist  $f$  nicht injektiv. Umgekehrt folgt aus der strengen Monotonie die Injektivität. **q.e.d.**

**Korollar 6.5.** Sei  $f$  eine reelle, stetige und injektive Funktion auf einem Intervall  $I$ . Dann ist die Umkehrfunktion  $f^{-1} : f[I] \rightarrow I$  stetig.

**Beweis:** Jedes  $x \in I$  besitzt eine Umgebung in  $I$ , die ein abgeschlossenes beschränktes Intervall ist. Das Bild solcher kompakter Intervalle ist wegen dem vorangehenden Satz und Korollar 6.2 eine Umgebung von  $f(x)$  in dem Intervall  $f[I]$ . Dann ist  $f^{-1}$  wegen Korollar 5.18 auf dieser Umgebung von  $f(x)$  stetig. Also ist  $f^{-1}$  auf  $f[I]$  stetig. **q.e.d.**

**Beispiel 6.6.** Für  $k \in \mathbb{N}$  ist  $[0, \infty) \rightarrow [0, \infty), x \mapsto x^k$  streng monoton wachsend. Dann ist die Umkehrabbildung  $[0, \infty) \rightarrow [0, \infty), x \mapsto x^{\frac{1}{k}}$  stetig und streng monoton wachsend. Dasselbe gilt für die Abbildung  $[0, \infty) \rightarrow [0, \infty), x \mapsto x^{\frac{p}{q}}$  mit Umkehrabbildung  $[0, \infty) \rightarrow [0, \infty), x \mapsto x^{\frac{q}{p}}, p, q \in \mathbb{N}$ . Für negative  $\frac{p}{q}$  sind diese Abbildungen von  $(0, \infty)$  nach  $(0, \infty)$  streng monoton fallend.

**Satz 6.7.** Sei  $f$  eine monoton wachsende (fallende) Funktion von einem Intervall  $I$  nach  $\mathbb{R}$ . Dann ist die Menge aller Unstetigkeitsstellen von  $f$  höchstens abzählbar.

**Beweis\*:** Wir betrachten monoton wachsende Funktionen. Für monoton fallende Funktionen verläuft der Beweis analog. Für jeden inneren Punkt  $\xi$  von  $I$  sei  $f(\xi_-) = \sup\{f(x) \mid x \in I \text{ und } x < \xi\}$  und  $f(\xi_+) = \inf\{f(x) \mid x \in I \text{ und } \xi < x\}$ . Wenn  $f(\xi_-) = f(\xi_+)$ , dann gibt es für jedes  $\epsilon > 0$  Punkte  $x_-, x_+ \in I$  mit  $x_- < \xi < x_+$  und

$$f(\xi_-) - \epsilon < f(x_-) \leq f(\xi_-) = f(\xi_+) \leq f(x_+) < f(\xi_+) + \epsilon.$$

Wegen der Monotonie gilt  $f(\xi_-) \leq f(\xi) \leq f(\xi_+)$ . Dann gilt für alle  $x \in [x_-, x_+]$  auch

$$-\epsilon < f(x_-) - f(\xi_-) \leq f(x) - f(\xi) \leq f(x_+) - f(\xi_+) < \epsilon.$$

Also ist  $f$  bei solchen  $\xi$  stetig. Wenn  $f$  bei  $\xi$  stetig ist gilt  $f(\xi_-) = f(\xi) = f(\xi_+)$ . Die Unstetigkeitsstellen im Inneren von  $I$  bestehen also aus den  $\xi$  mit  $f(\xi_-) < f(\xi_+)$ . Wegen

der Monotonie sind die offenen Intervall  $(f(\xi_-), f(\xi_+))$  paarweise disjunkt. Wir wählen in jedem eine rationale Zahl und erhalten eine injektive Abbildung von den Unstetigkeitsstellen im Inneren von  $I$  nach  $\mathbb{Q}$ . Damit sind die Unstetigkeitsstellen gleichmächtig zu einer Teilmenge der rationalen Zahlen also höchstens abzählbar. **q.e.d.**

## 6.2 Exponentialfunktion und Logarithmus

**Satz 6.8** (Eigenschaften von  $\exp$ ). **(i)**  $e^0 = \exp(0) = 1$  und  $e^1 = \exp(1) = e$ .

**(ii)**  $e^x > \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$  für jedes  $n \in \mathbb{N}_0$  und  $x > 0$ .

**(iii)** Für  $x, y \in \mathbb{R}$  folgt  $e^x < e^y$  aus  $x < y$ .

**(iv)**  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ ,  $x \mapsto e^x$  ist bijektiv.

**Beweis:** **(i)** und **(ii)** folgen aus der Definition.

**(iii)** Aus  $x < y$  folgt  $y - x > 0$ . Dann gilt wegen **(ii)**  $e^{y-x} > 1$ . Wegen Satz 4.21 **(i)** und **(ii)** gilt dann  $e^y - e^x = (e^{y-x} - 1)e^x > 0$ . Also folgt  $e^x < e^y$ .

**(iv)** Offenbar ist die Funktion wegen **(iii)** injektiv. Wegen  $e > 1$  und Satz 3.4 gibt es für jedes  $y \in (0, \infty)$  zwei  $n, m \in \mathbb{N}$  mit  $e^{-n} < y < e^m$ . Wegen dem Zwischenwertsatz gehört dann  $y$  zum Bild von  $[-n, m] \rightarrow (0, \infty)$ ,  $x \mapsto e^x$ . **q.e.d.**

**Definition 6.9** (natürlicher Logarithmus). Die Umkehrfunktion von  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ ,  $x \mapsto e^x$  heißt natürlicher Logarithmus:  $\ln : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \ln x$ .

Wegen Korollar 6.5 ist der Logarithmus stetig.

**Satz 6.10** (Eigenschaften von  $\ln$ ). **(i)**  $\ln(1) = 0$ .

**(ii)**  $\ln(e) = 1$ .

**(iii)**  $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$  für alle  $x, y \in (0, \infty)$ .

**(iv)**  $a^r = e^{\ln(a) \cdot r}$  für alle  $r \in \mathbb{Q}$  und  $a \in (0, \infty)$ .

**(v)**  $\ln(e^{\ln(a)x}) = x \ln(a)$  für alle  $a \in (0, \infty)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

**(vi)** Für  $x, y \in (0, \infty)$  folgt  $\ln(x) < \ln(y)$  aus  $x < y$ .

**(vii)**  $\ln : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \ln(x)$  ist bijektiv.

**Beweis:** **(i)**  $\Leftrightarrow e^0 = 1$  und **(ii)**  $\Leftrightarrow e^1 = e$  und **(iii)**  $\Leftrightarrow e^{\ln(x)+\ln(y)} = (e^{\ln(x)})(e^{\ln(y)})$ .

**(iv)** Für  $r = \frac{p}{q}$  mit  $p \in \mathbb{Z}$  und  $q \in \mathbb{N}$  gilt  $(e^{\ln(a)\frac{p}{q}})^q = e^{\ln(a)p} = a^p$  und  $e^{\ln(a)\frac{p}{q}} > 0$ . Wegen der Eindeutigkeit der  $q$ -ten Wurzel folgt  $e^{\ln(a)\frac{p}{q}} = a^{\frac{p}{q}}$ .

**(v)** ist offensichtlich.

**(vi)** folgt aus **(iii)** des vorhergehenden Satzes.

**(vii)** folgt aus **(iv)** des vorhergehenden Satzes. **q.e.d.**

**Definition 6.11.** Für alle  $a > 0$  und alle  $x \in \mathbb{R}$  sei  $a^x = e^{x \ln(a)}$

**Satz 6.12** (Eigenschaften von  $a^x$ ). **(i)**  $a^{x+y} = a^x a^y$  für alle  $a \in (0, \infty)$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$ .

**(ii)**  $(a^x)^y = a^{xy}$  für alle  $a \in (0, \infty)$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$ .

**(iii)** Für  $a > 1$  und  $x, y \in \mathbb{R}$  folgt  $a^x < a^y$  aus  $x < y$ .

**(iv)** Für  $0 < a < 1$  und  $x, y \in \mathbb{R}$  folgt  $a^x > a^y$  aus  $x < y$ .

**(v)** Für  $a \in (0, \infty) \setminus \{1\}$  ist  $a^x : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ ,  $x \mapsto a^x$  bijektiv und stetig.

**Beweis:** **(i)**  $a^{x+y} = e^{x \ln(a) + y \ln(a)} = e^{x \ln(a)} e^{y \ln(a)} = a^x a^y$ .

**(ii)**  $(a^x)^y = e^{y \ln(e^{x \ln(a)})} = e^{y \cdot x \ln(a)} = a^{xy}$ .

**(iii)** Für  $a > 1$  ist  $\ln(a) > 0$ . Also folgt  $x \ln(a) < y \ln(a)$  und  $a^x < a^y$  aus  $x < y$ .

**(iv)** Für  $a < 1$  ist  $\ln(a) < 0$ . Also folgt  $x \ln(a) > y \ln(a)$  und  $a^x > a^y$  aus  $x < y$ .

**(v)** Für  $a \in (0, \infty) \setminus \{1\}$  ist  $\ln(a) \neq 0$ . Also ist  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \ln(a)x$  bijektiv und stetig, und damit auch  $\mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ ,  $x \mapsto \exp(\ln(a)x)$ . **q.e.d.**

**Definition 6.13** (des Logarithmus zur Basis  $a$ ). Für alle  $a \in (0, \infty) \setminus \{1\}$  sei  $\log_a : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$  die Umkehrfunktion von  $a^x$ .

**Satz 6.14** (Eigenschaften des Logarithmus zur Basis  $a$ ). **(i)**  $\log_a(1) = 0$

**(ii)**  $\log_a(a) = 1$

**(iii)**  $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$

**(iv)** Für  $a > 1$  und  $x, y \in (0, \infty)$  folgt  $\log_a(x) < \log_a(y)$  aus  $x < y$ .

**(v)** Für  $0 < a < 1$  und  $x, y \in (0, \infty)$  folgt  $\log_a(x) > \log_a(y)$  aus  $x < y$ .

**(vi)**  $\log_a : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \log_a(x)$  ist bijektiv und stetig.

Beweis analog zum Beweis der Eigenschaften von  $\ln$ .

**q.e.d.**

## 6.3 Trigonometrische Funktionen

**Satz 6.15.** **(i)** Für alle  $x \in [-5, 5] \setminus \{0\}$  gilt  $1 - \frac{x^2}{2} < \cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$ .

**(ii)** Für alle  $x \in [-6, 6] \setminus \{0\}$  gilt  $1 - \frac{x^2}{6} < \frac{\sin x}{x} < 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120}$ .

**(iii)**  $\cos : [0, \sqrt{6}] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \cos(x)$  ist streng monoton fallend.

**(iv)**  $\cos$  hat auf  $[0, 2]$  genau eine Nullstelle, die wir mit  $\frac{\pi}{2}$  bezeichnen.

(v)  $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \quad \exp\left(i\frac{\pi}{2}\right) = i.$

(vi)  $\cos(n\pi) = (-1)^n \quad \sin(n\pi) = 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

(vii)  $\cos\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi\right) = 0 \quad \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi\right) = (-1)^n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

(viii)  $\cos(x + n\pi) = (-1)^n \cos(x)$  und  $\sin(x + n\pi) = (-1)^n \sin(x)$

(ix)  $\cos\left(x + \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi\right) = -(-1)^n \sin(x)$  und  $\sin\left(x + \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi\right) = (-1)^n \cos(x).$

(x)  $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1], \quad x \mapsto \sin(x)$  ist streng monoton steigend und bijektiv.

(xi)  $\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1], \quad x \mapsto \cos(x)$  ist streng monoton fallend und bijektiv.

**Beweis:**(i) Für alle  $x \in [-5, 5]$  und  $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$  gilt  $0 \leq \frac{x^2}{(2k+1)(2k+2)} < 1$ . Also ist für  $x \in [-5, 5] \setminus \{0\}$  die Folge  $\left(\frac{x^{2k}}{(2k)!}\right)_{k \in \mathbb{N}_0 \setminus \{0,1\}}$  streng monoton fallend und positiv. Für diese  $x \in [-5, 5] \setminus \{0\}$  folgt dann  $1 - \frac{x^2}{2} < \cos(x) < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$  wie im Beweis zu Satz 4.14.

(ii) Für  $x \in [-6, 6]$  und  $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$  gilt  $0 \leq \frac{x^2}{(2k+2)(2k+3)} < 1$ . Also ist für  $x \in [-6, 6] \setminus \{0\}$  die Folge  $\left(\frac{x^{2k}}{(2k+1)!}\right)_{k \in \mathbb{N}_0 \setminus \{0,1\}}$  streng monoton fallend und positiv. Für diese  $x \in [-6, 6] \setminus \{0\}$  folgt wieder  $1 - \frac{x^2}{6} < \frac{\sin x}{x} < 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120}$  wie im Beweis von Satz 4.14.

(iii) Für  $x, y \in [0, \sqrt{6}]$  mit  $x < y$  gilt  $0 < \frac{y \pm x}{2} \leq \sqrt{6}$ . Aus (ii) und dem Additionstheorem folgt  $\cos(x) - \cos(y) = \cos\left(\frac{y+x}{2} - \frac{y-x}{2}\right) - \cos\left(\frac{y+x}{2} + \frac{y-x}{2}\right) = 2 \sin\left(\frac{y+x}{2}\right) \sin\left(\frac{y-x}{2}\right) > 0$ .

(iv)  $\sin$  und  $\cos$  sind wegen Beispiel 5.21 stetig auf ganz  $\mathbb{R}$ . Wegen (i) ist  $\cos(2) < 1 - 2 + \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}$ . Dann folgt aus dem Zwischenwertsatz, dass es eine Nullstelle in  $[0, 2]$  gibt. Wegen (iii) kann es höchstens eine Nullstelle geben.

(v) Wegen  $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$  folgt aus (iv)  $\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$  und aus (ii)  $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0$ . Also gilt  $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ . Dann folgt aus der Eulerschen Formel  $\exp\left(i\frac{\pi}{2}\right) = i$ .

(vi) Wegen (v) folgt aus der Eulerschen Formel  $\exp(ni\pi) = (i)^{2n} = (-1)^n$ , also  $\cos(n\pi) = (-1)^n$  und  $\sin(n\pi) = 0$ .

(vii) Wegen (v) folgt aus der Eulerschen Formel:  $\exp\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)i\pi\right) = (-1)^n i$  also  $\cos\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi\right) = 0$  und  $\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi\right) = (-1)^n$ .

(viii) Wegen (vi) folgt aus der Eulerschen Formel  $\cos(x + n\pi) + i \sin(x + n\pi) = \exp(ix + ni\pi) = \exp(ix)(-1)^n = (-1)^n(\cos(x) + i \sin(x))$ , also (viii).

(ix) Wegen (vii) folgt aus der Eulerschen Formel  $\cos\left(x + \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi\right) + i \sin\left(x + \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi\right) = \exp\left(ix + \left(n + \frac{1}{2}\right)i\pi\right) = \exp(ix)(-1)^n i = (-1)^n(i \cos(x) - \sin(x))$ , also (ix).

(x) Aus (ix) folgt  $\sin(x) = \begin{cases} -\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) & \text{für } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right] \\ -\sin(-x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) & \text{für } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]. \end{cases}$

Dann folgt (x) aus (iii).

(xi) Aus (viii) folgt  $\cos(x) = \begin{cases} \cos(x) & \text{für } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ \cos(-x) = -\cos(\pi - x) & \text{für } x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]. \end{cases}$

Dann folgt (xi) aus (iii).

**q.e.d.**

Die Umkehrfunktionen von (xi) und (x) heißen

$$\begin{array}{lll} \text{Arcuscosinus} & \arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi], & x \mapsto \arccos(x), \\ \text{Arcussinus} & \arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], & x \mapsto \arcsin(x). \end{array}$$

Arcuscosinus ist wegen (xi) streng monoton fallend und Arcussinus wegen (x) streng monoton wachsend. Beide sind wegen Korollar 6.5 stetig. Wegen (ix) gilt  $\sin(-x) = -\sin(x) = \cos(\frac{\pi}{2} + x)$  und  $\arccos(x) = \frac{\pi}{2} + \arcsin(-x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(x)$ .

**Definition 6.16** (Tangens und Cotangens).

$$\tan : \mathbb{R} \setminus (\frac{\pi}{2} + \mathbb{Z}\pi) \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \quad \cot : \mathbb{R} \setminus (\mathbb{Z}\pi) \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{\cos(x)}{\sin(x)}.$$

Beachte  $\tan(x + \pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\sin(x)}{-\cos(x)} = \tan(x)$  und  $\cot(x + \pi) = \cot(x)$ .

**Satz 6.17. (i)**  $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$  ist streng monoton steigend, stetig und bijektiv.

**(ii)**  $\cot : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \cot(x)$  ist streng monoton fallend, stetig und bijektiv.

**Beweis:** Auf  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$  ist  $\sin$  streng monoton steigend und  $\cos$  streng monoton fallend und beide positiv. Also ist  $\tan$  streng monoton steigend und positiv. Aus  $\tan(-x) = -\tan(x)$  folgt, dass  $\tan$  auf  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  streng monoton steigend ist.

Für  $x \notin \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$  gilt  $\cot(x) = \frac{1}{\tan(x)}$  und für  $x \notin \pi\mathbb{Z}$  wegen Satz 6.15 (ix)  $\tan(x - \frac{\pi}{2}) = -\cot(x)$ . Also ist  $\cot$  auf  $(0, \pi)$  streng monoton fallend.

Beide Funktionen  $\tan$  und  $\cot$  sind wegen Beispiel 5.19 (iii) stetig. Dann sind die Folgen  $(\tan(\frac{1}{n}))_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(-\tan(\pi - \frac{1}{n}))_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(\cot(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}))_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(-\cot(-\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n}))_{n \in \mathbb{N}}$  identische streng monoton fallende positive Nullfolgen. Dann gilt auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tan(-\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \cot(\pi - \frac{1}{n}) = -\infty \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \cot(\frac{1}{n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tan(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}) = \infty.$$

Also sind  $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$  und  $\cot : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$  wegen Satz 6.1 surjektiv. **q.e.d.**

Die Umkehrfunktionen von  $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$  und  $\cot : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$  heißen

$$\begin{array}{ll} \text{Arcustangens} : \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), & x \mapsto \arctan(x), \\ \text{Arcuscotangens} : \mathbb{R} \rightarrow (0, \pi), & x \mapsto \operatorname{arccot}(x). \end{array}$$

Beide Funktionen sind wegen Satz 6.17 streng monoton und wegen Korollar 6.5 stetig. Wegen Satz 6.15 (ix) gilt  $\cot(x + \frac{\pi}{2}) = \tan(-x)$  and  $\operatorname{arccot}(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x)$ .

## 6.4 Fundamentalsatz der Algebra

Wir übertragen unsere Erkenntnisse auf die komplexe Exponentialfunktion.

**Satz 6.18** (Polardarstellung von  $z \in \mathbb{C}$ ). *Jede komplexe Zahl hat die Darstellung:*

$$z = re^{i\varphi} \text{ mit } r = |z| \text{ und } \varphi \in \mathbb{R}.$$

Für  $z \neq 0$  ist  $\varphi$  bis auf Addition von  $2\pi n$  eindeutig und heißt Argument von  $z$ .

**Beweis:** Der Fall  $z = 0$  ist trivial. Sei  $z = x + iy \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Für  $y \geq 0$  sei  $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$  und  $\varphi = \arccos(\frac{x}{r}) \in [0, \pi]$ . Dann gilt  $x = r \cos(\varphi)$  und  $r \sin(\varphi) \geq 0$ . Aus  $\frac{y^2}{x^2 + y^2} + \frac{x^2}{x^2 + y^2} = 1$  folgt  $y = r \sin(\varphi)$ . Wegen der Eulerschen Formel gilt dann

$$z = re^{i\varphi} = r \cos(\varphi) + ir \sin(\varphi) = x + iy.$$

Für  $y < 0$  sei  $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$  und  $\varphi = -\arccos(\frac{x}{r}) \in [-\pi, 0]$ . Wegen  $x = r \cos(-\varphi) = r \cos(\varphi)$  und  $r \sin(\varphi) \leq 0$  folgt wieder

$$z = re^{i\varphi} = r \cos(\varphi) + ir \sin(\varphi) = x + iy.$$

Für  $(r, \varphi), (s, \vartheta) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}$  folgt  $r = |re^{i\varphi}| = |se^{i\vartheta}| = s$  aus  $re^{i\varphi} = se^{i\vartheta}$  und für  $r = s \neq 0$  auch  $e^{i\varphi}e^{-i\vartheta} = e^{i(\varphi - \vartheta)} = 1$ , was äquivalent ist zu  $\varphi - \vartheta = 2\pi n$ . **q.e.d.**

Die Multiplikation mit  $e^{i\varphi}$  wirkt auf  $z = x + iy$  wie  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ . Diese lineare Abbildung der komplexen Zahlenebene interpretieren wir als Drehung, weil sie die Länge  $\sqrt{x^2 + y^2} = |z| = |e^{i\varphi}z|$  und das Skalarprodukt erhält und Determinante 1 hat. Weil sie 1 auf  $e^{i\varphi}$  abbildet, entspricht sie dem Winkel zwischen 1 und  $e^{i\varphi}$ . Im rechtwinkligen Dreieck ist mit diesem Winkel und auf 1 normierter Hypothenuse  $\cos(\varphi)$  die gerichtete Länge der Ankathete und  $\sin(\varphi)$  die gerichtete Länge der Gegenkathete.

Für kleine  $\varphi > 0$  gilt  $\varphi - \frac{\varphi^3}{6} < \sin(\varphi) < L(\varphi) < \sin(\varphi) + 1 - \cos(\varphi) < \varphi + \frac{\varphi^2}{2}$  für die Länge  $L(\varphi)$  des Kreissegmentes zwischen 1 und  $e^{i\varphi}$ . Wir unterteilen dieses Kreissegment in  $n$  gleichgroße Kreissegmente:  $e^{i\varphi} = (e^{i\frac{\varphi}{n}})^n$ . Das ergibt  $L(\varphi) = \lim_{n \rightarrow \infty} nL(\frac{\varphi}{n}) = \varphi$ . Also entspricht  $\varphi$  einem Winkel, dessen Kreissegment im Einheitskreis die Länge  $\varphi$  hat.

**Korollar 6.19.**  $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$  ist surjektiv und  $\exp(z) = \exp(z') \Leftrightarrow z - z' \in 2\pi i\mathbb{Z}$ .

**Beweis:** Sei  $z = x + iy \in \mathbb{C}$ . Dann gilt  $e^z = e^x e^{iy}$ . Also folgt das Korollar aus dem Satz 6.18 und der Bijektivität von  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ , Satz 6.8 (iv). **q.e.d.**

**Korollar 6.20.** Für  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  und  $n \in \mathbb{N}$  gibt es genau  $n$   $w_1, \dots, w_n \in \mathbb{C}$  mit  $w^n = z$ .

**Beweis:** Seien  $(r, \varphi)$  die Polarkoordinaten von  $z$ . Dann müssen die Polarkoordinaten  $(s, \vartheta) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}$  der Lösungen von  $w^n = z$  die Gleichungen  $n\vartheta = \varphi + 2\pi m$  mit  $m \in \mathbb{Z}$  und  $s^n = r$  erfüllen. Also sind die Lösungen gegeben durch  $s = \sqrt[n]{r}$  und  $\vartheta_m = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi m}{n}$ , wobei zwei Lösungen  $(s, \vartheta_m)$  und  $(s, \vartheta_{m'})$  genau dann übereinstimmen, wenn  $\frac{m - m'}{n} \in \mathbb{Z}$ . Also ergeben  $m = 0, \dots, n - 1$  alle Lösungen. **q.e.d.**

**Satz 6.21** (Fundamentalsatz der Algebra). *Jedes komplexe Polynom  $p(z) = a_n z^n + \dots + a_0$  mit  $a_n \neq 0$  und  $n \in \mathbb{N}$  hat mindestens eine Nullstelle auf  $z \in \mathbb{C}$ .*

**Beweis:** Wir zeigen zuerst, dass  $z \mapsto |p(z)|$  ein Minimum  $z_0$  hat. Danach zeigen wir mit dem Spezialfall in dem vorangehenden Korollar, dass beim Minimum  $p(z_0) = 0$  gilt.

Für  $|z| \geq R = 1 + 2 \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| + \dots + 2 \left| \frac{a_0}{a_n} \right| \geq 1$  gilt

$$\begin{aligned} \left| \frac{p(z)}{z^n} \right| &= \left| a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \dots + \frac{a_0}{z^n} \right| + \left| -\frac{a_{n-1}}{z} - \dots - \frac{a_0}{z^n} \right| - \left| -a_n \left( \frac{a_{n-1}}{a_n z} + \dots + \frac{a_0}{a_n z^n} \right) \right| \\ &\geq |a_n| - |a_n| \left| \frac{a_{n-1}}{a_n z} + \dots + \frac{a_0}{a_n z^n} \right| \geq |a_n| \left( 1 - \frac{\left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| + \dots + \left| \frac{a_0}{a_n} \right|}{|z|} \right) > |a_n| \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Also ist  $|p(z)| > \frac{|a_n|}{2} |z|^n \geq \frac{|a_n|}{2} |z| > \frac{|a_n|}{2} 2 \frac{|a_0|}{|a_n|} = |a_0| = |p(0)|$  für alle  $z \notin B(0, R)$ . Auf der kompakten Menge  $\overline{B(0, R)}$  nimmt  $z \mapsto |p(z)|$  wegen Satz 5.26 das Minimum bei einem  $z_0$  an. Dieses liegt in  $B(0, R)$  und ist dann das Minimum auf ganz  $z \in \mathbb{C}$ .

Wir zeigen jetzt  $p(z_0) = 0$ . Andernfalls sei  $p(y + z_0) = b_n y^n + \dots + b_0$  das entsprechende Polynom in  $y = z - z_0$  mit  $b_n = a_n \neq 0$  und  $b_0 = p(z_0) \neq 0$ . Sei  $m$  das kleinste  $m > 0$  mit  $b_m \neq 0$ . Für  $|y| \leq r = \frac{1}{1 + 2 \left| \frac{b_{m+1}}{b_m} \right| + \dots + 2 \left| \frac{b_n}{b_m} \right|} \leq 1$  gilt dann

$$|b_{m+1} y^{m+1} + \dots + b_n y^n| \leq |b_m| |y|^m \left( \left| \frac{b_{m+1}}{b_m} \right| |y| + \dots + \left| \frac{b_n}{b_m} \right| |y| \right) \leq \frac{|b_m| |y|^m}{2}.$$

Also gilt  $|p(z_0 + y)| \leq |b_0 + b_m y^m| + \frac{|b_m| |y|^m}{2}$ .

Sei  $w$  eine Lösung der Gleichung  $w^m b_m = -b_0$ . Dann gilt für alle  $t \in \mathbb{C}$  mit  $|tw| \leq r$

$$|p(z_0 + tw)| \leq |b_0| |1 - t^m| + \frac{|b_0|}{2} |t|^m.$$

Insbesondere gilt  $|p(z_0 + tw)| \leq |b_0| \left( 1 - \frac{t^m}{2} \right) < |b_0|$  für alle  $0 < t \leq \min \left\{ 1, \frac{r}{|w|} \right\}$ .

Also sind alle  $z_0 \in \mathbb{C}$  mit  $p(z_0) \neq 0$  keine Minima von  $z \mapsto |p(z)|$ . **q.e.d.**

**Korollar 6.22.** *Jedes komplexe Polynom vom Grad  $n \in \mathbb{N}$  zerfällt in ein Produkt von Polynomen ersten Grades.*

**Beweis** durch vollständige Induktion: (i) für  $n = 1$  ist die Aussage trivial.

(ii) Die Aussage gelte für  $n \in \mathbb{N}$ . Sei  $p$  ein beliebiges Polynom  $(n+1)$ -ten Grades. Wegen dem Fundamentalsatz der Algebra hat  $p$  eine Nullstelle bei  $z_0 \in \mathbb{C}$ . Wir schreiben  $p$  als  $a_{n+1}(u + z_0)^{n+1} + \dots + a_1(u + z_0) + a_0 = b_{n+1}u^{n+1} + \dots + b_1u + p(z_0)$ , und erhalten  $p$  als Produkt von  $u = z - z_0$  mit dem Polynom  $b_{n+1}(z - z_0)^n + \dots + b_1$ , das wegen der Induktionsvoraussetzung in ein Produkt von Polynomen ersten Grades zerfällt. **q.e.d.**

# Kapitel 7

## Differenzierbare Funktionen

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$$

### 7.1 Definition der Ableitung

**Definition 7.1.** Sei  $f : X \rightarrow \mathbb{K}$  eine Funktion auf einer Teilmenge  $X$  von  $\mathbb{R}$  (bzw.  $\mathbb{C}$ ), die eine Umgebung von  $x_0 \in X$  ist. Dann heißt  $f$  im Punkt  $x_0$  (komplex) differenzierbar, wenn es ein  $f'(x_0) \in \mathbb{K}$  gibt, so dass die folgende Funktion stetig in  $x_0$  ist:

$$X \rightarrow \mathbb{K}, \quad x \mapsto \begin{cases} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} & \text{für } x \neq x_0 \\ f'(x_0) & \text{für } x = x_0 \end{cases}.$$

Wenn  $X$  offen und  $f$  in allen  $x \in X$  differenzierbar ist, heißt  $f$  differenzierbar und die Funktion  $f' : X \rightarrow \mathbb{K}, \quad x \mapsto f'(x) = \frac{df}{dx}(x)$  heißt Ableitung von  $f$ .

**Satz 7.2.** Sei  $f$  im Punkt  $x_0$  differenzierbar, dann ist  $f$  im Punkt  $x_0$  auch stetig.

**Beweis:**

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) \cdot \begin{cases} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} & \text{für } x \neq x_0 \\ f'(x_0) & \text{für } x = x_0 \end{cases}.$$

Wir benutzen das Kriterium in Satz 5.14 (iii). Dann folgt die Aussage aus der Stetigkeit von  $x \mapsto x - x_0$  und den Rechenregeln für Folgen in Satz 3.5 (i) und (iii). **q.e.d.**

**Definition 7.3.** Das Differential von  $f$  im Punkt  $x_0$  ist die lineare Abbildung  $df(x_0) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}, \quad h \mapsto f'(x_0)h$ . Die Gerade  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)\}$  heißt für  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  Tangente an den Graphen von  $f$  im Punkt  $(x_0, f(x_0))$ . Dabei ist

$$\text{Graph}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x)\}.$$

Die Sekante durch zwei Punkte  $(x_0, f(x_0)) \neq (x_1, f(x_1))$  des Graphen ist gegeben durch

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x_0) + \frac{x-x_0}{x_1-x_0}(f(x_1) - f(x_0))\}.$$

Im Grenzwert  $x_1 \rightarrow x_0$  nähert sich die Sekante durch die Punkte  $(x_0, f(x_0))$  und  $(x_1, f(x_1))$  an die Tangente an den Graphen von  $f$  im Punkt  $(x_0, f(x_0))$  an.

**Beispiel 7.4.** (i)  $f(x) = |x|$ . Für  $x_0 = 0$  ist  $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ -1 & \text{für } x < 0. \end{cases}$  Also ist  $f$  im Punkt  $x_0 = 0$  stetig aber nicht differenzierbar.

(ii)  $f(x) = c \Rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$  für alle  $x \neq x_0$ . Also ist  $f$  differenzierbar mit  $f'(x) = 0$ .

(iii)  $f(x) = x \Rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 1$  für alle  $x \neq x_0$ . Also ist  $f$  differenzierbar mit  $f'(x) = 1$ .

(iv)  $f(x) = x^n$  für  $n \in \mathbb{N}$ .  $\Rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = x^{n-1} + x_0 x^{n-2} + \dots + x_0^{n-1}$  für alle  $x \neq x_0$ . Also ist  $f$  differenzierbar mit  $f'(x) = nx^{n-1}$ .

(v) Sei  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  eine Potenzreihenfunktion mit Konvergenzradius  $R > 0$ . Dann ist  $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} x^n$  auch ein Potenzreihe mit Konvergenzradius  $R$  und wegen Satz 4.28 (iv) stetig. Deshalb ist  $f$  in  $x = 0$  differenzierbar mit  $f'(0) = a_1$ . Aus Satz 4.29 (ii) folgt, dass  $f$  für alle  $x \in B(0, R)$  in  $x$  differenzierbar und die Ableitung  $f'(x)$  gegeben ist durch die Potenzreihe  $f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+1}{1} a_{n+1} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$  mit Konvergenzradius  $R$ .

(vi)

$$\exp'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^{n-1}}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \exp(x).$$

(vii)

$$\sin'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k+1) x^{2k}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = \cos(x).$$

(viii)

$$\cos'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 2k x^{2k-1}}{(2k)!} = - \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l x^{2l+1}}{(2l+1)!} = -\sin(x).$$

## 7.2 Rechenregeln der Ableitung

**Satz 7.5.** Seien  $f, g : X \rightarrow \mathbb{K}$  in  $x_0$  differenzierbar und  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Dann sind auch die Funktionen  $\lambda f$ ,  $f + g$  und  $f \cdot g$  in  $x_0$  differenzierbar und es gilt

$$\begin{aligned} (\lambda f)'(x_0) &= \lambda f'(x_0) & (f + g)'(x_0) &= f'(x_0) + g'(x_0) \\ (f \cdot g)'(x_0) &= f'(x_0)g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0) & & \text{(Leibnizregel).} \end{aligned}$$

Wenn  $f(x_0) \neq 0$  dann ist  $X' = f^{-1}[\mathbb{K} \setminus \{0\}]$  wegen Satz 7.2 eine Umgebung von  $x_0$  und  $\frac{1}{f} : X' \rightarrow \mathbb{K}$ ,  $x \mapsto \frac{1}{f(x)}$  in  $x_0$  differenzierbar mit  $\left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) = -\frac{f'(x_0)}{f^2(x_0)}$ .

**Beweis:** Für  $x \neq x_0$  gilt

$$\begin{aligned} \frac{\lambda f(x) - \lambda f(x_0)}{x - x_0} &= \lambda \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} && \text{und} \\ \frac{f(x) + g(x) - (f(x_0) + g(x_0))}{x - x_0} &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x_0 - x_0} && \text{und} \\ \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}g(x) + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}f(x_0) && \text{und} \\ \left(\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(x_0)}\right) \frac{1}{x - x_0} &= -\frac{f(x) - f(x_0)}{f(x)f(x_0)(x - x_0)}. \end{aligned}$$

Also folgt die Aussage aus Beispiel 5.19 und Satz 7.2.

**q.e.d.**

**Satz 7.6** (Kettenregel). Seien  $f : X \rightarrow Y$  und  $g : Y \rightarrow \mathbb{K}$  Funktionen und  $X \subset \mathbb{R}$  eine Umgebung von  $x_0$  und  $Y \subset \mathbb{R}$  eine Umgebung von  $f(x_0)$ . Wenn  $f$  in  $x_0$  differenzierbar ist und  $g$  in  $f(x_0)$ , dann ist  $g \circ f$  in  $x_0$  differenzierbar mit

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

**Beweis:**  $\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ , wobei wir den linken Faktor für  $f(x) = f(x_0) = y_0$  durch  $g'(y_0)$  ersetzen. Dieser linke Faktor ist die Komposition von  $x \mapsto f(x)$  mit  $y \mapsto \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0}$  für  $y \neq y_0$  und  $y_0 \rightarrow g'(y_0)$ , also wegen Satz 5.16 und Satz 7.2 in  $x_0$  stetig. Also folgt die Behauptung aus Beispiel 5.19. **q.e.d.**

**Satz 7.7** (Ableitung der Umkehrfunktion). Sei  $f : X \rightarrow Y$  eine bijektive Funktion von einer Umgebung  $X \subset \mathbb{R}$  von  $x_0$  auf eine Umgebung  $Y \subset \mathbb{R}$  von  $y_0 = f(x_0)$ . Wenn  $f$  in  $x_0$  differenzierbar ist mit  $f'(x_0) \neq 0$  und entweder  $f$  auf einer Umgebung von  $x_0$  oder  $f^{-1}$  in  $y_0$  stetig ist, dann ist auch  $f^{-1}$  in  $y_0$  differenzierbar mit  $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$ .

**Beweis:**  $\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)}$  für  $y = f(x)$  und  $y_0 = f(x_0)$ . Die erste der beiden folgenden Funktionen ist die Komposition von  $y \rightarrow f^{-1}(y)$  mit der zweiten

$$y \mapsto \begin{cases} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} & \text{für } y \neq y_0 \\ \frac{1}{f'(x_0)} & \text{für } y = y_0 \end{cases} \quad x \mapsto \begin{cases} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} & \text{für } x \neq x_0 \Leftrightarrow f(x) \neq f(x_0) \\ \frac{1}{f'(x_0)} & \text{für } x = x_0 \end{cases}.$$

Der Satz folgt aus Korollar 5.16, Beispiel 5.19 (iii) und Korollar 6.5.

**q.e.d.**

**Beispiel 7.8. (i)**  $\ln(0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \ln(x)$

$$\ln'(x) = \frac{1}{\exp'(y)} = \frac{1}{\exp(y)} = \frac{1}{x} \text{ mit } \exp(y) = x.$$

**(ii)**  $\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \quad x \mapsto \arcsin(x)$

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\cos(y)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ mit } \sin(y) = x \text{ und } x^2 \neq 1.$$

**(iii)**  $\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi], \quad x \mapsto \arccos(x)$

$$\arccos'(x) = \frac{-1}{\sin(y)} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ mit } \cos(y) = x \text{ und } x^2 \neq 1.$$

**(iv)**  $\cdot^\alpha : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}.$

$$(\cdot^\alpha)'(x) = \exp(\alpha \ln(x))' = \exp(\alpha \ln(x)) \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

**(v)**  $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto a^x, a \in (0, \infty).$

$$(a)'(x) = \exp(x \cdot \ln(a))' = \exp(x \ln(a)) \cdot \ln(a) = \ln(a) \cdot a^x.$$

**(vi) Quotientenregel.** Seien  $f$  und  $g$  in  $x_0$  differenzierbar und  $g(x_0) \neq 0$ . Dann ist  $\frac{f}{g}$  in  $x_0$  differenzierbar und es gilt

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)}{g(x_0)} - \frac{f(x_0)}{g^2(x_0)} g'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

**(vii)**  $x \mapsto \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

$$\tan'(x) = \frac{\cos(x) \cos(x) - \sin(x)(-\sin(x))}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

**(viii)**  $x \mapsto \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$

$$\cot'(x) = \frac{-\sin(x) \sin(x) - \cos(x) \cos(x)}{\sin^2(x)} = -1 - \cot^2(x) = \frac{-1}{\sin^2(x)}.$$

(ix)  $\arctan : \mathbb{R} \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ,  $x \mapsto \arctan(x)$

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1 + \tan^2(y)} = \frac{1}{1 + x^2} \text{ mit } \tan(y) = x.$$

(x)  $\operatorname{arccot} : \mathbb{R} \rightarrow (0, \pi)$ ,  $x \mapsto \operatorname{arccot}(x)$

$$\operatorname{arccot}'(x) = \frac{-1}{1 + \cot^2(y)} = \frac{-1}{1 + x^2} \text{ mit } \cot(y) = x.$$

(xi)  $\log_a(0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \log_a(x)$   $\log_a'(x) = \left(\frac{\ln(x)}{\ln(a)}\right)' = \frac{1}{x \ln(a)}$ .

(xii)  $x^x : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ ,  $x \mapsto x^x$

$$(x^x)' = \exp(x \cdot \ln(x))' = \exp(x \cdot \ln(x)) \left( \ln(x) + x \frac{1}{x} \right) = (\ln(x) + 1) \cdot x^x.$$

(xiii)  $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$

$$f'(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0 \pm} \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0 \pm} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 & \text{für } x = 0 \\ 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0. \end{cases}$$

Diese Funktion ist zwar differenzierbar, aber  $f'$  ist im Punkt  $x = 0$  nicht stetig.

## 7.3 Mittelwertsatz und Monotonie

**Definition 7.9** (lokale Maxima und Minima). Eine Funktion  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto f(x)$  hat bei  $x_0 \in (a, b)$  ein lokales Maximum bzw. Minimum, falls es ein  $\delta > 0$  gibt, so dass  $f(x) \leq f(x_0)$  bzw.  $f(x) \geq f(x_0)$  für alle  $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$  gilt. Bei strikten Ungleichungen sprechen wir von strikten lokalen Maxima und Minima.

Wenn für eine bei  $x_0$  differenzierbaren Funktion  $f'(x_0)$  nicht verschwindet, dann gibt es ein  $\delta > 0$ , so dass  $\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right| < |f'(x_0)|$  für alle  $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  gilt. Dort hat  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  das gleiche Vorzeichen wie  $f'(x_0)$ . Dann gilt entweder  $f(x) < f(x_0)$  für  $x \in (x_0 - \delta, x_0)$  und  $f(x) > f(x_0)$  für  $x \in (x_0, x_0 + \delta)$  oder  $f(x) > f(x_0)$  für  $x \in (x_0 - \delta, x_0)$  und  $f(x) < f(x_0)$  für  $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ . Das zeigt

**Lemma 7.10.** Ein differenzierbarer lokaler Extremwert ist eine Nullstelle von  $f'$ . **q.e.d.**

**Definition 7.11** (kritischer Punkt und kritischer Wert). *Eine Nullstelle der Ableitung einer differenzierbaren Funktion heißt kritischer Punkt. Der entsprechende Funktionswert heißt kritischer Wert.*

Kandidaten für die lokalen Extremwerte einer stetigen Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  sind

- (i) Kritische Punkte in  $(a, b)$ ,
- (ii) Randpunkte, also entweder  $a$  oder  $b$ ,
- (iii) und Punkte in  $(a, b)$  an denen  $f$  nicht differenzierbar ist.

**Satz 7.12** (Satz von Rolle). *Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und auf  $(a, b)$  differenzierbar. Falls  $f(a) = f(b)$ , dann existiert ein  $x_0 \in (a, b)$  mit  $f'(x_0) = 0$ .*

**Beweis:** Wegen Satz 5.26 gibt es  $x_1, x_2 \in [a, b]$  mit  $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$  für alle  $x \in [a, b]$ . Wenn  $x_1$  und  $x_2$  beide am Rand liegen,  $x_1, x_2 \in \{a, b\}$ , dann muss  $f$  konstant gleich  $f(a) = f(b)$  sein. Also gilt dann  $f'(x) = 0$  für alle  $x \in (a, b)$ . Andernfalls muss es einen lokalen Extremwert in  $(a, b)$  geben, an dem wegen Lemma 7.10  $f' = 0$  ist. **q.e.d.**

**Satz 7.13** (Verallgemeinerter Mittelwertsatz). *Seien  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und auf  $(a, b)$  differenzierbar. Dann existiert ein  $x_0 \in (a, b)$  mit*

$$(f(b) - f(a))g'(x_0) = (g(b) - g(a))f'(x_0), \quad \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} \text{ für } g(b) \neq g(a), g'(x_0) \neq 0.$$

Die Tangente  $(f(x_0), g(x_0)) + \mathbb{R}(f'(x_0), g'(x_0))$  an  $\{(f(x), g(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a, b]\}$  in  $(f(x_0), g(x_0))$  verläuft also parallel zu der Geraden durch  $(f(a), g(a))$  und  $(f(b), g(b))$ .

**Beweis:**  $x \mapsto (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x)$  erfüllt die Voraussetzungen von Satz 7.12. Die Ableitung ist Null für  $(f(b) - f(a))g'(x_0) = (g(b) - g(a))f'(x_0)$ . **q.e.d.**

**Satz 7.14** (Mittelwertsatz). *Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto f(x)$  stetig und auf  $(a, b)$  differenzierbar. Dann existiert ein  $x_0 \in (a, b)$  mit  $f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ .*

**Beweis:** Wende den verallgemeinerten Mittelwertsatz auf  $f$  und  $\mathbb{1}_{[a, b]}$  an. **q.e.d.**

**Satz 7.15** (Schränkensatz). *Eine auf  $(a, b)$  differenzierbare stetige Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ist genau dann Lipschitzstetig, wenn für alle  $x \in (a, b)$  die Lipschitzkonst.  $L \geq |f'(x)|$ .*

**Beweis:** Für  $x < y \in [a, b]$  gibt es wegen dem Mittelwertsatz ein  $x_0 \in (x, y)$  mit  $f(y) - f(x) = f'(x_0)(y - x)$ . Dann folgt  $|f(y) - f(x)| \leq L|y - x|$  aus  $|f'(x_0)| \leq L$ . Umgekehrt folgt  $|f'(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f(x_n) - f(x)}{x_n - x} \right| \leq L$  für  $x_n \rightarrow x$  aus  $|f(y) - f(x)| \leq L|y - x|$ . **q.e.d.**

**Satz 7.16** (Ableitung und Monotonie). *Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und auf  $(a, b)$  differenzierbar. Dann gilt*

- (i)  $f'(x) = 0$  für alle  $x \in (a, b) \iff f$  ist konstant.

- (ii)  $f'(x) \geq 0$  für alle  $x \in (a, b) \iff f$  ist monoton steigend.
- (iii)  $f'(x) \leq 0$  für alle  $x \in (a, b) \iff f$  ist monoton fallend.
- (iv)  $f'(x) \geq 0$  für alle  $x \in (a, b)$  und der Abschluss der Menge  $\{x \in (a, b) \mid f'(x) > 0\}$  ist  $[a, b] \iff f$  ist streng monoton steigend.
- (v)  $f'(x) \leq 0$  für alle  $x \in (a, b)$  und der Abschluss der Menge  $\{x \in (a, b) \mid f'(x) < 0\}$  ist  $[a, b] \iff f$  ist streng monoton fallend.

**Beweis:** Weil eine Funktion genau dann konstant ist, wenn sie monoton steigend und monoton fallend ist, folgt (i) aus (ii) und (iii). Wir beweisen nur (ii) und (iv). Für  $a \leq x < y \leq b$  erfüllt  $f : [x, y] \rightarrow \mathbb{R}$  die Voraussetzungen des Mittelwertsatzes. Aus  $f'(x_0) \geq 0$  für alle  $x_0 \in (a, b)$  folgt  $f(y) - f(x) \geq 0$ , und  $f$  ist monoton wachsend. Umgekehrt folgt  $f(x_0) > f(x)$  für ein  $x > x_0$  aus  $f'(x_0) < 0$  und  $f$  ist nicht monoton steigend. Es folgt (ii). Monoton wachsende  $f$  sind genau dann streng monoton, wenn es kein  $a \leq x < y \leq b$  gibt mit  $f(x) = f(y)$ . Auf  $[x, y]$  ist dann  $f$  konstant und  $f'(z) = 0$  für  $z \in (x, y)$ . Weil jede offene Menge ein solches Intervall enthält folgt (iv). **q.e.d.**

**Korollar 7.17** (Isolierte kritische Punkte). Sei  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar und  $x_0 \in (a, b)$  ein kritischer Punkt.

- (i)  $f'$  bei  $x_0$  differenzierbar mit  $f''(x_0) > 0 \implies x_0$  ist ein striktes lokales Minimum.
- (ii)  $f'$  bei  $x_0$  differenzierbar mit  $f''(x_0) < 0 \implies x_0$  ist ein striktes lokales Maximum.
- (iii) Wenn es ein  $\delta > 0$  gibt, so dass  $f'(x) \leq 0$  für  $x \in (x_0 - \delta, x_0)$  und  $f'(x) \geq 0$  für  $x \in (x_0, x_0 + \delta)$  gilt, dann ist  $x_0$  ein lokales Minimum.
- (iv) Wenn es ein  $\delta > 0$  gibt, so dass  $f'(x) \geq 0$  für  $x \in (x_0 - \delta, x_0)$  und  $f'(x) \leq 0$  für  $x \in (x_0, x_0 + \delta)$  gilt, dann ist  $x_0$  ein lokales Maximum. **q.e.d.**

**Beispiel 7.18.** Die Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto (x + 1)e^{-x}$  hat die Ableitung  $f'(x) = (1 - (x + 1))e^{-x} = -xe^{-x}$ . Also ist sie auf  $(-\infty, 0]$  streng monoton wachsend und auf  $[0, \infty)$  streng monoton fallend. Insbesondere ist  $f(0) = 1$  ein globales Maximum. Also gilt  $x + 1 \leq e^x$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  und  $y \leq e^{y-1}$  für alle  $y = x + 1 \in \mathbb{R}$ .

## 7.4 Regel von de L'Hopital

**Definition 7.19** (Grenzwert von Funktionswerten). Für eine Funktion  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{K}$  existiert der Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow a+} f(x)$  genau dann, wenn für ein  $f(a) \in \mathbb{K}$  die Funktion

$$x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in (a, b) \\ f(a) & \text{für } x = a \end{cases} \quad \text{stetig bei } x = a \text{ ist. Wir schreiben dann } \lim_{x \rightarrow a+} f(x) = f(a).$$

Der analoge Grenzwert  $x \rightarrow b$  wird mit  $\lim_{x \rightarrow b-} f(x)$  bezeichnet. Aufgrund der Definition der Stetigkeit existiert der Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow a+} f(x)$  also genau dann, wenn es ein  $f(a) \in \mathbb{K}$  und für jedes  $\epsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  gibt, mit dem  $f(x) \in B(f(a), \epsilon)$  aus  $x \in B(a, \delta) \cap (a, b)$  folgt. Wegen Satz 5.14 ist das äquivalent dazu, dass für jede Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $(a, b)$ , die gegen  $a$  konvergiert, die Folge  $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  gegen  $f(a)$  konvergiert.

**Satz 7.20** (1. Regel von de L'Hopital). *Seien  $\infty < a < b < \infty$  und  $f$  und  $g$  auf  $(a, b)$  differenzierbare Funktionen mit  $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow a+} g(x)$ . Wenn der Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  existiert, dann existiert auch  $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)}$  und es gilt  $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ .*

**Bemerkung 7.21.** *Wenn die Grenzwerte  $\lim_{x \rightarrow a+} f'(x)$  und  $\lim_{x \rightarrow a+} g'(x)$  existieren und der zweite nicht verschwindet, dann existiert auch  $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  mit  $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a+} f'(x)}{\lim_{x \rightarrow a+} g'(x)}$ .*

**Beweis:** Wenn der Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  existiert, ist  $g'(x) \neq 0$  für  $x \in (a, b')$  mit  $a < b' \leq b$ . Aus dem Mittelwertsatz folgt  $g(x) = g(x) - g(a) \neq 0$  für  $x \in (a, b')$ . Die auf  $[a, b')$  stetig fortgesetzten Funktionen  $f$  und  $g$  erfüllen die Voraussetzungen des Verallgemeinerten Mittelwertsatzes. Deshalb gibt es für jedes  $x \in (a, b')$  ein  $x_0 \in (a, x)$  so dass  $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$  gilt. Wenn also der Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  existiert, dann existiert auch der Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ . **q.e.d.**

**Satz 7.22** (2. Regel von de L'Hopital). *Unter derselben Voraussetzung wie bei der 1. Regel von de L'Hopital, nur gelte  $\lim_{x \rightarrow a+} g(x) = \infty$  statt  $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+} g(x) = 0$ , dann gilt dieselbe Schlußfolgerung.*

**Beweis:** Wenn  $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  existiert, gibt es  $b' \in (a, b)$  mit  $g'(x) \neq 0$  für  $x \in (a, b')$ . Für  $a < x < y < b'$  folgt  $g(y) \neq g(x)$  aus dem Mittelwertsatz, und wegen dem verallgemeinerten Mittelwertsatz gibt es  $x_0 \in (x, y)$  mit  $\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$ . Wenn  $f$  und  $g$  die Voraussetzungen der 2. Regel von de L'Hopital erfüllen, dann gibt es für jedes  $\epsilon > 0$  ein  $y \in (a, b')$ , so dass es für alle  $x_0 \in (a, y)$  gilt  $|\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} - \alpha| < \frac{\epsilon}{2}$  mit  $\alpha = \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ . Dann folgt  $\alpha - \frac{\epsilon}{2} < \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} < \alpha + \frac{\epsilon}{2}$  für alle  $x \in (a, y)$ . Wegen  $\lim_{x \rightarrow a+} g(x) = \infty$  gibt es ein  $y_0 \in (a, y)$  so dass für alle  $x \in (a, y_0)$  gilt  $g(x) > \max\{g(y), 0\}$ . Daraus folgt

$$\begin{aligned} \left(\alpha - \frac{\epsilon}{2}\right) (g(x) - g(y)) + f(y) &< f(x) < \left(\alpha + \frac{\epsilon}{2}\right) (g(x) - g(y)) + f(y) \quad \text{oder} \\ \left(\alpha - \frac{\epsilon}{2}\right) + \frac{f(y) - g(y) \left(\alpha - \frac{\epsilon}{2}\right)}{g(x)} &< \frac{f(x)}{g(x)} < \left(\alpha + \frac{\epsilon}{2}\right) + \frac{f(y) - g(y) \left(\alpha + \frac{\epsilon}{2}\right)}{g(x)}. \end{aligned}$$

Wegen  $\lim_{x \rightarrow a+} g(x) = \infty$  gibt es dann auch ein  $y_1 \in (a, y_0)$ , so dass für alle  $x \in (a, y_1)$  gilt  $\alpha - \epsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < \alpha + \epsilon$ . Also gilt  $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ . **q.e.d.**

Die analogen Aussagen für die Grenzwerte  $\lim_{x \rightarrow b^-}$  gelten natürlich auch. Grenzwerte der Form  $\lim_{x \rightarrow -\infty+} f(x)$  bzw.  $\lim_{x \rightarrow \infty-} f(x)$  definieren wir als die Grenzwerte  $\lim_{x \rightarrow 0-} f(1/x)$  bzw.  $\lim_{x \rightarrow 0+} f(1/x)$ . Wegen der Kettenregel gilt dann

$$\frac{df(\frac{1}{x})}{dx} \left( \frac{dg(\frac{1}{x})}{dx} \right)^{-1} = \frac{-1}{x^2} f'(\frac{1}{x}) \left( \frac{-1}{x^2} g'(\frac{1}{x}) \right)^{-1} = f'(\frac{1}{x}) / g'(\frac{1}{x}).$$

Deshalb gelten die analogen Aussagen auch für diese Grenzwerte.

## 7.5 Konvexität und Ableitungen

**Definition 7.23.** Eine reelle Funktion auf einem Intervall heißt konvex bzw. streng konvex, wenn für alle  $a \neq b$  im Definitionsbereich und alle  $t \in (0, 1)$  folgendes gilt

$$f((1-t)a + tb) \leq (1-t)f(a) + tf(b) \quad \text{bzw.} \quad f((1-t)a + tb) < (1-t)f(a) + tf(b).$$

**Satz 7.24.** Für eine reelle Funktion  $f$  auf einem Intervall  $I$  ist folgendes äquivalent:

(i)  $f$  ist konvex

(ii) Für  $[a, b] \subset I$  und  $x \in (a, b)$  gilt 
$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

(iii) Für  $[a, b] \subset I$  und  $x \in (a, b)$  gilt 
$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(b) - f(x)}{b - x}.$$

(iv) Für  $[a, b] \subset I$  und  $x \in (a, b)$  gilt 
$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(x)}{b - x}.$$

Die analogen Äquivalenzen zu streng konvex gelten, wenn  $\leq$  durch  $<$  ersetzt wird.

**Beweis:** Wir können wegen der Symmetrie  $(a, b, t) \leftrightarrow (b, a, 1-t)$  in (i)  $a < b$  annehmen. Dann sei  $x = (1-t)a + tb \in (a, b) \Leftrightarrow t = \frac{x-a}{b-a} \in (0, 1)$ . Also ist (i) äquivalent zu

$$f(x) \leq \frac{b-x}{b-a} f(a) + \frac{x-a}{b-a} f(b) \quad \Leftrightarrow \quad (b-a)f(x) \leq (b-x)f(a) + (x-a)f(b).$$

Ersetzen wir entweder  $(b-x) = (b-a) - (x-a)$ , oder  $(x-a) = (b-a) - (b-x)$  oder  $(b-a) = (b-x) + (x-a)$ , dann ist diese Ungleichung äquivalent zu

$$\begin{aligned} (b-a)(f(x) - f(a)) &\leq (x-a)(f(b) - f(a)) && \Leftrightarrow && \text{(ii)} \\ (b-a)(f(x) - f(b)) &\leq (b-x)(f(a) - f(b)) && \Leftrightarrow && \text{(iii)} \\ (b-x)(f(x) - f(a)) &\leq (x-a)(f(b) - f(x)) && \Leftrightarrow && \text{(iv)}. \end{aligned}$$

Die analogen Aussagen für streng konvex lassen sich genauso beweisen, wenn wir alle Ungleichungen  $\leq$  durch  $<$  ersetzen. **q.e.d.**

**Korollar 7.25.** Für eine stetige reelle Funktion auf einem Intervall  $I$ , die im Inneren von  $I$  differenzierbar ist, ist folgendes äquivalent:

- (i)  $f$  ist (streng) konvex
- (ii)  $f'$  ist (streng) monoton wachsend

**Beweis:** (i) $\Rightarrow$ (ii): Seien  $a < x < b$  Punkte im Inneren von  $I$ . Die Grenzwerte  $x \rightarrow a+$  in (ii) und  $x \rightarrow b-$  in (iii) aus Satz 7.24 zeigen  $f'(a) \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq f'(b)$  und damit (ii). (ii) $\Rightarrow$ (i): Für  $[a, b] \subset I$  und  $x \in (a, b)$  gibt es wegen dem Mittelwertsatz  $y \in (a, x)$  und  $z \in (x, b)$  mit  $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(y) \leq f'(z) = \frac{f(b)-f(x)}{b-x}$ . Aus Satz 7.24 (iv) folgt (i). **q.e.d.**

**Korollar 7.26.** Für eine stetige reelle Funktion auf einem Intervall, die im Inneren zweimal differenzierbar ist, ist folgendes äquivalent

- (i)  $f$  ist (streng) konvex.
- (ii)  $f''(x) \geq 0$  im Inneren des Intervalls (und der Abschluss der Menge  $\{x \mid f''(x) > 0\}$  ist das ganze Intervall).

Dieses Korollar folgt sofort aus Korollar 7.25 und Satz 7.16. **q.e.d.**

Wenn wir die Ungleichungen zwischen den Funktionswerten alle umdrehen, so erhalten wir die analogen Aussagen für konkave Funktionen. Also ist eine Funktion  $f$  genau dann (streng) konkav, wenn die negative Funktion  $-f$  (streng) konvex ist.

**Übungsaufgabe 7.27.** Zeige, dass die Umkehrfunktion einer (streng) konvexen bijektiven (streng) monoton wachsenden Funktion (streng) konkav ist.

**Beispiel 7.28.** (i)  $f(x) = x^\alpha$ ,  $\alpha > 1 \implies f'' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$ . Also ist  $f$  streng konvex.

(ii)  $f(x) = x^\alpha$ ,  $0 < \alpha < 1 \implies f'' = \alpha(1-\alpha)x^{\alpha-2}$ . Also ist  $f$  streng konkav.

(iii)  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ ,  $x \mapsto \exp(x) \implies \exp'' = \exp$ . Also ist  $\exp$  streng konvex.

(iv)  $\ln : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \ln(x) \implies \ln''(x) = -\frac{1}{x^2}$ . Also ist  $\ln$  streng konkav.

**Satz 7.29** (Ungleichung von Jensen)\*: Sei  $f$  eine reelle konvexe Funktion auf einem Intervall. Seien  $x_1, \dots, x_n$  im Definitionsbereich und  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  positive Zahlen, die  $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$  erfüllen. Dann gilt

$$f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_n f(x_n).$$

Wenn  $f$  streng konvex ist, dann gilt Gleichheit nur für  $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ .

**Beweis\*:** durch vollständige Induktion:

- (i) Für  $n = 1$  muss  $\lambda_1 = 1$  sein, so dass die Aussage klar ist.

(ii) Die Aussage gelte für  $n \in \mathbb{N}$ . Seien  $x_1, \dots, x_{n+1}$  und  $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$  wie gefordert. Dann definieren wir  $\lambda = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$  und  $x = \frac{\lambda_1}{\lambda}x_1 + \dots + \frac{\lambda_n}{\lambda}x_n$ . Also gilt  $\lambda_{n+1} = 1 - \lambda$  und  $\frac{\lambda_1}{\lambda} + \dots + \frac{\lambda_n}{\lambda} = 1$ . Dann folgt aus der Induktionsvoraussetzung  $f(x) \leq \frac{\lambda_1}{\lambda}f(x_1) + \dots + \frac{\lambda_n}{\lambda}f(x_n)$ . Wenn  $f$  streng konvex ist, dann gilt Gleichheit nur für  $x_1 = \dots = x_n$ . Weil  $f$  konvex ist folgt aber  $f(\lambda x + (1 - \lambda)x_{n+1}) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(x_{n+1}) \leq \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_{n+1} f(x_{n+1})$ . Wenn  $f$  streng konvex ist, dann gilt Gleichheit wieder nur für  $x_{n+1} = x = x_1 = \dots = x_n$ . **q.e.d.**

**Korollar 7.30** (Ungleichung arithmetisches-geometrisches Mittel)\*. Seien  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  positive Zahlen mit  $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$ . Dann gilt für positive Zahlen  $x_1, \dots, x_n$

$$x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \cdots x_n^{\lambda_n} \leq \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n.$$

Insbesondere gilt  $\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$ . Gleichheit gilt nun für  $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ .

**Beweis\***:  $-\ln$  ist streng konvex. Also folgt aus Jensen's Ungleichung

$$\begin{aligned} -\ln(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) &\leq -\lambda_1 \ln x_1 - \dots - \lambda_n \ln x_n \\ \iff \lambda_1 \ln x_1 + \dots + \lambda_n \ln x_n &\leq \ln(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) \end{aligned}$$

Wegen der Monotonie von  $\exp$  folgt:

$$x_1^{\lambda_1} \cdots x_n^{\lambda_n} = \exp(\lambda_1 \ln x_1 + \dots + \lambda_n \ln x_n) \leq \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n. \quad \mathbf{q.e.d.}$$

Ersetzen wir  $x_1, \dots, x_n$  durch  $y_1^{1/\lambda_1}, \dots, y_n^{1/\lambda_n}$  so erhalten wir

**Korollar 7.31\*** Seien  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  positive Zahlen mit  $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$ . Dann gilt

$$y_1 \cdots y_n \leq \lambda_1 y_1^{1/\lambda_1} + \dots + \lambda_n y_n^{1/\lambda_n}$$

für alle  $y_1, \dots, y_n \in (0, \infty)$ . Gleichheit gilt nur für  $y_1^{1/\lambda_1} = y_2^{1/\lambda_2} = \dots = y_n^{1/\lambda_n}$ . **q.e.d.**

**Korollar 7.32** (Youngsche Ungleichung). Seien  $p, q \in (0, \infty)$  mit  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Dann gilt

$$xy \leq \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q \quad \text{für alle } x, y \in (0, \infty) \text{ und Gleichheit nur } x^p = y^q.$$

**Beweis**: Wegen der strengen Monotonie von  $\ln$  ist diese Ungleichung äquivalent zu

$$\ln(xy) = \frac{1}{p} \ln(a) + \frac{1}{q} \ln(b) \leq \ln\left(\frac{1}{p}a + \frac{1}{q}b\right) = \ln\left(\frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q\right) \quad \text{mit } a = x^p \text{ und } b = y^q.$$

Weil  $\ln$  streng konkav ist, gilt diese Ungleichung und Gleichheit nur für  $a = b$ . **q.e.d.**

## 7.6 Taylorreihen

Auf offenen Intervallen  $I$  (Teilmenge von  $\mathbb{R}$ ) ist die Ableitung  $f'$  einer differenzierbaren Funktion  $f$  wieder eine Funktion auf  $I$ . Die Bildung der Ableitung ist also eine lineare Abbildung  $\frac{d}{dx}$ , die differenzierbaren Funktionen auf  $I$ , Funktionen auf  $I$  zuordnet. Wenn die Ableitung wieder differenzierbar ist, können wir diese Abbildung nochmal anwenden und erhalten  $(\frac{d}{dx})^2 f = f''$  die zweite Ableitung von  $f$ . Durch  $n$ -faches Anwenden erhalten wir gegebenenfalls dann die  $n$ -te Ableitung  $(\frac{d}{dx})^n f = f^{(n)}$ .

**Definition 7.33.** Für alle  $n \in \mathbb{N}_0$  und alle offenen Teilmengen  $I \subset \mathbb{R}$  sei  $C^n(I)$  die Menge aller  $n$ -mal stetig differenzierbaren reellen Funktionen auf  $I$ , und  $C^\infty(I)$  die Menge aller beliebig oft differenzierbaren reellen Funktionen auf  $I$ .

$$C(I) = C^0(I) \supset C^1(I) \supset \dots \supset C^n(I) \supset \dots \supset C^\infty(I)$$

**Beispiel 7.34.** (i)  $\exp \in C^\infty(\mathbb{R})$ , weil  $\exp^{(n)} = \exp$ .

(ii) für alle  $n \in \mathbb{N}_0$  ist  $x \mapsto x^n \in C^\infty(\mathbb{R})$ , weil  $(x^n)^{(n)} = n!$  und  $(x^n)^{(m)} = 0$  für  $m > n$ .

(iii) für alle  $n \in \mathbb{N}$  ist  $x \mapsto x^{-n} \in C^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ , weil  $(x \mapsto x^{-n})^{(m)} =$

$$x \mapsto \frac{(-n)(-n-1)\dots(-n-m+1)}{x^{n+m}} = (-1)^m \frac{(n+m-1)(n+m-2)\dots n}{x^{n+m}}.$$

(iv)  $\ln \in C^\infty((0, \infty))$  weil  $\ln^{(m)}(x) = \frac{(-1)^{m-1}(m-1)!}{x^m}$  für  $m \geq 1$  und mit  $0! = 1$ .

**Übungsaufgabe 7.35.** Zeige mit vollständiger Induktion für alle  $n \in \mathbb{N}$ :

(i)  $\frac{d^n}{dx^n} f \cdot g = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$  für alle  $f, g \in C^n(I)$  (Verallgemeinerte Leibnizregel).

(ii)  $C^n(I)$  ist eine Unteralgebra von  $C(I)$ .

Aus der Rechenregel und der Kettenregel folgt auch

**Korollar 7.36.** (i) Die Komposition von  $n$ -mal (stetig) differenzierbaren Funktionen ist wieder  $n$ -mal (stetig) differenzierbar.

(ii) Die Umkehrfunktion einer  $n$ -mal (stetig) differenzierbaren bijektiven Funktion ist  $n$ -mal (stetig) differenzierbar, wenn die Ableitung keine Nullstellen hat. **q.e.d.**

**Definition 7.37.** (Taylor-Polynom) Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  in  $x_0$   $n$ -mal differenzierbar, d.h. es gibt eine offene Umgebung  $O \subset I$  von  $x_0$ , so dass die Einschränkung von  $f$  auf  $O$  in  $C^{n-1}(O)$  liegt, und  $f^{(n-1)}$  in  $x_0$  differenzierbar ist. Dann heißt

$$T_{n,x_0}(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2} f^{(2)}(x_0) + \dots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0)$$

das Taylorpolynom von  $f$  der Ordnung  $n$  in  $x_0$ .

Offenbar hat das Taylorpolynom der Ordnung  $n$  in  $x_0$  die gleichen Ableitungen bis zur Ordnung  $n$  wie  $f$  an dem Punkt  $x_0$ . Es ist das eindeutig bestimmte Polynom vom Grad  $n$ , das an der Stelle  $x_0$  die Ableitungen  $f(x_0), f^{(1)}(x_0), \dots, f^{(n)}(x_0)$  besitzt:

$$p(x) = c_0 + c_1(x-x_0) + \dots + c_n(x-x_0)^n \implies p(x_0) = c_0, p^{(1)}(x_0) = c_1, \dots, p^{(n)}(x_0) = n!c_n.$$

**Satz 7.38** (Taylorformel). *Sei  $f \in C^n((a, b))$  auf  $(a, b)$   $n+1$ -mal differenzierbar. Dann gibt es für jedes  $x_0 \neq x \in (a, b)$  ein  $\xi \in (x_0, x)$  bzw.  $\xi \in (x, x_0)$ , so dass*

$$f(x) = T_{n,x_0}(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \quad \text{gilt.}$$

**Beweis:** Sei  $x \in (a, b)$  und  $g(t) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k$  für  $t \in (a, b)$ . Dann gilt

$$g'(t) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k - \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1} = \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n.$$

Außerdem sei  $h(t) = (x-t)^{n+1}$  und  $h'(t) = -(n+1)(x-t)^n$ . Dann folgt aus dem verallgemeinerten Mittelwertsatz, dass es ein  $\xi \in (x_0, x)$  bzw.  $\xi \in (x, x_0)$  gibt mit

$$(g(x) - g(x_0))h'(\xi) = (h(x) - h(x_0))g'(\xi).$$

Es gilt aber  $g(x) - g(x_0) = f(x) - T_{n,x_0}(x)$  und  $h(x) - h(x_0) = -(x-x_0)^{n+1}$ . Also folgt  $f(x) - T_{n,x_0}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n(x-x_0)^{n+1}}{n!(n+1)(x-\xi)^n} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ . **q.e.d.**

**Definition 7.39** (Taylorreihe). *Für  $f \in C^\infty((a, b))$  und  $x_0 \in (a, b)$  heißt die Potenzreihe  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$  Taylorreihe von  $f$  in  $x_0$ .*

Für  $f \in C^\infty((a, b))$  und  $x_0, x \in (a, b)$  gibt es drei Möglichkeiten:

- (i) Die Taylorreihe von  $f$  in  $x_0$  konvergiert an dem Punkt  $x$  gegen  $f(x)$ .
- (ii) Die Taylorreihe von  $f$  in  $x_0$  konvergiert an dem Punkt  $x$ , aber nicht gegen  $f(x)$ .
- (iii) Die Taylorreihe von  $f$  in  $x_0$  konvergiert an dem Punkt  $x$  nicht.

**Korollar 7.40.** *Sei  $f \in C^\infty((a, b))$  und  $x \neq x_0 \in (a, b)$ . Dann konvergiert die Taylorreihe von  $f$  in  $x_0$  an dem Punkt  $x$  gegen  $f(x)$ , wenn auf  $\xi \in (x_0, x)$  bzw.  $(x, x_0)$  die Folge  $(\frac{|f^{(n)}(\xi)|}{n!}|x-x_0|^n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  gleichmäßig gegen Null konvergiert. **q.e.d.***

**Satz 7.41.** *Für jede Potenzreihenfunktion  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  mit Konvergenzradius  $R > 0$  und jedes  $|x_0| < R$  hat die Taylorreihe von  $f(x)$  in  $x_0$  einen Konvergenzradius nicht kleiner als  $R - |x_0|$ , und konvergiert auf  $B(x_0, R - |x_0|)$  gegen  $f$ .*

**Beweis:** Wegen Beispiel 7.4 (v) stimmen bei  $x_0 = 0$  die Ableitungen von  $f$  bis zur Ordnung  $N$  mit den entsprechenden Ableitungen von  $\sum_{n=0}^N a_n x^n$  überein. Deshalb sind  $T_{n,0} = \sum_{n=0}^N a_n x^n$  die Taylorpolynome von  $f$  bei  $x_0 = 0$  und  $f$  ist dort die Taylorreihe. Dann folgt die Aussage aus dem Identitätssatz für Potenzreihenfunktionen (ii). **q.e.d.**

**Definition 7.42.** Eine Funktion  $f \in C^\infty(I)$  heißt reellanalytisch bei  $x_0$ , falls die Taylorreihe bei  $x_0$  einen Konvergenzradius größer als Null hat und auf einer Umgebung von  $x_0$  gegen  $f(x)$  konvergiert. Sie heißt reellanalytisch, wenn das für alle  $x_0 \in I$  gilt.

Also sind alle Potenzreihenfunktionen im Inneren ihres Konvergenzbereiches reellanalytisch. Umgekehrt sind alle reellanalytischen Funktionen Potenzreihenfunktionen.

**Korollar 7.43.\*** Zwei reellanalytische Funktionen  $f, g \in C^\infty((a, b))$  stimmen genau dann auf  $(a, b)$  überein, wenn ihre Taylorreihen für ein  $x_0 \in (a, b)$  übereinstimmen.

**Beweis\*:** Die folgenden Mengen sind abgeschlossen und offen, also  $(a, x_0]$  bzw.  $[x_0, b)$ :

$$\{x \in (a, x_0] \mid f(t) = g(t) \forall t \in [x, x_0]\}, \quad \{y \in [x_0, b) \mid f(t) = g(t) \forall t \in [x_0, y]\}. \quad \mathbf{q.e.d.}$$

**Beispiel 7.44. (i)** Alle Polynome und die Funktionen  $\exp, \sin, \cos, x \mapsto a^x$  sind reellanalytische Funktionen auf ganz  $\mathbb{R}$ .

**(ii)** Wegen Satz 4.28 (iv) gibt es für jede Potenzreihenfunktion  $f$  mit  $f(0) \neq 0$  und Konvergenzradius  $R > 0$  ein  $r > 0$ , so dass  $|\frac{f(0)-f(x)}{f(0)}| < \frac{Lr}{|f(0)|} \leq 1$  für alle  $x \in B(0, r)$  gilt. Offenbar ist  $(\frac{f(0)-f(x)}{f(0)})^n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  das Produkt von  $x^n$  mit einer Potenzreihe in  $x$ . Dann ist auch  $\frac{1}{f(0)} \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{f(0)-f(x)}{f(0)})^n$  eine Potenzreihe, die für  $x \in B(0, r)$  absolut gegen  $\frac{1}{f(0)} \frac{1}{1-(f(0)-f(x))/f(0)} = \frac{1}{f(x)}$  konvergiert, weil  $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$  auf  $x \in B(0, 1)$  stetig ist. Aus dem Identitätssatz für Potenzreihenfunktionen folgt, dass der Quotient zweier Potenzreihenfunktionen reellanalytisch ist, solange beide Potenzreihenfunktionen absolut konvergieren und der Nenner nicht verschwindet. Also sind alle rationalen Funktionen und  $\tan$  und  $\cot$  auf dem Definitionsbereich reellanalytisch.

**(iii)** Für  $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$  gilt  $f^{(n)}(x) = \begin{cases} p_n(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x}} & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases}$

mit einem Polynom  $p_n$  vom Grad  $2n$ , das induktiv definiert ist durch

$$p_{n+1}(\frac{1}{x}) = \frac{1}{x^2}(p_n(\frac{1}{x}) - p_n'(\frac{1}{x})), \quad p_0 = 1.$$

Wegen der 2. Regel von L'Hopital und der Monotonie von  $e^x$  gilt für  $\alpha, \beta > 0$ :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x^{-\alpha}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{x^\alpha}{\alpha} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\exp(-x^{-\alpha})}{x^\beta} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \exp(-x^{-\alpha} (1 + \beta \frac{\ln x}{x^{-\alpha}})) = 0.$$

Für alle  $n \in \mathbb{N}$  ist dann  $x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x^n} e^{-\frac{1}{x}} & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$  stetig, und wegen dem Mittelwertsatz

$f \in C^\infty(\mathbb{R})$ . Die Taylorreihe von  $f$  verschwindet bei  $x_0 = 0$  mit allen Ableitungen. Also ist  $f$  bei  $x_0 = 0$  nicht reellanalytisch aber auf  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

# Kapitel 8

## Das Integral von Funktionen

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$$

### 8.1 Regelfunktionen

Zunächst definieren wir das Integral für sogenannte Treppenfunktionen.

**Definition 8.1** (Treppenfunktion). Sei  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  ein kompaktes Intervall. Für jedes Intervall  $I \subset [a, b]$  einschließlich der Intervalle, die nur aus einer Zahl bestehen, heißt

$$\chi_I : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}, \quad x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in I \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

charakteristische Funktion von  $I$ . Ihre endlichen Linearkombinationen in  $B([a, b], \mathbb{K})$  heißen Treppenfunktionen und bilden eine Unteralgebra. Die Grenzwerte in  $B([a, b], \mathbb{K})$  von gleichmäßig konvergenten Folgen von Treppenfunktionen heißen Regelfunktionen.

Für jedes Teilintervall  $I \subset [a, b]$  ist  $[a, b] \setminus I$  entweder ein Intervall oder eine disjunkte Vereinigung von zwei Intervallen, von denen jedes einen der beiden Randpunkte  $a$  oder  $b$  enthält. Dann ist  $[a, b]$  eine disjunkte Vereinigung von zwei oder drei Intervallen, von denen eines  $I$  ist. Weil die Schnittmenge von zwei Intervallen entweder leer oder ein Intervall ist, ist  $[a, b]$  auch für endlich viele Teilintervalle  $I_i \subset [a, b]$  eine disjunkte Vereinigung von endlich vielen disjunkten Intervalle  $J_j \subset [a, b]$ , so dass jedes  $I_i$  die disjunkte Vereinigung von endlich vielen  $J_j$  ist.

**Satz 8.2** (Definition des Integrals). Für jede Treppenfunktion  $f$  auf  $[a, b]$  und jede Zerlegung von  $[a, b]$  in eine endliche disjunkte Vereinigung von Intervallen  $J_j$ , auf denen  $f$  jeweils konstant ist, hängt folgendes Integral und nicht von der Wahl der  $J_j$  ab:

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{y \in f[[a, b]]} y \sum_{J_j \subset f^{-1}[\{y\}]} |J_j|, \text{ wobei } |J_j| \text{ die Intervalllänge von } J_j \text{ ist.}$$

**Beweis:** Für jedes  $y \in f[[a, b]]$  ist die Summe der Intervalllängen von  $f^{-1}[\{y\}]$  unabhängig von der Zerlegung in eine disjunkte Vereinigung von Intervallen. **q.e.d.**

**Satz 8.3** (Integral und Hauptsatz für Regelfunktionen).

- (i) Eine Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$  ist genau dann eine Regelfunktion, wenn es Funktionen  $v : (a, b) \rightarrow \mathbb{K}$  and  $w : [a, b) \rightarrow \mathbb{K}$  gibt, und für jedes  $x \in [a, b]$  und jedes  $\epsilon > 0$  ein  $\delta > 0$ , so dass  $|f(y) - v(x)| < \epsilon$  für alle  $y \in (x - \delta, x) \cap [a, b]$  und  $|f(y) - w(x)| < \epsilon$  für alle  $y \in (x, x + \delta) \cap [a, b]$  gilt, d.h.  $\lim_{y \rightarrow x-} f(y) = v(x)$  and  $\lim_{y \rightarrow x+} f(y) = w(x)$ . Die Regelfunktionen bilden eine Unteralgebra von  $B([a, b], \mathbb{K})$ , die  $C([a, b], \mathbb{K})$  enthält und unter  $f \mapsto |f|$  invariant ist.
- (ii) Jede Regelfunktion  $f$  hat höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen.
- (iii) Das Integral setzt sich zu einer eindeutigen linearen Abbildung von der Unteralgebra aller Regelfunktionen in  $B([a, b], \mathbb{K})$  nach  $\mathbb{K}$  fort, die folgendes erfüllt:

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \leq (b - a) \|f\|_\infty.$$

- (iv) Für eine Regelfunktion  $f$  ist  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$  mit  $F(y) = \int_a^y f(x) dx$  Lipschitzstetig mit Lipschitzkonstante  $\|f\|_\infty$  und genau bei den  $x \in (a, b)$  differenzierbar, bei denen  $v(x) = w(x)$  gilt. Dort gilt  $F'(x) = v(x)$ . Also ist  $F$  genau dann auf  $(a, b)$  differenzierbar, wenn  $F' \in C([a, b], \mathbb{K})$  und wir  $f = F'$  wählen können.

**Beweis: (i):** Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$  keine Regelfunktion. Dann gibt es für ein  $\epsilon > 0$  keine Treppenfunktion  $g$  auf  $[a, b]$ , die folgendes erfüllt:

$$|f(x) - g(x)| < \epsilon \quad \text{für alle } x \in [a, b].$$

Aus Treppenfunktionen  $g$  auf  $[a, \frac{a+b}{2}]$  und auf  $[\frac{a+b}{2}, b]$  die diese Ungleichung auf ihren Definitionsbereichen erfüllen, können wir eine solche Treppenfunktion  $g$  auf  $[a, b]$  zusammensetzen. Also gibt es eine Folge von Intervallen  $([a_n, b_n])_{n \in \mathbb{N}}$  auf denen keine solche Treppenfunktion existiert, so dass  $[a_{n+1}, b_{n+1}]$  jeweils entweder  $[a_n, \frac{a_n+b_n}{2}]$  oder  $[\frac{a_n+b_n}{2}, b_n]$  und  $[a_1, b_1] = [a, b]$  ist. Wegen dem Intervallschachtelungsprinzip enthält  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n]$  genau ein  $x \in [a, b]$ . Dann ist die Bedingung in (i) bei  $x$  nicht erfüllt, weil für hinreichend großes  $n$  sonst die Funktion  $g$ , die auf  $(-\infty, x) \cap [a_n, b_n]$  gleich  $v(x)$ , auf  $(x, \infty) \cap [a_n, b_n]$  gleich  $w(x)$ , und bei  $x$  gleich  $f(x)$  ist, obige Ungleichung auf  $x \in [a_n, b_n]$  erfüllt. Jede Funktion  $f$ , die die Bedingung in (i) erfüllt, ist also eine Regelfunktion.

Für jede Regelfunktion  $f \in B([a, b], \mathbb{K})$  gibt es für jedes  $\epsilon > 0$  eine Treppenfunktion  $g \in B([a, b], \mathbb{K})$  mit  $\|f - g\|_\infty < \frac{\epsilon}{2}$ . Für jedes  $x \in [a, b]$  wählen wir  $\delta > 0$  so, dass  $g$  auf  $(x - \delta, x) \cap [a, b]$  und  $(x, x + \delta) \cap [a, b]$  konstant ist. Dann ist der Abstand zwischen zwei Funktionswerten von  $f$  auf  $(x - \delta, x) \cap [a, b]$  oder  $(x, x + \delta) \cap [a, b]$  jeweils kleiner als  $\epsilon$ . Das

gilt für jedes  $\epsilon > 0$  mit einem geeignet gewählten  $\delta > 0$ . Für gegen  $x$  konvergierende Folgen  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $(-\infty, x) \cap [a, b]$  bzw. in  $(x, \infty) \cap [a, b]$  sind  $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  Cauchyfolgen mit Grenzwerten  $v(x)$  bzw.  $w(x)$ . Dann gilt (i) für  $f$ . Die letzte Aussage von (i) folgt. **(ii):** Wenn  $x$  nicht zu den abzählbar vielen Unstetigkeitsstellen einer gleichmäßig gegen  $f$  konvergierenden Folge von Treppenfunktionen gehört, dann gibt es für jedes  $\epsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  so dass die Abstände zwischen zwei Funktionswerten von  $f$  auf  $(x - \delta, x + \delta) \cap [a, b]$  kleiner als  $\epsilon$  sind. Deshalb ist  $f$  an höchstens abzählbar vielen Punkten unstetig.

**(iii):** Für Treppenfunktionen folgt die Ungleichung in (iii) aus der Dreiecksungleichung. Für eine Regelfunktion  $f$  konvergieren dann die Integrale von allen Folgen von Treppenfunktionen, die gleichmäßig gegen  $f$  konvergieren, gegen die gleiche Zahl. Deshalb setzt sich das Integral eindeutig zu einer Abbildung von den Regelfunktionen nach  $\mathbb{K}$  fort, und diese Fortsetzung ist auch linear und erfüllt die Ungleichung in (iii).

**(iv):** Für  $x < y \in [a, b]$  gilt  $|F(y) - F(x)| \leq \int_x^y |f(t)| dt \leq |y - x| \cdot \|f\|_\infty$ . Also ist  $F$  Lipschitzstetig. Aus  $|f(t) - z| < \epsilon$  für  $t \in (x, y) \subset [a, b]$  folgt

$$\left| \frac{F(y) - F(x)}{y - x} - z \right| \leq \frac{1}{|y - x|} \int_x^y |f(t) - z| dt < \epsilon.$$

Wegen (i) sind mit  $z = v(y)$  bzw.  $z = w(x)$  die Grenzwerte  $\lim_{y \uparrow x^-}$  bzw.  $\lim_{x \downarrow y^+}$  Null. Also ist  $F$  genau bei den  $x \in (a, b)$  differenzierbar, bei denen  $v(x) = w(x) = F'(x)$  gilt. Gilt das für alle  $x \in (a, b)$ , dann definieren wir  $\tilde{f}(x) = v(x) = w(x)$  für  $x \in (a, b)$  und  $\tilde{f}(a) = w(a)$  und  $\tilde{f}(b) = v(b)$ . Für jedes  $x \in [a, b]$  und jede Folge  $(\tilde{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $[a, x) \cup (x, b]$  mit  $\lim \tilde{x}_n = x$  konvergiert dann  $(f(\tilde{x}_n))_{n \in \mathbb{N}}$  gegen  $\tilde{f}(x)$ . Für jedes  $n \in \mathbb{N}$  gibt es ein  $x_n \in [a, x) \cup (x, b]$  mit  $\max\{|x_n - x|, |f(x_n) - \tilde{f}(\tilde{x}_n)|\} \leq |\tilde{x}_n - x|$ . Dann konvergiert  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gegen  $x$ , und  $(\tilde{f}(\tilde{x}_n))_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  gegen  $\tilde{f}(x)$ . Also ist  $\tilde{f}$  stetig. Das entsprechende  $\tilde{F}$  in (iv) erfüllt  $\tilde{F}' = \tilde{f} = F'$  und  $\tilde{F}(a) = F(a)$ , also  $\tilde{F} = F$ . **q.e.d.**

**Übungsaufgabe 8.4.** Zeige, dass reelle monotone Funktionen Regelfunktionen sind.

## 8.2 Technik des Integrierens

In Definition (8.16) wird das Integral auf eine Unter algebra  $\mathcal{R}[a, b]$  von  $B([a, b], \mathbb{R})$  erweitert, die die Regelfunktionen enthält. Wenn für ein  $f \in \mathcal{R}[a, b]$  ein  $F \in C([a, b], \mathbb{R})$  existiert, das auf  $(a, b)$  differenzierbar ist mit  $F' = f$ , dann gilt für alle  $[x, y] \subset [a, b]$

$$\int_x^y f(t) dt = F(y) - F(x), \quad \int_y^x f(t) dt = - \int_x^y f(t) dt = F(x) - F(y).$$

**Definition 8.5** (Stammfunktion). Auf einer offenen Teilmenge von  $\mathbb{R}$  heißt eine differenzierbare Funktion  $F$  mit  $F' = f$  Stammfunktion von  $f$  und wird  $\int f(x) dx$  bezeichnet. Die Differenz zweier Stammfunktionen von  $f$  ist auf einem Intervall konstant.

**Beispiel 8.6.** (i)  $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$  für  $\alpha \neq -1$  und entweder  $\alpha \in \mathbb{N}$  oder  $x \in (0, \infty)$ .

(ii)  $\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C$  für  $x \neq 0$ .

(iii)  $\int e^x dx = e^x + C$ .

(iv)  $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + C$  für  $a \in (0, \infty) \setminus \{1\}$ .

(v)  $\int \cos(x) dx = \sin(x) + C$ .

(vi)  $\int \sin(x) dx = -\cos(x) + C$ .

(vii)  $\int \tan(x) dx = -\ln |\cos(x)| + C$  für  $x \notin \{(n + \frac{1}{2})\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}$ .

(viii)  $\int \cot(x) dx = \ln |\sin(x)| + C$  für  $x \notin \{n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}$ .

(ix)  $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x) + C$ .

(x)  $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin(x) + C$  für  $x \in [-1, 1]$ .

**Substitutionsregel 8.7.** Sei  $f \in C([a, b])$  und  $\phi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$  eine stetige auf  $(\alpha, \beta)$  differenzierbare Funktion, so dass  $\phi' \in \mathcal{R}[\alpha, \beta]$ . Dann gilt

$$\int f(\phi(t))\phi'(t)dt = \left( \int f(x)dx \right) \circ \phi + C, \quad \int_{\alpha}^{\beta} f(\phi(t))\phi'(t)dt = \int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(x)dx.$$

**Beweis:** Wegen dem Hauptsatz 8.3 hat  $f$  eine stetig differenzierbare Stammfunktion  $F$ . Also ist  $(F \circ \phi)' = (F' \circ \phi) \cdot \phi'$ . Weil  $\mathcal{R}[a, b]$  eine Unteralgebra von  $B([a, b], \mathbb{R})$  ist, die  $C([a, b])$  enthält, folgt  $(F' \circ \phi) \cdot \phi' = (f \circ \phi) \cdot \phi' \in \mathcal{R}[\alpha, \beta]$  und die Aussage. **q.e.d.**

Wenn  $\phi$  bijektiv ist, können wir auch umgekehrt schließen:

**Korollar 8.8** (Transformation der Variablen). Sei  $\phi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$  bijektiv, stetig und auf  $(\alpha, \beta)$  differenzierbar mit  $\phi' \in \mathcal{R}[\alpha, \beta]$  und  $f \in C([a, b])$ . Dann gilt

$$\int f(x)dx = \left( \int f(\phi(t))\phi'(t)dt \right) \circ \phi^{-1} + C, \quad \int_a^b f(x)dx = \int_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)} f(\phi(t))\phi'(t)dt. \mathbf{q.e.d.}$$

**Beispiel 8.9.** (i)

$$\int_a^b f(\alpha t + \beta)dt = \frac{1}{\alpha} \int_{\alpha a + \beta}^{\alpha b + \beta} f(x)dx$$

Insbesondere ist das Restglied der Taylorformel im Beweis von Satz 7.38

$$\begin{aligned} f(x) - T_{n,x_0}(x) &= g(x) - g(x_0) = \int_{x_0}^x g'(t)dt = \int_{x_0}^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n dt \\ &= \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n!} \int_0^1 f^{(n+1)}(x_0 + s(x-x_0))(1-s)^n ds \quad \text{mit } t = x_0 + s(x-x_0). \end{aligned}$$

(ii)

$$\int R(x, \sqrt[n]{ax+b}) dx = \int R\left(\frac{t^n-b}{a}, t\right) \frac{n}{a} t^{n-1} dt + C$$

für  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$  und einer Funktion  $R(\cdot, \cdot)$  in zwei Variablen. Wir substituieren  $t = \sqrt[n]{ax+b} \implies ax+b = t^n \implies x = \frac{t^n-b}{a}$  und  $dx = \frac{n}{a} t^{n-1} dt$ .

(iii) mit den Funktionen  $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$  und  $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$  gilt

$$\int R(x, \sqrt{x^2+1}) dx = \int R(\sinh t, \cosh t) \cosh t dt + C$$

mit der Substitution  $x = \sinh t$ ,  $\sqrt{x^2+1} = \cosh t$  und  $dx = \cosh t dt$ .

(iv)

$$\int R(x, \sqrt{x^2-1}) dx = \pm \int R(\pm \cosh t, \sinh t) \sinh t dt + C$$

mit der Substitution  $x = \pm \cosh t$ , je nachdem ob  $x$  in  $[1, \infty)$  oder  $(-\infty, -1]$  liegt. Dann gilt  $\sqrt{x^2-1} = \sinh t$  und  $dx = \pm \sinh t dt$ .

(v)

$$\int R(x, \sqrt{1-x^2}) dx = \mp \int R(\pm \cos t, \sin t) \sin t dt + C.$$

mit der Substitution  $x = \pm \cos t$ ,  $\sqrt{1-x^2} = \sin t$  und  $dx = \mp \sin t dt$ .

(vi)

$$\int R(\cos x, \sin x) dx = \int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right) \frac{2dt}{1+t^2} + C$$

mit der Substitution  $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ ,  $x = 2 \arctan(t)$  und  $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$ , so dass gilt

$$\frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \cos(x) \quad \text{und} \quad \frac{2t}{1+t^2} = \frac{2 \cos\left(\frac{x}{2}\right) \sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \sin(x).$$

(vii)

$$\int R(\cosh x, \sinh x) dx = \int R\left(\frac{t^2+1}{2t}, \frac{t^2-1}{2t}\right) \frac{dt}{t} + C$$

mit der Substitution  $t = e^x$ ,  $x = \ln(t)$  und  $dx = \frac{dt}{t}$ .

**Partielle Integration 8.10.** Seien  $f, g \in C([a, b])$  auf  $(a, b)$  differenzierbar mit  $f', g' \in \mathcal{R}[a, b]$ . Dann gilt

$$\int f g' dx = f g - \int f' g dx + C, \quad \int_a^b f g' dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f' g dx.$$

**Beweis** folgt aus dem Hauptsatz der Differentialrechnung und der Leibnizregel. **q.e.d.**

**Beispiel 8.11.** (i)  $\int \ln(x) dx = x \ln(x) - \int x \frac{1}{x} dx = x(\ln(x) - 1) + C.$

(ii)  $\int \sqrt{1-x^2} dx = x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx + C = x\sqrt{1-x^2} - \int \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx + \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx + C$   
 $\implies \int \sqrt{1-x^2} dx = \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + \frac{\arcsin(x)}{2} + C \quad \text{also} \quad \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{2}.$

(iii)  $\int x^n e^x dx = x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x dx$

(iv)  $\int x^n \cos x dx = x^n \sin x - n \int x^{n-1} \sin x dx.$

(v)  $\int x^n \sin x dx = -x^n \cos x + n \int x^{n-1} \cos x dx.$

**Partialbruchzerlegung 8.12** (Integration von rationalen Funktionen  $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ ).

**1. Faktorisierung des Nenners.** In der Algebra  $\mathbb{K}[x]$  der reellen bzw. komplexen Polynome heißt  $q(x) \in \mathbb{K}[x]$  Teiler von  $p(x) \in \mathbb{K}[x]$ , wenn es ein  $r(x) \in \mathbb{K}[x]$  mit  $p(x) = q(x)r(x)$  gibt. Wegen dem Fundamentalsatz der Algebra zerfällt  $Q(x) \in \mathbb{C}[x]$  in ein Produkt von Polynomen ersten Grades.  $\mathbb{R}[x]$  ist in  $\mathbb{C}[x]$  enthalten, und  $Q(x) \in \mathbb{C}[x]$  ist genau dann reell, wenn  $\overline{Q(x)} = Q(\bar{x})$  für alle  $x \in \mathbb{C}$  gilt. Deshalb sind die komplexen Nullstellen von  $Q(x) \in \mathbb{R}[x]$  entweder reell oder komplex konjugierte Paare. Dabei ist  $(x - x_0)(x - \bar{x}_0) = x^2 - 2\Re(x_0)x + |x_0|^2 \in \mathbb{R}[x]$ . Also zerfällt  $Q(x)$  in  $\mathbb{R}[x]$  in

$$Q(x) = C \prod_i (x - x_i)^{k_i} \prod_j (x^2 + p_j x + q_j)^{l_j} \quad \text{mit } p_j^2 - 4q_j < 0.$$

Wenn wir  $P(x)$  und  $Q(x)$  durch den Koeffizienten  $C$  von  $Q(x)$  teilen, wird  $C = 1$ .

**2. Polynomdivision.** Wir beschreiben zuerst die Zerlegung von  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  und die Berechnung der Summanden. Lemma 8.13 zeigt dann, dass die Zerlegung immer möglich ist.

Wenn der Grad des Zählers  $P(x)$  nicht kleiner ist als der Grad des Nenners, dann subtrahieren wir von  $P(x)$  der Reihe nach das Produkt von solchen Monomen  $S_l x^l$  mit  $Q(x)$ , so dass sich jeweils der Grad der Differenz um Eins erniedrigt. Damit können wir solange fortfahren, bis der Grad der Differenz niedriger ist als der von  $Q(x)$ . Dann haben wir das Polynom  $S(x)$  und ein Polynom  $R(x)$  bestimmt, dessen Grad kleiner ist als der von  $Q(x)$ , so dass  $P(x) - S(x)Q(x) = R(x)$  bzw.  $\frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$  gilt. Weil im Grenzwert  $|x| \rightarrow \infty$  alle anderen Summanden in Lemma 8.13 und  $\frac{R(x)}{Q(x)}$  verschwinden, stimmt dieses Polynom  $S(x)$  tatsächlich mit dem aus Lemma 8.13 überein.

Danach bestimmen wir die Koeffizienten  $a_{jl}, b_{jl}$  und  $c_{ik}$  mit dem Ansatz

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \sum_i \sum_{k=1}^{k_i} \frac{c_{ik}}{(x - x_i)^k} + \sum_j \sum_{l=1}^{l_j} \frac{a_{jl}x + b_{jl}}{(x^2 + p_j x + q_j)^l}$$

Wenn wir beide Seiten mit  $Q(x)$  multiplizieren, erhalten wir eine Gleichung zwischen 2 reellen Polynomen. Durch Einsetzen von geeigneten Werten von  $x$  (Nullstellen von  $Q(x)$ ) und durch Koeffizientenvergleich erhalten wir die Zahlen  $a_{jl}, b_{jl}$  und  $c_{ik}$ .

**Lemma 8.13. (i)** Eine rationale Funktion  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  mit komplexen Koeffizienten lässt sich schreiben als eine Summe eines komplexen Polynoms  $S(x)$  und Summanden von der Form  $\frac{c_{ik}}{(x-x_i)^k}$ , wobei  $(x-x_i)^k$  Teiler von  $Q(x)$  sind und  $c_{ik} \in \mathbb{C}$ .

**(ii)** Eine reelle rationale Funktion  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  lässt sich schreiben als eine Summe eines reellen Polynoms  $S(x)$  und Summanden von der Form  $\frac{c_{ik}}{(x-x_i)^k}$  und  $\frac{a_{jl}x+b_{jl}}{(x^2+p_jx+q_j)^l}$ , wobei  $(x-x_i)^k$  und  $(x^2+p_jx+q_j)^l$  reelle Teiler von  $Q(x)$  sind mit  $a_{jl}, b_{jl}, c_{ik} \in \mathbb{R}$ .

**Beweis: (i)** Sei  $x_i$  eine  $k$ -fache Nullstelle vom Nennerpolynom  $Q(x)$ , d.h.  $Q(x) = (x-x_i)^k q(x)$  mit  $q(x_i) \neq 0$ . Dann hat  $P(x) - \frac{P(x_i)}{q(x_i)} q(x)$  bei  $x = x_i$  eine Nullstelle. Deshalb gibt es ein  $p(x) \in \mathbb{C}[x]$  mit  $P(x) = \frac{P(x_i)}{q(x_i)} q(x) + (x-x_i)p(x)$ . Es folgt

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\frac{P(x_i)}{q(x_i)} q(x) + (x-x_i)p(x)}{(x-x_i)^l q(x)} = \frac{\frac{P(x_i)}{q(x_i)}}{(x-x_i)^l} + \frac{p(x)}{(x-x_i)^{l-1} q(x)}.$$

Der Grad des Nenners von dem zweiten Summanden ist dabei um Eins kleiner als der Grad von  $Q(x)$ . Indem wir diese Formel mehrfach bei allen Nullstellen von  $Q(x)$  auf diesen Rest anwenden erhalten wir als letzten Summanden ein Polynom  $S(x)$ .

**(ii)** Für reelle Nullstellen  $x_i$  von  $Q(x)$  sind die Koeffizienten in (i) reell. Deshalb genügt es ein analoges Vorgehen für Teiler  $Q(x) = (x^2+p_jx+q_j)^l q(x)$  von  $Q(x)$  anzugeben, wobei  $q(x)$  an den komplexen Nullstellen  $x_{1,2} = \frac{-p_j \pm \sqrt{p_j^2 - 4q_j}}{2}$  von  $x^2+p_jx+q_j$  nicht verschwindet. Dort verschwindet  $P(x) - (ax+b)q(x)$  genau dann, wenn

$$\begin{aligned} \frac{P(x_1)}{q(x_1)} &= ax_1 + b & \frac{P(x_2)}{q(x_2)} &= ax_2 + b \\ a &= \frac{1}{x_1-x_2} \left( \frac{P(x_1)}{q(x_1)} - \frac{P(x_2)}{q(x_2)} \right) & b &= \frac{1}{x_1-x_2} \left( x_1 \frac{P(x_2)}{q(x_2)} - x_2 \frac{P(x_1)}{q(x_1)} \right) \end{aligned}$$

gilt. Weil  $P(x)$  und  $q(x)$  reelle Koeffizienten haben, gilt  $\overline{P(x)} = P(\bar{x})$  und  $\overline{q(x)} = q(\bar{x})$ .

Dann folgt  $\overline{\left(\frac{P(x_1)}{q(x_1)}\right)} = \frac{P(x_2)}{q(x_2)}$  aus  $\bar{x}_1 = x_2$ . Deshalb sind  $a$  und  $b$  reell mit

$$a = \frac{2}{\sqrt{4q_j-p_j^2}} \Im\left(\frac{P(x_1)}{q(x_1)}\right) \quad b = \Re\left(\frac{P(x_1)}{q(x_1)}\right) + \frac{p_j}{\sqrt{4q_j-p_j^2}} \Im\left(\frac{P(x_1)}{q(x_1)}\right).$$

Wieder gibt es ein  $p(x) \in \mathbb{R}[x]$  mit  $P(x) = (ax+b)q(x) + (x^2+p_jx+q_j)p(x)$  und

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{ax+b}{(x^2+p_jx+q_j)^l} + \frac{p(x)}{(x^2+p_jx+q_j)^{l-1} q(x)}.$$

Nach mehrmaligem Anwenden erhalten wir als Rest ein reelles Polynom  $S(x)$ . **q.e.d.**

**3. Termweise Integration.**  $\int \frac{dx}{(x-x_i)^k} = \begin{cases} \ln|x-x_i| + C & \text{für } k=1 \\ \frac{-1}{(k-1)(x-x_i)^{k-1}} + C & \text{sonst.} \end{cases}$

$$\int \frac{(ax+b)dx}{(x^2+px+q)^l} = \begin{cases} \frac{a}{2} \ln(x^2+px+q) + \left(b - \frac{ap}{2}\right) \int \frac{dx}{x^2+px+q} + C & \text{für } l = 1 \\ \frac{-a}{2(l-1)(x^2+px+q)^{l-1}} + \left(b - \frac{ap}{2}\right) \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^l} + C & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^l} = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{4q-p^2}} \arctan\left(\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}\right) + C & l = 1 \\ \frac{2x+p}{(l-1)(4q-p^2)(x^2+px+q)^{l-1}} + \frac{2(2l-3)}{(l-1)(4q-p^2)} \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^{l-1}} + C & l \neq 1. \end{cases}$$

**Beispiel 8.14.**  $\int f(x)dx$  mit  $f(x) = \frac{2x^5+x^4+x^2+2x-2}{x^4-1}$ .

1. *Faktorisierung des Nenners.*  $x^4 - 1 = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$ .

2. *Polynomdivision.*

$$\begin{aligned} 2x^5 + x^4 + x^2 + 2x - 2 &= (2x + 1)(x^4 - 1) + x^2 + 4x - 1 \\ &\quad - 2x(x^4 - 1) \\ &= x^4 + x^2 + 4x - 2 \\ &\quad - (x^4 - 1) \\ &= x^2 + 4x - 1 \end{aligned}$$

$$x^2 + 4x - 1 = c_1(x + 1)(x^2 + 1) + c_2(x - 1)(x^2 + 1) + (ax + b)(x - 1)(x + 1)$$

Einsetzen von  $x = 1$  und  $x = -1$  ergibt  $4 = 4c_1$  und  $-4 = -4c_2$  also  $c_1 = 1$  und  $c_2 = 1$ . Koeffizientenvergleich von  $x^3$  und  $x^0$  ergibt  $0 = c_1 + c_2 + a$  und  $-1 = c_1 - c_2 - b$ . Dann folgt  $a = -2$ ,  $b = 1$  und  $f(x) = 2x + 1 + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} + \frac{-2x+1}{x^2+1}$ .

3. *Termweise Integration.*

$$\int f(x)dx = x^2 + x + \ln|x-1| + \ln|x+1| - \ln(x^2+1) + \arctan(x) + C.$$

### 8.3 Riemannintegrale Funktionen

In diesem Abschnitt erweitern wir das Integral auf eine größere Klasse von Funktionen. Dabei machen wir wesentlichen Gebrauch von der Monotonie des Integrals von reellen Treppenfunktionen: für Treppenfunktionen  $f \leq g$  in  $B([a, b], \mathbb{R})$  gilt  $\int_a^b f dx \leq \int_a^b g dx$ .

**Definition 8.15** (Unterintegral und Oberintegral). Für  $f \in B([a, b], \mathbb{R})$  heißt

$$\underline{\int} f = \sup \left\{ \int_a^b g(x)dx \mid g \text{ Treppenfunktion mit } g \leq f \right\} \quad \text{Unterintegral von } f \text{ und}$$

$$\overline{\int} f = \inf \left\{ \int_a^b g(x)dx \mid g \text{ Treppenfunktion mit } g \geq f \right\} \quad \text{Oberintegral von } f.$$

Offenbar gilt  $\underline{\int} f \leq \overline{\int} f$ . Unserer Zugang zum Riemannintegral über Treppenfunktionen weicht von dem Standardzugang etwas ab, beschreibt aber die gleichen Funktionen.

**Definition 8.16** (Riemannintegral). Eine Funktion  $f \in B([a, b], \mathbb{R})$  heißt riemannintegabel, wenn  $\int f = \overline{\int} f$  gilt. Diese Zahl heißt Riemannintegral  $\int_a^b f dx$  von  $f$  über  $[a, b]$ . Die Menge aller riemannintegablen Funktionen auf  $[a, b]$  bezeichnen wir mit  $\mathcal{R}[a, b]$ . Für  $f \in \mathcal{R}[a, b]$  definieren wir  $\int_b^a f(x) dx = -\int_a^b f(x) dx$ .

Der Flächeninhalt zwischen dem Graphen von  $f$  und der  $x$ -Achse liegt offenbar in dem Intervall  $[\int f, \overline{\int} f]$  und ist für  $f \in \mathcal{R}[a, b]$  das Riemannintegral  $\int_a^b f(x) dx$ .

**Definition 8.17** (Partition). Eine Partition  $p$  von  $[a, b]$  ist eine Zerlegung von  $[a, b]$  in eine endliche Vereinigung von paarweise disjunkten Teilintervallen  $[a, b] = I_1 \cup \dots \cup I_n$ . Die Feinheit  $\|p\|$  der Partition  $p$  ist das Maximum der Intervalllängen. Die Menge aller Partitionen von  $[a, b]$  bezeichnen wir mit  $\mathcal{P}[a, b]$ .

Für jede Partition  $p \in \mathcal{P}[a, b]$  bilden die Linearkombinationen von  $\chi_{I_1}, \dots, \chi_{I_n}$  einen endlichdimensionalen Teilraum von  $B([a, b], \mathbb{R})$ . Für  $f \in B([a, b], \mathbb{R})$  enthält dieser Teilraum ein kleinstes Element  $g$  mit  $g \geq f$  und ein größtes Element  $h$  mit  $h \leq f$ :

$$g = \sum_i \sup_{x \in I_i} f(x) \chi_{I_i} \qquad h = \sum_i \inf_{x \in I_i} f(x) \chi_{I_i}$$

Ihre Integrale heißen Obersummen  $S(f, p) = \int_a^b g dx$  und Untersummen  $s(f, p) = \int_a^b h dx$ .

**Definition 8.18** (Verfeinerung).  $p' \in \mathcal{P}[a, b]$  heißt Verfeinerung von  $p \in \mathcal{P}[a, b]$ , wenn alle Intervalle von  $p'$  in einem Intervall von  $p$  enthalten sind. Wir schreiben dann  $p' \subset p$ . Für  $p_1, \dots, p_n \in \mathcal{P}[a, b]$  besteht die gemeinsame Verfeinerung  $p_1 \cap \dots \cap p_n \in \mathcal{P}[a, b]$  aus allen nichtleeren Schnittmengen  $I_1 \cap \dots \cap I_n$  von Intervallen  $I_1 \in p_1, \dots, I_n \in p_n$ .

**Lemma 8.19.** (i) Wenn  $p' \subset p$  gilt  $s(p, f) \leq s(p', f)$  und  $S(p', f) \leq S(p, f)$ .

(ii) Für  $p, p' \in \mathcal{P}[a, b]$  gilt  $s(p, f) \leq S(p', f)$ .

**Beweis:**(i) Die den Partitionen  $p$  und  $p'$  entsprechenden Treppenfunktionen erfüllen mit  $h \leq f \leq g$  und  $h' \leq f \leq g'$  auch  $h \leq g'$  und für  $p' \subset p$  sogar  $h \leq h' \leq f \leq g' \leq g$ . Dann folgen (i) und (ii) aus der Monotonie des Integrals für Treppenfunktionen. **q.e.d.**

**Satz 8.20** (Kriterium von Darboux). Eine Funktion  $f \in B([a, b], \mathbb{R})$  ist genau dann riemannintegabel, wenn es für jedes  $\epsilon > 0$  ein  $p \in \mathcal{P}[a, b]$  gibt mit  $S(p, f) - s(p, f) < \epsilon$ .

**Beweis:** Für  $f \in \mathcal{R}[a, b]$  und  $\epsilon > 0$  gibt es  $p', p'' \in \mathcal{P}[a, b]$  mit  $S(p'', f) - s(p', f) < \epsilon$ . Für  $p = p' \cap p''$  folgt  $S(p, f) - s(p, f) \leq S(p'', f) - s(p', f) < \epsilon$  aus Lemma 8.19 (i).

Wenn es für jedes  $\epsilon > 0$  ein  $p_\epsilon \in \mathcal{P}[a, b]$  gibt mit  $S(p_\epsilon, f) - s(p_\epsilon, f) < \epsilon$  dann ist  $0 \leq \overline{\int} f - \int f \leq S(p_\epsilon, f) - s(p_\epsilon, f) \leq \inf_{\epsilon > 0} \epsilon = 0$ . Also gilt dann auch  $\int f = \overline{\int} f$ . **q.e.d.**

**Beispiel 8.21. (i)** Für eine Regelfunktion  $f$  und eine Treppenfunktion  $g$  folgt  $g - \epsilon \leq f \leq g + \epsilon$  aus  $\|f - g\|_\infty \leq \epsilon$ . Die entsprechende Partition  $p \in \mathcal{P}[a, b]$  erfüllt  $S(p, f) - s(p, f) \leq \int_a^b (g + \epsilon) dx - \int_a^b (g - \epsilon) dx \leq 2\epsilon(b - a)$ . Also sind alle Regelfunktionen riemannintegabel.

**(ii)** Die Summe  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \chi_{I_n}$  mit  $I_n = (\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n})$  ist auf  $[0, 1]$  riemannintegabel, aber keine Regelfunktion, weil sie bei  $x = 0$  nicht die Bedingung (i) in Satz 8.3 erfüllt.

**(iii)** Für  $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in [a, b] \cap \mathbb{Q} \\ 0 & \text{für } x \in [a, b] \text{ und } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$  ist auf allen Teilintervalle  $I \subset [a, b]$  mit positiver Intervalllänge  $\sup_{x \in I} f(x) = 1$  und  $\inf_{x \in I} f(x) = 0$ . Also ist  $\underline{\int} f = 0$  und  $\overline{\int} f = b - a$  und  $f \notin \mathcal{R}[a, b]$ .

## 8.4 Kriterium von Riemann

**Definition 8.22** (Riemannsummen). Für  $p \in \mathcal{P}[a, b]$  und Zwischenpunkte  $\xi \in I_1 \times \dots \times I_n$  heißt  $R(p, f, \xi) = \int_a^b \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \chi_{I_i} dx$  Riemannsumme von  $f$  bezüglich  $p$  und  $\xi$ .

Aus der Definition von  $s(p, f)$  und  $S(p, f)$  folgt für  $f \in B([a, b], \mathbb{R})$  und  $p \in \mathcal{P}[a, b]$

$$\inf\{R(p, f, \xi) \mid \xi \in I_1 \times \dots \times I_n\} = s(p, f) \quad \sup\{R(p, f, \xi) \mid \xi \in I_1 \times \dots \times I_n\} = S(p, f).$$

**Satz 8.23** (Kriterium von Riemann).  $f \in B([a, b], \mathbb{R})$  ist genau dann riemannintegabel, wenn es ein  $A \in \mathbb{R}$  und für jedes  $\epsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  gibt, so dass  $|R(p, f, \xi) - A| < \epsilon$  für alle  $p \in \mathcal{P}[a, b]$  mit  $\|p\| < \delta$  und Zwischenpunkte  $\xi$  gilt. Dann gilt  $A = \int_a^b f(x) dx$ .

**Beweis:** Für jede Funktion  $f \in B([a, b], \mathbb{R})$ , die das Kriterium von Riemann erfüllt, gibt es für alle  $\epsilon > 0$  eine Partition  $p \in \mathcal{P}[a, b]$  mit  $S(p, f) - s(p, f) =$

$$= \sup\{R(p, f, \xi) \mid \xi \in I_1 \times \dots \times I_n\} - \inf\{R(p, f, \xi) \mid \xi \in I_1 \times \dots \times I_n\} \leq 2\epsilon.$$

Dann ist das Kriterium von Darboux erfüllt. Erfülle umgekehrt  $f \in B([a, b], \mathbb{R})$  das Kriterium von Darboux. Dann gibt es für jedes  $\epsilon > 0$  ein  $p \in \mathcal{P}[a, b]$ , so dass  $S(p, f) - s(p, f) < \frac{\epsilon}{2}$  gilt. Seien  $I_1, \dots, I_n$  die Teilintervalle von  $p$  mit positiven Intervalllängen  $|I_1|, \dots, |I_n|$ , und  $\delta = \min\{\frac{\epsilon}{8n\|f\|_\infty + 1}, |I_1|, \dots, |I_n|\}$ . Jedes Teilintervall einer Partition  $p' \in \mathcal{P}[a, b]$  mit  $\|p'\| < \delta$  ist entweder in einem Teilintervall von  $p$  enthalten, oder enthält Punkte am linken oder rechten Rand eines der Intervalle  $I_1, \dots, I_n$ . Also sind höchstens  $2n$  Teilintervalle von  $p'$  nicht in einem Teilintervall von  $p$  enthalten. Es folgt

$$S(p', f) - s(p', f) \leq S(p, f) - s(p, f) + 2\|f\|_\infty \cdot 2n \cdot \delta < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Für alle Zwischenpunkte  $\xi$  von  $p'$  gilt  $s(p', f) \leq R(p', f, \xi), \int_a^b f(x)dx \leq S(p', f)$ . Es folgt

$$\left| R(p', f, \xi) - \int_a^b f(x)dx \right| \leq S(p', f) - s(p', f) < \epsilon. \quad \mathbf{q.e.d.}$$

Stimmen von zwei Partitionen  $p, p' \in \mathcal{P}[a, b]$  die Inneren der Intervalle überein, so gilt  $R(p, f, \xi) = R(p', f, \xi)$  für gleiche Zwischenpunkte  $\xi$ . Deshalb ist unser Zugang zum Riemannintegral äquivalent zum Standardzugang.

**Korollar 8.24.** Sei  $f \in \mathcal{R}[a, b]$ . Dann gilt für alle  $t \in [0, 1]$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f\left(a + \frac{i-t}{n}(b-a)\right).$$

**Beweis:** Für die Partitionen  $p_n = \{[a, a + \frac{1}{n}(b-a)], [a + \frac{1}{n}(b-a), a + \frac{2}{n}(b-a)], \dots, [a + \frac{n-1}{n}(b-a), b]\}$  bzw.  $p_n = \{[a, a + \frac{1}{n}(b-a)], (a + \frac{1}{n}(b-a), a + \frac{2}{n}(b-a)], \dots, (a + \frac{n-1}{n}(b-a), b)\}$  in  $\mathcal{P}[a, b]$  mit den Zwischenpunkten  $\xi_i = a + \frac{i-t}{n}(b-a)$  für  $i = 1, \dots, n$  ist  $\|p_n\| = \frac{b-a}{n}$ . Die Aussage folgt aus dem Kriterium von Riemann.  $\mathbf{q.e.d.}$

**Korollar 8.25\*:** Seien  $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$ . Wenn  $f$  und  $g$  auf einer dichten Teilmenge von  $[a, b]$  (z.B.  $\mathbb{Q} \cap [a, b]$ ) übereinstimmen, dann gilt  $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$ .

**Beweis\*:** Weil jedes Teilintervall von positiver Intervalllänge einer beliebigen Partition  $p \in \mathcal{P}[a, b]$  immer Elemente einer dichten Teilmenge von  $[a, b]$  enthält, können die Zwischenpunkte immer aus einer dichten Teilmenge gewählt werden.  $\mathbf{q.e.d.}$

**Satz 8.26** (Eigenschaften des Riemannintegrals).

- (i)  $\mathcal{R}[a, b]$  ist eine Unteralgebra von  $B([a, b], \mathbb{R})$  die die Regelfunktionen und  $C([a, b])$  enthält. Die Abbildung  $\mathcal{R}[a, b] \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto \int_a^b f dx$  ist  $\mathbb{R}$ -linear.
- (ii)  $\mathcal{R}[a, b]$  enthält die monotonen Funktionen, und mit  $f \in \mathcal{R}[a, b]$  auch  $|f| \in \mathcal{R}[a, b]$ .
- (iii) Monotonie: Für  $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$  folgt aus  $f \leq g$  (d.h.  $f(x) \leq g(x)$  für alle  $x \in [a, b]$ )  $\int_a^b f dx \leq \int_a^b g dx$ . Insbesondere gilt  $|\int_a^b f dx| \leq \int_a^b |f| dx \leq (b-a)\|f\|_\infty$ .
- (iv) Normierung:  $\int_a^b 1 dx = b - a$ .
- (v) Stetigkeit:  $f \in \mathcal{R}[a, b]$  und  $g \in C(\mathbb{R})$ , dann ist  $g \circ f \in \mathcal{R}[a, b]$ .
- (vi) Intervall Additivität: Für jedes  $c \in (a, b)$  gilt:

$$f \in \mathcal{R}[a, b] \iff f \in \mathcal{R}[a, c] \cap \mathcal{R}[c, b] \text{ und } \int_a^b f dx = \int_a^c f dx + \int_c^b f dx.$$

- (vii) Sei  $f \in \mathcal{R}[a, b]$  und  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  Folgen in  $[a, b]$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ . Dann konvergiert  $(\int_{a_n}^{b_n} f dx)_{n \in \mathbb{N}}$  gegen  $\int_a^b f dx$ .
- (viii) Gleichmäßige Konvergenz und Stetigkeit des Riemannintegrals: Der Grenzwert  $f$  einer gleichmäßig konvergenten Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathcal{R}[a, b]$  liegt auch in  $\mathcal{R}[a, b]$  und die Folge  $(\int_a^b f_n dx)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert dann gegen  $\int_a^b f dx$ .

**Beweis:**(i) Für  $f, g \in B([a, b], \mathbb{R})$  und  $p \in [a, b]$  gilt

$$S(p, f + g) \leq S(p, f) + S(p, g) \quad \text{und} \quad -s(p, f + g) \leq -s(p, f) - s(p, g)$$

Daraus und aus  $f(x)g(x) - f(y)g(y) = g(x)(f(x) - f(y)) + f(y)(g(x) - g(y))$  folgt

$$\begin{aligned} S(p, f + g) - s(p, f + g) &\leq S(p, f) - s(p, f) + S(p, g) - s(p, g) \\ S(p, fg) - s(p, fg) &\leq \|g\|_\infty (S(p, f) - s(p, f)) + \|f\|_\infty (S(p, g) - s(p, g)) \end{aligned}$$

Aus  $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$  folgt also wegen dem Darbouxkriterium  $f + g, fg \in \mathcal{R}[a, b]$ . Wegen Beispiel 8.21 (i) ist jede Regelfunktion riemannintegabel und damit wegen Satz 8.3 auch jede stetige Funktion. Die Linearität des Riemannintegrals folgt aus der Linearität des Integrals von Treppenfunktionen.

(ii) Für  $p \in \mathcal{P}[a, b]$  seien  $x_0 = a < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$  die entsprechenden Teilintervallendpunkte. Für monoton steigende  $f$  folgt aus  $\|p\| < \frac{\epsilon}{f(b) - f(a)}$

$$S(p, f) - s(p, f) \leq \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1}))(x_i - x_{i-1}) \leq \|p\| \sum_{i=1}^n f(x_i) - f(x_{i-1}) < \epsilon.$$

Das Kriterium von Darboux zeigt  $f \in \mathcal{R}[a, b]$ . Analoges gilt für monoton fallende  $f$ .

Für  $f \in \mathcal{R}[a, b]$  seien  $f^\pm(x) = \frac{1}{2}(f(x) \pm |f(x)|)$ . Dann folgt

$$0 \leq \sup\{f^\pm(x) \mid x \in I_i\} - \inf\{f^\pm(x) \mid x \in I_i\} \leq \sup\{f(x) \mid x \in I_i\} - \inf\{f(x) \mid x \in I_i\}.$$

Also gilt  $S(p, f^\pm) - s(p, f^\pm) \leq S(p, f) - s(p, f)$  für alle  $p \in \mathcal{P}[a, b]$ . Dann folgt  $f^\pm \in \mathcal{R}[a, b]$  und damit auch  $|f| = f^+ - f^- \in \mathcal{R}[a, b]$  aus dem Kriterium von Darboux.

(iii) Aus  $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$  mit  $f \leq g$  folgt  $\int_a^b f(x) dx = \underline{\int} f \leq \underline{\int} g = \int_a^b g(x) dx$ .

(iv) Für  $f = 1$  (konstant) gilt  $S(p, 1) = s(p, 1) = b - a$  für alle  $p \in \mathcal{P}[a, b]$ .

(v) Sei  $f \in \mathcal{R}[a, b]$  und  $g \in C(\mathbb{R})$ . Dann ist  $g$  auf  $[-\|f\|_\infty, \|f\|_\infty]$  gleichmäßig stetig. Also gibt es für jedes  $\epsilon > 0$  ein  $\delta > 0$ , so dass  $|g(x) - g(x')| < \frac{\epsilon}{2(b-a)}$  aus  $|x - x'| < \delta$  mit  $x, x' \in [-\|f\|_\infty, \|f\|_\infty]$  folgt. Sei  $\|g\|_\infty = \max\{|g(x)| \mid x \in [-\|f\|_\infty, \|f\|_\infty]\}$ . Wegen dem Darbouxkriterium gibt es für  $f \in \mathcal{R}[a, b]$  ein  $p \in \mathcal{P}[a, b]$  mit  $S(p, f) - s(p, f) < \frac{\epsilon \cdot \delta}{4\|g\|_\infty}$ . Wir zerlegen die Summe  $S(p, g \circ f) - s(p, g \circ f)$  in die Summe über Teilintervalle  $I_i$ , auf denen  $\sup_{x \in I_i} f(x) - \inf_{x \in I_i} f(x) < \delta$  gilt, und die Summe über Teilintervalle  $I_j$ , auf denen  $\sup_{x \in I_j} f(x) - \inf_{x \in I_j} f(x) \geq \delta$  gilt. Aus der Wahl von  $\delta$  folgt, dass die erste

Summe nicht größer ist als  $\frac{\epsilon}{2(b-a)} \cdot (b-a) = \frac{\epsilon}{2}$ . Weil die Summe der Teilintervalllängen in der zweiten Summe nicht größer ist als  $\frac{S(p,f) - s(p,f)}{\delta}$ , ist die zweite Summe nicht größer als  $(S(p,f) - s(p,f)) \frac{2\|g\|_\infty}{\delta} < \frac{\epsilon}{2}$ . Also gilt  $S(p, g \circ f) - s(p, g \circ f) < \epsilon$  und  $g \circ f$  erfüllt das Darbouxkriterium.

(vi) Für jedes  $p \in \mathcal{P}[a, b]$  entspricht die Verfeinerung  $p \cap \{[a, c], \{c\}, (c, b)\} \in \mathcal{P}[a, b]$  einem Paar von Partitionen in  $\mathcal{P}[a, c] \times \mathcal{P}[c, b]$ . Dann folgt (v) aus dem Darbouxkriterium.

(vii) Wegen (vi) und (iii) gilt  $|\int_{a_n}^{b_n} f(x)dx - \int_a^b f(x)dx| \leq (a_n - a + b - b_n)\|f\|_\infty$ .

(viii) Für  $p \in \mathcal{P}[a, b]$  folgt mit  $f = (f - f_n) + f_n$  aus dem Beweis von (i)

$$\begin{aligned} S(p, f) - s(p, f) &\leq S(p, f - f_n) - s(p, f - f_n) + S(p, f_n) - s(p, f_n) \\ &\leq 2(b-a)\|f - f_n\|_\infty + S(p, f_n) - s(p, f_n). \end{aligned}$$

Für  $\epsilon > 0$  wählen wir zuerst  $n$  so groß, dass  $\|f - f_n\|_\infty < \frac{\epsilon}{4(b-a)}$  gilt, und dann  $p \in \mathcal{R}[a, b]$  so dass  $S(p, f_n) - s(p, f_n) < \frac{\epsilon}{2}$  gilt. Dann erfüllt  $f$  das Kriterium von Darboux.

Andererseits folgt für  $f, f_n \in \mathcal{R}[a, b]$  aus der Monotonie  $|\int_a^b f(x)dx - \int_a^b f_n(x)dx| \leq (b-a)\|f - f_n\|_\infty$ . Also konvergiert  $(\int_a^b f_n(x)dx)_{n \in \mathbb{N}}$  gegen  $\int_a^b f(x)dx$ . **q.e.d.**

## 8.5 Differentiation und Integration

**Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung 8.27.** Sei  $f \in \mathcal{R}[a, b]$  und  $F$  eine stetige Funktion auf  $[a, b]$ , die auf  $(a, b)$  differenzierbar ist mit  $F' = f$ . Dann gilt

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a).$$

Umgekehrt ist  $F(y) = \int_a^y f(x)dx$  für  $f \in \mathcal{R}[a, b]$  lipschitzstetig mit Lipschitzkonstante  $\|f\|_\infty$  und bei den  $x \in (a, b)$  differenzierbar mit  $F'(x) = f(x)$ , bei denen  $f$  stetig ist.

**Beweis:** Für alle  $p \in \mathcal{P}[a, b]$  enthält wegen dem Mittelwertsatz jedes Teilintervall mit Abschluss  $[x_{i-1}, x_i]$  einen Zwischenpunkt  $\xi_i$  mit  $f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = F(x_i) - F(x_{i-1})$  und  $R(p, f, \xi) = F(b) - F(a)$ . Aus dem Kriterium von Riemann folgt  $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ . Die zweite Aussage folgt wie im Satz 8.3 (iv) aus Satz 8.26 (iii). **q.e.d.**

**Beispiel 8.28. (i)** Sei  $1 < \alpha < 2$  und  $F(x) = \begin{cases} |x|^\alpha \sin \frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$

Dann ist  $F$  für  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  differenzierbar mit

$$F'(x) = \alpha \frac{|x|^{\alpha-1}}{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{|x|^{\alpha-1}}{x^2} \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Wegen  $\left| \frac{F(x)-F(0)}{x} \right| = |x|^{\alpha-1} \left| \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq |x|^{\alpha-1}$  ist  $F$  mit  $F'(0) = 0$  auch bei  $x = 0$  differenzierbar. Also gibt es differenzierbare Funktionen, deren Ableitungen auf allen Umgebungen eines Punktes nicht beschränkt sind, und die nicht riemannintegabel sind.

(ii) Sei  $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \geq 0 \\ -1 & \text{für } x < 0. \end{cases}$  Dann ist  $f$  auf allen kompakten Intervallen riemannintegabel. Offenbar gilt  $F(x) = \int_0^x f(t)dt = |x|$ . Also sind nicht alle Integrale von riemannintegablen Funktionen differenzierbar.

**Satz 8.29** (Restglied der Taylorformel in Integralform). Sei  $f \in C([a, b])$  auf  $(a, b)$   $(n + 1)$ -mal differenzierbar mit auf  $[a, b]$  stetig fortsetzbaren Ableitungen  $f', \dots, f^{(n)}$  und  $f^{(n+1)} \in \mathcal{R}[a, b]$ . Dann gilt für alle  $x_0, x \in [a, b]$

$$f(x) - T_{n,x_0}(x) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k = \int_{x_0}^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x - t)^n dt.$$

**Beweis:** Wir definieren  $g(t) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(t)}{k!} (x - t)^k$  für  $x, t \in [a, b]$ . Dann ist  $g$  auf  $(a, b)$  differenzierbar mit  $g' \in \mathcal{R}[a, b]$  und es gilt wie im Beweis von Satz 7.38

$$f(x) - T_{n,x_0}(x) = g(x) - g(x_0) = \int_{x_0}^x g'(t)dt = \int_{x_0}^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x - t)^n dt. \quad \mathbf{q.e.d.}$$

**Satz 8.30** (Mittelwertsatz der Integralrechnung)\*.  $\inf_{x \in [a, b]} f(x) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f dx \leq \sup_{x \in [a, b]} f(x)$  gilt für  $f \in \mathcal{R}[a, b]$  und  $\frac{1}{b-a} \int_a^b f dx = f(x_0)$  für  $f \in C([a, b])$  mit einem  $x_0 \in (a, b)$ .

**Beweis:**\* Wegen  $\inf_{x \in [a, b]} f(x) \leq f \leq \sup_{x \in [a, b]} f(x)$  folgt die erste Aussage aus der Monotonie. Wenn  $f$  stetig ist folgt für  $F(x) = \int_a^x f(t)dt$  aus dem Mittelwertsatz  $f(x_0) = F'(x_0) = \frac{F(b)-F(a)}{b-a} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$  mit  $x_0 \in (a, b)$ .  $\mathbf{q.e.d.}$

## 8.6 Uneigentliches Integral

Wir erweitern das Riemannintegral auf offene und unbeschränkte Intervalle.

**Definition 8.31.** Eine Funktion  $f$  heißt uneigentlich riemannintegabel auf dem offenen (nicht notwendigerweise beschränkten) Intervall  $(a, b) \subset \mathbb{R}$ , wenn  $f$  auf allen kompakten Teilintervallen riemannintegabel ist, und wenn für ein  $c \in (a, b)$  beide Grenzwerte  $\lim_{x \rightarrow a+} \int_x^c f(t)dt$  und  $\lim_{x \rightarrow b-} \int_c^x f(t)dt$  existieren.

**Beispiel 8.32.** (i)  $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx. \quad \int \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} \frac{-1}{(\alpha-1)x^{\alpha-1}} + C & \text{für } \alpha \neq 1 \\ \ln|x| + C & \text{für } \alpha = 1 \end{cases}$ .

Also existiert der Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_1^x \frac{1}{t^\alpha} dt$  nur für  $\alpha > 1$  mit  $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx = \frac{1}{\alpha-1}$ .

$$(ii) \int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx. \quad \int \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} \frac{-1}{(\alpha-1)x^{\alpha-1}} + C & \text{für } \alpha \neq 1 \\ \ln|x| + C & \text{für } \alpha = 1 \end{cases}$$

Dann existiert der Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^1 \frac{1}{x^\alpha} dx$  genau dann, wenn  $\alpha < 1$  mit  $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = \frac{1}{1-\alpha}$ . Wegen (i) folgt dann, dass  $\int_0^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx$  für kein  $\alpha$  existiert.

$$(iii) \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2} dx. \quad \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x) + C.$$

Also folgt  $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2} dx = \pi$  aus  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \int_x^0 \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$ .

Verschiedene Kriterien helfen zu entscheiden, ob diese Grenzwerte existieren. Hier einige Kriterien für uneigentliche Integrale  $\lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x f(t) dt$ .

**Cauchy Kriterium:**  $\lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x f(t) dt$  existiert genau dann, wenn es zu jedem  $\epsilon > 0$  ein  $c \in (a, b)$  gibt, so dass für alle  $a < c < d < e < b$  gilt  $|\int_d^e f(x) dx| < \epsilon$ .

**Monotoniekriterium:** Wenn  $f \geq 0$ , dann existiert  $\lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x f(t) dt$  genau dann, wenn  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$  auf  $x \in (a, b)$  beschränkt ist.

**Majorantenkriterium:** Wenn  $f \geq 0$  und  $f \leq g$ , dann existiert  $\lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x f(t) dt$ , wenn  $\lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x g(t) dt$  existiert.

**Definition 8.33.** Eine Funktion  $f$  auf einem offenen (unbeschränkten) Intervall heißt absolut riemannintegabel, wenn  $|f|$  riemannintegabel ist.

Wegen der Dreiecksungleichung gilt dann  $|\int_a^b f(x) dx| \leq \int_a^b |f(x)| dx$ .

Alle absolut riemannintegablen Funktionen sind also auch riemannintegabel.

**Satz 8.34** (Integralkriterium für Reihen). Für monoton fallendes  $f : [1, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  ist  $(\sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^n f(x) dx)_{n \in \mathbb{N}}$  eine konvergente monoton fallende Folge positiver Zahlen. Für alle  $m < n \in \mathbb{N}$  gilt

$$f(n) + \int_m^n f(x) dx \leq \sum_{k=m}^n f(k) \leq f(m) + \int_m^n f(x) dx.$$

Die Reihe  $(\sum f(n))_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert genau dann, wenn  $\int_1^\infty f(x) dx < \infty$ . Dann gilt:

$$\int_1^\infty f(x) dx \leq \sum_{n=1}^\infty f(n) \leq f(1) + \int_1^\infty f(x) dx.$$

**Beweis:** Für  $m < n \in \mathbb{N}$  sei  $p_{m,n} \in \mathcal{P}[m, n]$  die Partition  $[m, m+1) \cup \dots \cup [n-1, n]$ . Dann ist offenbar  $\sum_{k=m+1}^n f(k) \leq s(p_{m,n}, f)$  und  $S(p_{m,n}, f) = \sum_{k=m}^{n-1} f(k)$ . Also gilt

$$\sum_{k=m+1}^n f(k) \leq \int_m^n f(x) dx \leq \sum_{k=m}^{n-1} f(k).$$

Für  $n = m+1$  zeigt die linke Ungleichung  $f(m+1) - \int_m^{m+1} f(x) dx \leq 0$  dass  $(\sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^n f(x) dx)_{n \in \mathbb{N}}$  monoton fällt. Durch Addieren von  $f(m)$  bzw.  $f(n)$  folgt die zweite Aussage. Mit  $m = 1$  ist die vorangehende Folge nach unten durch  $(f(n))_{n \in \mathbb{N}}$  beschränkt, also positiv, und wegen dem Monotonieprinzip konvergent. Im Grenzwert  $n \rightarrow \infty$  folgt die dritte Aussage aus dem Monotonieprinzip und dem Majorantenkriterium. **q.e.d.**

**Beispiel 8.35.** (i) Der Grenzwert  $(\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n^s})_{n \in \mathbb{N}}$  heißt Riemannsche  $\zeta$ -Funktion und ist genau dann konvergent, wenn  $\int_1^\infty \frac{1}{x^s} dx$  existiert. Also für  $s > 1$ . Dann gilt

$$\frac{1}{s-1} < \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} < 1 + \frac{1}{s-1}.$$

(ii) Die Folge  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$  ist eine monoton fallende konvergente Folge positiver Zahlen. Der Grenzwert  $\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}) - \ln(n)$  wird Eulersche Konstante genannt. Bis heute ist nicht bekannt, ob er rational oder irrational ist.

(iii) Wegen (i) ist die Funktion  $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$  für  $s \in (1, \infty)$  konvergent. Die Folge

$$f_n(s) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^s} - \int_1^n \frac{dx}{x^s}$$

ist wegen dem vorangehenden Satz auf  $s \in (0, \infty)$  eine monoton fallende Folge von Funktionen. Weil die folgende Formel auch für  $s = 1$  gilt

$$\int_1^n \frac{dx}{x^s} = \frac{n^{1-s} - 1}{1-s} = \frac{\exp((1-s) \ln n) - 1}{1-s} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\ln(n))^k (1-s)^{k-1}}{k!},$$

ist das eine Folge von stetigen Funktionen auf  $s \in \mathbb{R}$ . Wegen der rechten Ungleichung der zweiten Aussage von Satz 8.34, Satz 5.27 und weil  $s \mapsto m^{-s}$  für alle  $m \in \mathbb{N}$  auf  $s \in (0, \infty)$  monoton fallend ist, konvergiert sie für alle  $\epsilon > 0$  auf  $[\epsilon, \infty)$  gleichmäßig gegen eine stetige Funktion. Auf  $s \in (1, \infty)$  ist wegen (i) der Grenzwert gleich

$$\zeta(s) - \int_1^\infty \frac{dx}{x^s} = \zeta(s) - \frac{1}{s-1}.$$

Also ist  $\lim_{s \rightarrow 1+} (\zeta(s) - \frac{1}{s-1}) = \gamma$ , weil für  $s = 1$  gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \int_1^n \frac{dx}{x} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) \right) = \gamma.$$

(iv)  $\left( \sum_{(n+1) \ln^s(n+1)} \frac{1}{(n+1) \ln^s(n+1)} \right)_{n \in \mathbb{N}} < \infty \Leftrightarrow \int_2^\infty \frac{1}{x \ln^s(x)} dx = \int_{\ln(2)}^\infty \frac{1}{t^s} dt < \infty \Leftrightarrow s > 1.$

(v) Nach Euler ist die  $\Gamma$ -Funktion definiert durch 
$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt.$$

Dieses Integral ist an beiden Grenzen uneigentlich. Wir zerlegen es in  $\int_0^{\infty} = \int_0^1 + \int_1^{\infty}$ . Auf  $t \in (0, 1]$  ist der Integrand beschränkt durch  $e^{-1} t^{x-1} \leq e^{-t} t^{x-1} \leq t^{x-1}$ . Deshalb konvergiert das erste Integral für  $x - 1 > -1 \iff x > 0$ . Wegen  $e^{-t} t^{x-1} = \exp(-t + (x-1) \ln(t))$  und weil für alle  $\epsilon > 0$  im Grenzwert  $\lim_{t \rightarrow \infty}$  der Ausdruck  $-\epsilon t + (x-1) \ln(t)$  negativ ist, konvergiert das zweite Integral für alle  $x \in \mathbb{R}$ . Also ist  $\Gamma(x)$  für alle  $x \in (0, \infty)$  definiert. Durch eine partielle Integration erhalten wir

$$\int_{\epsilon}^R e^{-t} t^x dt = -e^{-t} t^x \Big|_{t=\epsilon}^{t=R} + x \int_{\epsilon}^R e^{-t} t^{x-1} dt.$$

Im Grenzwert  $\epsilon \rightarrow 0$  und  $R \rightarrow \infty$  erhalten wir für alle  $x \in (0, \infty)$  die Funktionalgleichung  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ . Mit  $\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = 1$  folgt induktiv  $\Gamma(n) = (n-1)!$ .

## 8.7 Die Konvergenz von Taylorreihen

**Satz 8.36** (Abelscher Grenzwertsatz). Wenn die Potenzreihe  $(\sum_{n \in \mathbb{N}_0} a_n x^n)$  für ein  $x \in \mathbb{K}$  konvergiert, dann konvergiert die Potenzreihenfunktion  $t \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}_0} a_n (tx)^n$  auf  $t \in [0, 1]$  gleichmäßig gegen eine stetige Funktion von  $[0, 1]$  nach  $\mathbb{K}$ .

**Beweis:** Indem wir  $a_n$  durch  $a_n x^n$  ersetzen können wir  $x$  weglassen. Zur Abkürzung setzen wir  $S_{m,k} = \sum_{n=m+1}^{m+k} a_n$ . Wegen dem Cauchy Kriterium für Reihen gibt es für jedes  $\epsilon > 0$  ein  $N \in \mathbb{N}$  so dass  $|S_{m,k}| < \epsilon$  für alle  $m \geq N$  und alle  $k \in \mathbb{N}$  gilt. Dann folgt

$$\begin{aligned} \sum_{n=m+1}^{m+k} a_n t^n &= S_{m,1} t^{m+1} + (S_{m,2} - S_{m,1}) t^{m+2} + \dots + (S_{m,k} - S_{m,k-1}) t^{m+k} \\ &= S_{m,1} (t^{m+1} - t^{m+2}) + S_{m,2} (t^{m+2} - t^{m+3}) + \dots + S_{m,k-1} (t^{m+k-1} - t^{m+k}) + S_{m,k} t^{m+k}. \end{aligned}$$

Für  $t \in [0, 1]$  sind die hinteren Faktoren  $t^{m+1} - t^{m+2}, t^{m+2} - t^{m+3}, \dots, t^{m+k-1} - t^{m+k}, t^{m+k}$  alle nicht negativ und ihre Summe gleich  $t^{m+1} \leq 1$ . Aus  $|S_{m,k}| < \epsilon$  folgt also

$$\left| \sum_{n=m+1}^{m+k} a_n t^k \right| < \epsilon (t^{m+1} - t^{m+2} + t^{m+2} - \dots - t^{m+k} + t^{m+k}) = \epsilon t^{m+1} \leq \epsilon \quad \text{für alle } t \in [0, 1].$$

Also konvergiert die Potenzreihe auf  $t \in [0, 1]$  gleichmäßig, und damit wegen Satz 5.27 gegen eine stetige Funktion. **q.e.d.**

**Beispiel 8.37. (i)** Für alle  $x_0 \in (0, \infty)$  hat  $x \mapsto f(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{nx_0^n}$  im Konvergenzbereich  $|x| < x_0$  die Ableitung  $f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{x_0^{n+1}} = \frac{1}{x+x_0}$ . Also stimmt sie mit

$f(x) = \ln(x+x_0) - \ln(x_0)$  überein. Deshalb sind sowohl  $\ln$  also auch  $\log_a$  auf  $(0, \infty)$  reellanalytisch. Insbesondere folgt aus dem Abelschen Grenzwertsatz  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln(2)$ .

**(ii)** Für  $\alpha \in \mathbb{R}$  und  $x_0 \in (0, \infty)$  ( $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  für  $\alpha \in \mathbb{Z} \cap (-\infty, 0)$ ) hat

$$x \mapsto f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x_0^{\alpha-n} x^n \quad \text{mit} \quad \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n(n-1)\cdots 1} \quad \text{und} \quad \binom{\alpha}{0} = 1$$

wegen dem Quotiententest den Konvergenzradius  $R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\alpha-n|}{|x_0|(n+1)}} = |x_0|$ . Die

Ableitung ist  $x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} n x_0^{\alpha-n} x^{n-1} = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha-1}{n} x_0^{\alpha-1-n} x^n$ . Wegen

$$\binom{\alpha-1}{n} + \binom{\alpha-1}{n-1} = \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} (\alpha-n+n) = \binom{\alpha}{n}, \quad \binom{\alpha-1}{0} = \binom{\alpha}{0}$$

ist  $(x_0+x) \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha-1}{n} x_0^{\alpha-1-n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x_0^{\alpha-n} x^n$ . Dann erfüllt  $f$  die Differentialgleichung  $(x_0+x)f' = \alpha f$  mit  $f(0) = x_0^\alpha$ . Also verschwindet die Ableitung von

$$g(x) = \frac{f(x)}{(x_0+x)^\alpha} \quad g'(x) = \frac{(x+x_0)f'(x) - \alpha f(x)}{(x+x_0)^{\alpha+1}} = 0 \quad \text{mit} \quad g(0) = 1.$$

Dann folgt aus Satz 7.16 (i), dass  $f(x) = (x+x_0)^\alpha$  für alle  $|x| < x_0$  gilt. Also sind für  $\alpha \in \mathbb{R}$  die Funktionen  $x \mapsto x^\alpha$  auf  $(0, \infty)$  und für  $\alpha \in \mathbb{Z}$  auf  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  reellanalytisch.

**(iii)** Die Ableitungen der Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen sind wegen (ii) im Inneren ihrer Definitionsbereiche reellanalytisch. Für alle  $|x| < 1$  gilt

$$\begin{aligned} \arcsin'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-1)^n x^{2n} & \arccos'(x) &= -\sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-1)^n x^{2n} \\ \arctan'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} & \operatorname{arccot}'(x) &= -\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}. \end{aligned}$$

Wegen Beispiel 7.4 (v) sind sie selber dann auch reellanalytisch. Für alle  $|x| < 1$  gilt

$$\begin{aligned} \arcsin(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} & \arccos(x) &= \frac{\pi}{2} - \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} \\ \arctan(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} & \operatorname{arccot}(x) &= \frac{\pi}{2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}. \end{aligned}$$

Wegen Beispiel 7.18 gilt  $x \geq \ln(1+x)$  für  $x > -1$ . Dann folgt

$$\begin{aligned} \ln \left( (-1)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n} \right) &= \ln \left( \frac{1}{2} \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n} \right) = \ln \left( \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{2n}\right) \right) \\ &\leq -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) \leq -\frac{1}{2} \ln \left( \frac{2}{1} \frac{3}{2} \cdots \frac{n+1}{n} \right) = \ln \left( \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right). \end{aligned}$$

Dann konvergieren aber die ersten beiden Potenzreihen auch für  $x = \pm 1$  und die letzten beiden wegen der alternierenden Reihe von Leibniz. Wegen dem Abelschen Grenzwertsatz gelten die obigen Gleichungen dann auch für  $x = \pm 1$ . Insbesondere ist

$$\pi = 4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

**Satz 8.38.** Sei  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge von Funktionen in  $C^1((a, b))$  eines beschränkten Intervalles  $(a, b)$ , die für ein  $x_0 \in (a, b)$  punktweise konvergiert. Wenn die Folge  $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  außerdem gleichmäßig gegen  $g$  konvergiert, dann konvergiert  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gleichmäßig gegen eine Funktion  $f \in C^1((a, b))$  und es gilt  $f' = g$ .

**Beweis:** Wegen dem Mittelwertsatz gilt für alle  $x, x_0 \in (a, b)$  und alle  $n, m \in \mathbb{N}$

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x_0) - f_m(x_0)| + |x - x_0| \sup\{|f'_n(y) - f'_m(y)| \mid y \in (a, b)\}.$$

Wegen Satz 5.27 konvergiert  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gleichmäßig gegen eine Funktion  $f \in C((a, b))$ . Wegen dem Mittelwertsatz gibt es für alle  $x \neq x_1 \in (a, b)$  eine Folge  $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $(x, x_1)$  bzw.  $(x_1, x)$ , so dass  $f_n(x) - f_n(x_1) = (x - x_1)f'_n(\xi_n)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt. Wegen dem Auswahlprinzipien von Bolzano-Weierstraß konvergiert eine Teilfolge von  $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gegen  $\xi \in [x, x_1]$  bzw.  $\xi \in [x_1, x]$ . Weil  $g$  wegen Satz 5.27 stetig ist und wegen

$$|f'_n(\xi_n) - g(\xi)| \leq |f'_n(\xi_n) - g(\xi_n)| + |g(\xi_n) - g(\xi)|,$$

konvergiert die entsprechende Teilfolge von  $(f'_n(\xi_n))_{n \in \mathbb{N}}$  gegen  $g(\xi)$ . Also konvergiert  $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  gegen  $f(x) = f(x_1) + (x - x_1)g(\xi)$ . Aus der Stetigkeit von  $g$  folgt, dass  $f$  bei  $x_1$  differenzierbar ist und  $g(x_1)$  die Ableitung  $f'(x_1)$  ist. **q.e.d.**

**Korollar 8.39\*:** Sei  $(\sum f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine gleichmäßig konvergente Reihe in  $C((a, b))$  auf dem beschränkten Intervall  $(a, b)$  und  $(\sum f_n(x_0))_{n \in \mathbb{N}}$  konvergent mit  $x_0 \in (a, b)$ . Dann konvergiert  $(\sum f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gleichmäßig gegen  $f \in C^1((a, b))$  und  $(\sum f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gegen  $f'$ . **q.e.d.**

**Satz 8.40** (Satz von Borel). Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  eine beliebige Folge in  $\mathbb{R}$ . Dann gibt es eine Funktion, deren Taylorreihe bei  $x_0 = 0$  gleich  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$  ist, und die außerhalb von  $(-2, 2)$  verschwindet. D.h. alle Potenzreihen sind Taylorreihen einer solchen Funktion.

**Beweis\*:**

$$\text{Sei } h(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } |x| \leq 1 \\ \exp\left(\exp\left(\frac{-1}{|x|-1}\right) \cdot \frac{-1}{2-|x|}\right) & \text{für } 1 < |x| < 2 \\ 0 & \text{für } 2 \leq |x| \end{cases}$$

Dann ist  $h \in C^\infty(\mathbb{R})$  eine 'Hutfunktion', die außerhalb von  $(-2, 2)$  verschwindet, und die auf  $[-1, 1]$  gleich 1 ist. Für alle  $n \in \mathbb{N}$  existiert dann eine Konstante  $M_n > 0$

$$M_n = \max\{\|h_n\|_\infty, \|h'_n\|_\infty, \dots, \|h_n^{(n-1)}\|_\infty\}$$

mit  $h_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto x^n \cdot h(x)$ . Dann sei für eine beliebige reelle Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$

$$C_n = |a_n| M_n + 1 \quad \text{und} \quad f_n(x) = \frac{a_n}{n! C_n^n} h_n(C_n \cdot x) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

Für alle  $n, m \in \mathbb{N}_0$  gilt dann  $f_n^{(m)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{für } m \neq n \\ a_n & \text{für } m = n. \end{cases}$  Außerdem gilt

$$\|f_n^{(m)}\|_\infty = \frac{|a_n| C_n^m}{n! C_n^n} \|h_n^{(m)}\|_\infty \leq \frac{|a_n| M_n C_n^m}{n! C_n^n} < \frac{C_n^{m+1}}{n! C_n^n} \leq \frac{1}{n!} \quad \text{für alle } n > m \in \mathbb{N}_0.$$

Also konvergiert für alle  $m \in \mathbb{N}_0$   $(\sum f_n^{(m)})_{n \in \mathbb{N}_0}$  gleichmäßig. Wegen Korollar 8.39 konvergieren also für alle  $m \in \mathbb{N}_0$  die Reihen  $(\sum f_n)_{n \in \mathbb{N}_0}, (\sum f'_n)_{n \in \mathbb{N}_0}, \dots, (\sum f_n^{(m)})_{n \in \mathbb{N}_0}$  gleichmäßig gegen  $f, f', \dots, f^{(m)}$ . Also ist der Grenzwert  $f = \sum_{n=0}^\infty f_n$  eine Funktion in  $C^\infty(\mathbb{R})$  und es gilt  $f^{(m)}(0) = a_m$  für alle  $m \in \mathbb{N}_0$ . **q.e.d.**

**Beispiel 8.41. (i)\*** Die Funktion  $x \mapsto \sum_{n=0}^\infty \frac{x^n}{(n+1)!} = \frac{e^x - 1}{x}$  ist auf ganz  $\mathbb{R}$  reellanalytisch und hat dort keine Nullstellen. Deshalb definiert  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \frac{x}{e^x - 1}$  eine Funktion in  $C^\infty(\mathbb{R})$ . Die Ableitungen bei  $x = 0$  heißen Bernoulli Zahlen  $B_0 = f(0) = 1, B_1 = f'(0) = -\frac{1}{2}, \dots$ . Dann hat  $f$  die Taylorreihe  $f(x) = \sum_{n=0}^\infty \frac{B_n x^n}{n!}$ . Aus  $(e^x - 1)f(x) = x$  folgt

$$\left(\sum_{n=1}^\infty \frac{x^n}{n!}\right) \left(\sum_{n=0}^\infty \frac{B_n x^n}{n!}\right) = \sum_{n=1}^\infty \sum_{k=0}^{n-1} \frac{B_k}{k!(n-k)!} x^n = x.$$

Wegen Beispiel 7.44 (ii) ist  $f$  reellanalytisch, und es gilt die folgende Rekursionsformel

$$\frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} B_k = 0 \quad \text{also } B_n = -\frac{1}{(n+1)} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} B_k \quad \text{und } B_0 = 1.$$

Aus  $f(x) - f(-x) = \frac{x}{e^x - 1} + \frac{x}{e^{-x} - 1} = \frac{x}{e^x - 1} + \frac{x e^x}{1 - e^x} = -x$  folgt  $B_{2n+1} = 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

(ii)\* Wegen Beispiel 7.44 (ii) ist  $\tan$  reellanalytisch. Er hat bei  $x_0 = 0$  die Taylorreihe

$$\begin{aligned}\tan(x) &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{i(e^{ix} + e^{-ix})} = -i \frac{e^{2ix} + 1 - 2}{e^{2ix} + 1} = \frac{2i(e^{2ix} - 1)}{e^{4ix} - 1} - i = \frac{2i(e^{2ix} + 1) - 4i}{e^{4ix} - 1} - i = \\ &= \frac{1}{x} \left( \frac{2ix}{e^{2ix} - 1} + ix - \frac{4ix}{e^{4ix} - 1} - 2ix \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n} - 4^{2n}}{(2n)!} (-1)^n B_{2n} x^{2n-1}.\end{aligned}$$

(iii)\* Wegen Beispiel 7.44 (ii) ist  $\cot$  reellanalytisch. Er hat bei  $x_0 = 0$  die Taylorreihe

$$\begin{aligned}x \cot(x) &= ix \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{e^{ix} - e^{-ix}} = ix \frac{e^{2ix} + 1}{e^{2ix} - 1} = ix \frac{2 + e^{2ix} - 1}{e^{2ix} - 1} = \frac{2ix}{e^{2ix} - 1} + ix = \\ &= 2ixB_1 + ix + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n}}{(2n)!} (-1)^n B_{2n} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n}}{(2n)!} (-1)^n B_{2n} x^{2n}.\end{aligned}$$

Also folgt  $\cot(x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}}{(2n)!} (-1)^n B_{2n} x^{2n-1}$

(iv)\* Wir betrachten die Reihe  $f(x) = \frac{1}{x} + \sum_{n \in \mathbb{N}} \left( \frac{1}{x-n} + \frac{1}{x+n} \right) = \frac{1}{x} + \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{2x}{x^2 - n^2}$ .  
Sie konvergiert für  $\epsilon > 0$  auf  $x \in B(0, \frac{1}{\epsilon}) \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (B(n, n\epsilon) \cup B(-n, n\epsilon))$  gleichmäßig mit

$$\begin{aligned}f^2(x) &= \frac{1}{x^2} + \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{4}{x^2 - n^2} + \sum_{m, n \in \mathbb{N}} \frac{4x^2}{(x^2 - m^2)(x^2 - n^2)} \\ &= \frac{1}{x^2} + \sum_{n \in \mathbb{N}} \left( \frac{4}{x^2 - n^2} + \frac{4x^2}{(x^2 - n^2)^2} \right) + \sum_{m, n \in \mathbb{N}, n \neq m} \left( \frac{4x^2}{x^2 - n^2} - \frac{4x^2}{x^2 - m^2} \right) \frac{1}{n^2 - m^2} \\ &= \frac{1}{x^2} + \sum_{n \in \mathbb{N}} \left( \frac{4}{x^2 - n^2} + \frac{4x^2}{(x^2 - n^2)^2} \right) + \sum_{n \in \mathbb{N}} \left( \frac{8x^2}{x^2 - n^2} \sum_{m \in \mathbb{N} \setminus \{n\}} \frac{1}{n^2 - m^2} \right) \\ &= \frac{1}{x^2} + \sum_{n \in \mathbb{N}} \left( \frac{4}{x^2 - n^2} + \frac{4x^2}{(x^2 - n^2)^2} - \frac{6x^2 - 6n^2 + 6n^2}{(x^2 - n^2)n^2} \right) = -f'(x) - \alpha^2 \text{ mit } \alpha^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{6}{n^2}.\end{aligned}$$

Dabei haben wir folgendes benutzt:  $2n \sum_{m \in \mathbb{N} \setminus \{n\}} \frac{1}{m^2 - n^2} = \sum_{m=1}^{n-1} \left( \frac{1}{m-n} - \frac{1}{m+n} \right) +$   
 $+ \sum_{l=1-n}^n \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{l+2nk-n} - \frac{1}{l+2nk+n} \right) = - \sum_{m=1}^{n-1} \left( \frac{1}{m} + \frac{1}{m+n} \right) + \sum_{l=1}^{2n} \frac{1}{l} = \frac{1}{n} + \frac{1}{2n},$

und zuletzt Satz 8.38. Durch Integration über  $dx$  folgt

$$\operatorname{arccot}\left(\frac{f}{\alpha}\right) = - \int \frac{\frac{f'}{\alpha} dx}{\left(\frac{f}{\alpha}\right)^2 + 1} = -\alpha \int \frac{f' dx}{f^2 + \alpha^2} = \alpha \int dx = \alpha x + C.$$

Weil  $f$  Polstellen bei  $x \in \mathbb{Z}$  und  $\cot$  bei  $\pi\mathbb{Z}$  hat folgt  $\alpha = \pi$  und  $C \in \pi\mathbb{Z}$  und damit

$$f(x) = \pi \cot(\pi x) \quad \cot(x) = \frac{1}{\pi} f\left(\frac{x}{\pi}\right) = \frac{1}{x} + \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{2x}{x^2 - n^2 \pi^2} \quad (\text{Partialbruchzerlegung von } \cot).$$

Durch mehrmaliges Anwenden von Satz 8.38 erhalten wir dann für alle  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} \cot(x) &= \frac{1}{\pi \frac{x}{\pi}} + \sum_{n \in \mathbb{N}} \left( \frac{1}{x - \pi n} + \frac{1}{x + \pi n} \right). \\ \cot'(x) &= -\frac{1}{x^2} - \sum_{n \in \mathbb{N}} \left( \frac{1}{(x - \pi n)^2} + \frac{1}{(x + \pi n)^2} \right). \\ &\vdots = \vdots \\ \cot^{(k)}(x) &= \frac{(-1)^k k!}{x^{k+1}} + \sum_{n \in \mathbb{N}} \left( \frac{(-1)^k k!}{(x - \pi n)^{k+1}} + \frac{(-1)^k k!}{(x + \pi n)^{k+1}} \right). \end{aligned}$$

Der Vergleich mit der in (iii) berechneten Taylorreihe bei  $x_0 = 0$  ergibt

$$\begin{aligned} \zeta(2) &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n^2} = -\frac{\pi^2}{2} \frac{2^2 (-1) B_2}{2!} = \frac{\pi^2}{6}, & \zeta(4) &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n^4} = -\frac{\pi^4}{2} \frac{2^4 B_4}{4!} = \frac{\pi^4}{90}, \\ \zeta(2k) &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n^{2k}} = -\frac{\pi^{2k}}{2} \frac{2^{2k} (-1)^k B_{2k}}{(2k)!} = \frac{(-1)^{k-1} 2^{2k-1} B_{2k} \pi^{2k}}{(2k)!} \quad \text{für } k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

(v)\* Für eine Nullfolge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert das Produkt  $\prod_{n \in \mathbb{N}} (1 + a_n)$  wegen den Eigenschaften von  $\ln$  genau dann, wenn die Reihe  $(\sum \ln(1 + a_n))_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert. Wegen Beispiel 8.37 (i) und Satz 7.38 gilt für alle  $k \in \mathbb{N}_0$  und für alle  $x$  mit  $|x| \leq \frac{1}{2}$

$$\left| \ln(1+x) - \sum_{n=1}^k \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \right| \leq \frac{C_k}{(k+1)!} |x|^{k+1} \quad \text{mit } C_k = \sup_{|x| \leq \frac{1}{2}} \frac{k!}{|1+x|^{k+1}} = 2^{k+1} k!.$$

Also konvergiert das Produkt  $\prod_{n \in \mathbb{N}} (1 + a_n)$ , wenn für ein  $k \in \mathbb{N}_0$  die Reihen  $(\sum a_n)_{n \in \mathbb{N}}, \dots, (\sum a_n^k)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(\sum |a_n|^{k+1})_{n \in \mathbb{N}}$  konvergieren.

Insbesondere konvergiert das Produkt  $f(x) = x \prod_{n \in \mathbb{N}} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)$  für alle  $x \in \mathbb{K}$  mit

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x} - \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\frac{2x}{n^2}}{1 - \frac{x^2}{n^2}} = \frac{1}{x} + \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{2x}{x^2 - n^2} = \frac{1}{x} + \sum_{n \in \mathbb{N}} \left( \frac{1}{x - n} + \frac{1}{x + n} \right) = \pi \cot(\pi x).$$

Also verschwindet die Ableitung von  $\frac{\pi f(x)}{\sin(\pi x)}$  und wegen  $f'(0) = 1 = \sin'(0)$  folgt

$$f(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi}, \quad \sin(x) = \pi f\left(\frac{x}{\pi}\right) = x \prod_{n \in \mathbb{N}} \left(1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2}\right) \quad (\text{Produktzerlegung von } \sin).$$

Für  $x = \frac{1}{2}$  erhalten wir die sogenannte Formel von Wallis:

$$\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{2n \cdot 2n}{(2n-1)(2n+1)} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{4n^2}\right)^{-1} = \frac{\frac{\pi}{2}}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{\pi}{2}.$$

# Index

- Äquivalenzrelation, 7
- Abbildung, 7
  - bijektive  $\sim$ , 8
  - Bild einer  $\sim$ , 7
  - Definitionsbereich einer  $\sim$ , 7
  - identische  $\sim$ , 8
  - injektive  $\sim$ , 8
  - Komposition von  $\sim$ en, 8
  - Nachfolger $\sim$ , 16, 18
  - stetige  $\sim$ , 57
  - surjektive  $\sim$ , 8
  - Umkehr $\sim$ , 8
  - Wertebereich einer  $\sim$ , 7
- Abel, Niels Henrik 1802-1829
  - $\sim$ scher Grenzwertsatz, 99
- Ableitung
  - $\sim$  der Umkehrfunktion, 71
  - $\sim$  einer
    - $\sim$  Funktion, 69
    - $\sim$  Potenzreihenfunktion, 70
  - $\sim$  und Konvexität, 77, 78
  - $\sim$  und Monotonie, 74
  - höhere  $\sim$ , 80
    - $\sim$  und Konvexität, 78
- Abschluß einer Menge, 56
- absolut
  - $\sim$ e Konvergenz, 42
- Abstand  $\rightarrow$  Metrik, 14, 28
- Addition
  - $\sim$ stheorem, 53
  - Axiome der  $\sim$ , 9
- Algebra
  - Fundamentalsatz der  $\sim$ , 68
- analytisch
  - reell $\sim$ e Funktion, 82
- Ankathete, 67
- Archimedes von Syrakus 287 a.C.–212 a.C.
  - $\sim$ ischer Körper, 21
  - Satz von  $\sim$ –Eudoxos, 21
- Arcus
  - $\sim$ cosinus, 66
  - $\sim$ cotangens, 66
  - $\sim$ sinus, 66
  - $\sim$ tangens, 66
- Argument, 67
- arithmetisch
  - $\sim$ es Mittel, 13
- Axiome
  - $\sim$  der Addition, 9
  - $\sim$  der Multiplikation, 9
  - Distributivgesetz, 10
  - Ordnungs $\sim$ , 12
  - Peano  $\sim$ , 25
  - Vollständigkeits $\sim$ , 20, 36
- Ball, 55
- Bernoulli, Johann 1667–1748
  - $\sim$  Ungleichung, 17
  - $\sim$  Zahlen, 102
- beschränkt
  - $\sim$ e Folge, 33
  - $\sim$ e Funktion, 60
  - $\sim$ e Menge, 15, 56
- Betrag, 13, 28
- Beweis
  - $\sim$  durch vollständige Induktion, 17
- Bild, 7

- Ur $\sim$ , 8
- binomische Formel, 38
- Bolzano, Bernhard Placidus Johann Nepomuk 1781–1848
  - Auswahlprinzip von  $\sim$ –Weierstraß, 35
- Borel, Felix Edouard Justin Emile 1871–1956, 57
  - Satz von  $\sim$ , 101
  - Satz von Heine– $\sim$ , 57
- Bruch
  - Partial $\sim$ zerlegung, 88
- Cantor, Georg Ferdinand Ludwig Philipp 1845–1918, 5
- Cauchy, Augustin Louis 1789–1857
  - $\sim$ 's Verdichtungssatz, 44
  - $\sim$ –Produkt von Reihen, 46
  - $\sim$ folge, 35
  - $\sim$ kriterium, 35, 97
    - $\sim$  für Reihen, 42
- charakteristisch
  - $\sim$ e Funktion, 83
- Cosinus, 53, 64–67
- Cotangens cot, 66
  - Partialbruchzerlegung von  $\sim$ , 104
- Darboux, Jean Gaston 1842–1917
  - Kriterium von  $\sim$ , 91
- Darstellung
  - Dezimabruch $\sim$ , 45
  - Polar $\sim$ , 67
- de L'Hôpital, Guillaume Francois Antoine Marquis 1661–1704
  1. Regel von  $\sim$ , 76
  2. Regel von  $\sim$ , 76
- de Morgan, Augustus 1806–1871
  - $\sim$ sche Regel, 6
- Dedekind, Julius Wilhelm Richard 1831–1916
  - $\sim$ sche Schnitte, 26
- Definitionsbereich, 7
- Differential
  - $\sim$  einer Funktion, 69
  - $\sim$ – und Integralrechnung
    - Hauptsatz der  $\sim$ , 84, 95
- differenzierbar
  - $\sim$ e Funktion, 69
- Drehung, 67
- Dreiecksungleichung, 28
- Eigenschaften
  - $\sim$  der Exponentialfunktion, 47, 63
  - $\sim$  des Abstandes, 14
  - $\sim$  des Betrags, 14, 28
  - $\sim$  des Logarithmus, 63
  - $\sim$  des Riemannintegrals, 93
  - $\sim$  von Potenzreihenfunktionen, 50
- Ein
  - $\sim$ s 1, 9
  - imaginäre  $\sim$ heit, 27
- Euler, Leonard 1707–1783
  - $\sim$ sche Formel, 53
  - $\sim$ sche Konstante  $\gamma$ , 98
  - $\sim$ sche Zahl  $e$ , 40, 47
- Exponent
  - $\sim$ ialfunktion, 43, 47, 63
- Extremwert
  - lokaler  $\sim$ , 73
- Folge, 29
  - $\sim$  von Funktionen, 60
  - Cauchy $\sim$ , 35
  - Konvergenz einer  $\sim$ , 29
  - monoton fallende  $\sim$ , 33
  - monoton wachsende  $\sim$ , 33
  - monotone  $\sim$ , 33
  - Null $\sim$ , 29
  - streng monoton fallende  $\sim$ , 33
  - streng monoton wachsende  $\sim$ , 33
- Teil $\sim$ , 34
  - Grenzwert einer  $\sim$ , 36
  - konvergente  $\sim$ , 35
  - monotone  $\sim$ , 35
- Zahlen $\sim$ , 29

- Formel
- binomische  $\sim$ , 38
  - Eulersche  $\sim$ , 53
  - Taylor $\sim$ , 81, 96
- Fundamentalsatz
- $\sim$  der Algebra, 68
- Funktion
- $\Gamma$ - $\sim$ , 99
  - $\sim$ swert
    - Grenzwert von  $\sim$ en, 75
  - Arcus
    - $\sim$ cosinus, 66
    - $\sim$ cotangens, 66
    - $\sim$ sinus, 66
    - $\sim$ tangens, 66
  - beschränkte  $\sim$ , 60
  - charakteristische  $\sim$ , 83
  - Cosinus, 53, 64–67
  - Cotangens, 66
    - Partialbruchzerlegung der  $\sim$ , 104
  - differenzierbare  $\sim$ , 69
  - Exponential $\sim$ , 43, 47, 63
  - Folge von  $\sim$ en, 60
  - Graph einer  $\sim$ , 69
  - konkave  $\sim$ , 77
  - konvexe  $\sim$ , 77
  - Logarithmus, 63
    - $\sim$  zur Basis  $a$ , 64
    - natürlicher  $\sim$ , 63
  - monoton fallende  $\sim$ , 61
  - monoton wachsende  $\sim$ , 61
  - Monotonie einer  $\sim$ , 61
  - reellanalytische  $\sim$ , 82
  - Regel $\sim$ , 83
  - riemannintegrale  $\sim$ , 91, 96
  - Riemannsches  $\zeta$ - $\sim$ , 41, 98, 104
  - Sinus, 53, 64–67
    - Produktzerlegung der  $\sim$ , 104
  - Stamm $\sim$ , 85
  - streng monoton fallende  $\sim$ , 62
  - streng monoton wachsende  $\sim$ , 61
  - Tangens, 66
  - Treppen $\sim$ , 83
  - trigonometrische  $\sim$ en, 64–66
- Gegenkathete, 67
- Gleichung
- Un $\sim$ 
    - $\sim$  von Jensen, 78
    - Bernoulli  $\sim$ , 17
    - Dreiecks $\sim$ , 28
    - Youngsche  $\sim$ , 79
- Graph, 69
- Grenzwert  $\lim$ , 29
- $\sim$  einer Reihe, 41
  - $\sim$  einer Teilfolge, 36
  - $\sim$  einer Zahlenfolge, 29
  - $\sim$  von Funktionswerten, 75
  - Abelscher  $\sim$ satz, 99
- Häufungspunkt, 36
- Hauptsatz, 84, 95
- Heine, Heinrich Eduard 1821–1881
- Satz von  $\sim$ -Borel, 57
- Hypothense, 67
- Identität
- $\sim$ satz für Potenzreihenfunktionen, 51
- imaginär
- $\sim$ e Einheit, 27
- Induktion
- vollständige  $\sim$ , 17
- Integral
- $\sim$  von Regelfunktionen, 84
  - $\sim$  von Treppenfunktionen, 83
  - $\sim$ kriterium für Reihen, 97
  - $\sim$ rechnung
    - Hauptsatz der Differential- und  $\sim$ , 84, 95
    - Mittelwertsatz der  $\sim$ , 96
- Ober $\sim$ , 90
- Riemann $\sim$ , 91
- Eigenschaften des  $\sim$ , 93

- uneigentliches  $\sim$ , 96
  - Unter $\sim$ , 90
- Integration
  - $\sim$  durch Substitution, 86
  - partielle  $\sim$ , 87
- Intervall, 15
  - $\sim$ schachtelungsprinzip, 23
- Jensen, Johan Ludwig William Valdemar  
1859–1925
  - Ungleichung von  $\sim$ , 78
- Körper, 10
  - angeordneter  $\sim$ , 9, 12
  - archimedischer  $\sim$ , 21
- Kettenregel, 71
- Komplement, 6
- komplex
  - $\sim$ e Konjugation, 27
  - $\sim$ e Zahlen, 26
- Komposition, 8
- Konjugation
  - komplexe  $\sim$ , 27
- konkav, 77
- Konvergenz
  - $\sim$  einer Folge, 29
  - $\sim$ prinzipien, 33
  - $\sim$ radius einer Potenzreihe, 49
  - absolute  $\sim$ , 42
  - gleichmäßige  $\sim$ , 60
  - punktweise  $\sim$ , 60
- konvex, 77
  - $\sim$ ität
    - 2. Ableitung und  $\sim$ , 78
    - Ableitung und  $\sim$ , 77, 78
- Kriterium
  - $\sim$  von Darboux, 91
  - $\sim$  von Riemann, 92
  - Cauchy $\sim$ , 35, 97
    - für Reihen, 42
  - Integral $\sim$  für Reihen, 97
  - Majoranten $\sim$ , 42, 97
  - Monotonie $\sim$ , 97
- Leibniz, Gottfried Wilhelm von 1646–1716
  - $\sim$ regel, 70, 80
  - alternierende Reihe von  $\sim$ , 44
- Limes  $\lim$ , 29
  - $\sim$ inferior  $\underline{\lim}$ , 37
  - $\sim$ superior  $\overline{\lim}$ , 37
  - von Funktionswerten, 75
- Lipschitz, Rudolf Otto Sigismund 1832–  
1903
  - $\sim$  Stetigkeit, 59
- Logarithmus, 63
  - $\sim$  zur Basis  $a$   $\log_a$ , 64
  - natürlicher  $\sim$   $\ln$ , 63
- Mächtigkeit einer Menge, 18
- Majorantenkriterium, 42
- Maximum, 15
  - lokales  $\sim$ , 73
- Menge, 5
  - abgeschlossene  $\sim$ , 56
  - Abschluß einer  $\sim$ , 56
  - abzählbare  $\sim$ , 19
    - über $\sim$ , 19, 24
  - beschränkte  $\sim$ , 15, 56
  - endliche  $\sim$ , 19
  - höchstens abzählbare  $\sim$ , 19
  - induktive  $\sim$ , 16
  - kompakte  $\sim$ , 56
  - Mächtigkeit einer  $\sim$ , 18
  - offene  $\sim$ , 55
  - Potenz $\sim$ , 6
  - undendliche  $\sim$ , 19
- Metrik, 14, 28
- Minimum, 15
  - lokales  $\sim$ , 73
- Mittel
  - $\sim$ wertsatz, 74
    - $\sim$  der Integralsrechnung, 96
    - verallgemeinerter  $\sim$ , 74
  - arithmetisches  $\sim$ , 13

- Monotonie
  - $\sim$  der Ordnung, 12
  - $\sim$  einer Folge, 33
  - $\sim$  einer Funktion, 61
  - $\sim$ kriterium, 97
  - $\sim$ prinzip, 33
    - $\sim$  für Reihen, 42
  - Ableitung und  $\sim$ , 74
- Multiplikation
  - Axiome der  $\sim$ , 9
- Nachfolgerabbildung, 16, 18
- Norm
  - $\| \cdot \|_{\infty}$ , 60
  - Supremums $\sim$ , 60
- Null 0, 9
  - $\sim$ folge, 29
- Ordnung, 12
  - Totalität der  $\sim$ , 12
  - Transitivität der  $\sim$ , 12
  - Um $\sim$ 
    - $\sim$  von Reihen, 48
- Partialbruchzerlegung, 88
  - $\sim$  von cot, 104
- Partition, 91
  - Verfeinerung einer  $\sim$ , 91
- Peano, Guiseppe 1858-1932
  - $\sim$  Axiome, 25
- Pi  $\pi$ , 64
- Polar
  - $\sim$ darstellung
    - $\sim$  einer komplexen Zahl, 67
- Polynom
  - $\sim$ division, 89
  - Taylor $\sim$ , 80
- Potenz
  - $\sim$ menge, 6
  - $\sim$ reihe, 49
    - $\sim$  von Cosinus, 54
    - $\sim$  von Sinus, 54
- $\sim$ funktion, 49
- Identitätssatz von  $\sim$ nfunktionen, 51
- Konvergenzradius einer  $\sim$ , 49
- Prinzip
  - Auswahl $\sim$  von Bolzano–Weierstraß, 35
  - Intervallschachtelungs $\sim$ , 23
  - Konvergenz $\sim$ ien, 33
  - Monotonie $\sim$ , 33
    - $\sim$  für Reihen, 42
  - Wohlordnungs $\sim$ , 18
- Produkt
  - $\sim$  von Reihen, 46
  - $\sim$ zerlegung von sin, 104
  - kartesisches  $\sim$ , 6
  - unendliches  $\sim$ , 104
- Punkt
  - Häufungs $\sim$ , 36
  - kritischer  $\sim$ , 74
  - isolierter  $\sim$ , 75
- Quotienten
  - $\sim$ regel, 72
  - $\sim$ test, 43
- rational
  - $\sim$ e Zahlen, 18
- Raum
  - $B(X, \mathbb{K})$ , 60
  - $C(I)$ , 80
  - $C(X, \mathbb{K})$ , 60
  - $C^n(I)$ , 80
  - metrischer  $\sim$ 
    - vollständiger  $\sim$ , 56
- reell
  - $\sim$ analytische Funktion, 82
  - $\sim$ e Zahlen, 9, 20
- Reflexivität einer Relation, 7
- Regel
  - $\sim$ funktion, 83
  - 1.  $\sim$  von de L'Hopital, 76
  - 2.  $\sim$  von de L'Hopital, 76
  - de Morgansche  $\sim$ n, 6

- Ketten~, 71
- Leibniz~, 70, 80
- Quotienten~, 72
- Rechen~n
  - ~ der Ableitung, 70, 80
  - ~ für Folgen, 31
  - ~ für Reihen, 46
- Substitutions~, 86
- Reihe, 41
  - geometrische ~, 41
  - absolut konvergente ~, 42
  - alternierende ~
    - ~ von Leibniz, 44
  - Cauchy Kriterium für ~n, 42
  - Integralkriterium für ~n, 97
  - konvergente ~, 41
    - absolut ~, 42
  - Potenz~, 49
    - ~nfunktion, 49
    - Konvergenzradius einer ~, 49
  - Produkt von ~n, 46
  - Rechenregeln für ~n, 46
  - Taylor~, 81
  - Umordnung von ~n, 48
- Relation, 7
  - Ordnungs~, 12
  - Reflexivität einer ~, 7
  - Symmetrie einer ~, 7
  - Transitivität einer ~, 7
- Riemann, Georg Friedrich Bernhard 1826–1866, 49
  - ~integrabel, 91, 96
  - ~integral, 91
    - Eigenschaften des ~, 93
    - uneigentliches ~, 96
  - ~sche  $\zeta$ -Funktion, 41, 98, 104
  - ~summen, 92
  - Kriterium von ~, 92
- Rolle, Michel 1652–1719
  - Satz von ~, 74
- Russell, Bertrand Arthur William 1872–1970
  - ~sche Antinomie, 5
- Satz
  - ~ von Borel, 101
  - ~ von Heine–Borel, 57
  - ~ von Rolle, 74
  - Abelscher Grenzwert~, 99
  - Cauchy's Verdichtungs~, 44
  - Fundamental~ der Algebra, 68
  - Haupt~, 84, 95
  - Identitäts~
    - ~ für Potenzreihenfunktionen, 51
  - Mittelwert~, 74
    - ~ der Integralrechnung, 96
    - verallgemeinerter ~, 74
  - Schranken~, 74
  - Zwischenwert~, 61
- Schranke
  - ~nsatz, 74
  - obere ~, 14
  - untere ~, 14
- Sekante, 69
- Sinus, 53, 64–67
  - Produktzerlegung von ~, 104
- Stammfunktion, 85
- stetig
  - ~keit, 57
    - gleichmäßige ~, 59
    - Lipschitz~, 59
- Substitutionsregel, 86
- Summe
  - Ober~en, 91
  - Riemann~en, 92
  - Unter~en, 91
- Supremum, 15
  - ~snorm, 60
- Symmetrie einer Relation, 7
- Tangens tan, 66
- Tangente, 69
- Taylor, Brook 1685–1731

- ~formel, 81, 96
- ~polynom, 80
- ~reihe, 81
- Teilfolge, 34
  - konvergente ~, 35
  - monotone ~, 35
- Test
  - Quotienten~, 43
  - Wurzel~, 43
- Totalität der Ordnung, 12
- Transformation
  - ~ der Variablen, 86
- Transitivität
  - ~ einer Relation, 7
  - ~ der Ordnung, 12
- Treppenfunktion, 83
- trigonometrische Funktionen, 64–66
  
- Umgebung, 55
- Umkehrabbildung, 8
  - Ableitung der ~, 71
  - Stetigkeit der ~, 62
- Umordnung von Reihen, 48
- Ungleichung
  - ~ von Jensen, 78
  - Bernoulli ~, 17
  - Dreiecks~, 28
  - Youngsche ~, 79
- Urbild, 8
  
- Variable
  - Transformation der ~n, 86
- Verdichtungssatz
  - Cauchy's ~, 44
- Verfeinerung, 91
- vollständig
  - ~e Induktion, 17
  - ~keit
    - ~ eines metrischen Raumes, 56
    - ~saxiom, 20, 36
- Weierstraß, Karl Theodor Wilhelm 1815–1897
  - Auswahlprinzip von Bolzano–~, 35
- Wertebereich, 7
- Winkel, 67
- Wohlordnungsprinzip, 18
- Wurzel
  - ~test, 43
  - $k$ -te ~, 33
  - Quadrat~, 22
- Young, Grace Chisholm 1886–1944
  - ~'sche Ungleichung, 79
- Zahl
  - ~en  $\mathbb{K}$ , 29
  - ~enfolge, 29
    - konvergente ~, 29
  - Bernoulli ~en, 102
  - erweiterte ~engerade, 24
  - Eulersche ~  $e$ , 40, 47
  - ganze ~en  $\mathbb{Z}$ , 18
  - komplexe ~en  $\mathbb{C}$ , 26
    - ~enebene, 28
    - Polardarstellung der ~, 67
  - natürliche ~en  $\mathbb{N}$ , 16
  - Pi  $\pi$ , 64
  - rationale ~en  $\mathbb{Q}$ , 18
  - reelle ~en  $\mathbb{R}$ , 9, 20
- Zerlegung
  - Partialbruch~, 88
    - ~ von cot, 104
  - Produkt~ von sin, 104
- Zwischen
  - ~punkte, 92
  - ~wertsatz, 61