

Seminar ausgewählte Themen gewöhnlicher Differentialgleichungen

Das inverse Dirichlet-Problem

Inke Willoh

29. April 2026

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	2
2	Theorem 4	2
3	Lemma 3	5
4	Theorem 5	6
5	Lemma 4	7
6	Theorem 6	8
7	Korollar 1	12

1 Einführung

Im vorherigen Abschnitt des Buches wurde gezeigt, dass die Dirchlet-Eigenwerte μ_n nicht ausreichen, um die Funktion $q \in L^2$ eindeutig zu bestimmen. Der Grund dafür ist, dass die Spiegelung von q die Eigenwerte μ_n nicht verändert (Lemma 1, Kapitel 3).

Das Ziel im Folgenden wird sein, dieses Problem zu lösen. Dafür werden wir zunächst zusätzliche Größen κ_n einführen und dann im weiteren Verlauf zeigen wir, dass μ_n zusammen mit κ_n die Funktion $q \in L^2$ eindeutig bestimmen.

Wir definieren κ_n wie folgt:

$$\kappa_n = \log \left(\left| \frac{g'_n(1, q)}{g'_n(0, q)} \right| \right), n \geq 1.$$

Nun wissen wir aus Kapitel 2, dass g_n wie folgt definiert ist:

$$g_n(x, q) = \frac{y_2(x, \mu_n)}{\|y_2(\cdot, \mu_n)\|}$$

Also folgt durch ableiten nach x :

$$g'_n(x, q) = \frac{y'_2(x, \mu_n)}{\|y_2(\cdot, \mu_n)\|}$$

Nun setzen wir $x=1$ und $x=0$ und erhalten:

$$g'_n(1, q) = \frac{y'_2(1, \mu_n)}{\|y_2(\cdot, \mu_n)\|}, \quad g'_n(0, q) = \frac{y'_2(0, \mu_n)}{\|y_2(\cdot, \mu_n)\|}$$

Zudem wissen wir, dass $y'_2(0, \lambda, q) = 1$ gilt. Also folgt insgesamt:

$$\begin{aligned} \kappa_n &= \log \left(\left| \frac{g'_n(1, q)}{g'_n(0, q)} \right| \right), n \geq 1 \\ &= \log \left(|y'_2(1, \mu_n)| \right) \\ &= \log \left((-1)^n y'_2(1, \mu_n) \right) \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung folgt dabei aus Korollar 2 (Kapitel 2).

Die Größen κ_n messen somit das Verhältnis der Ableitungen der Eigenfunktion g_n am Randpunkten $x = 0$ und $x = 1$ und beschreiben damit, wie stark die Lösung am rechten Rand ankommt. Deswegen können $\kappa_1, \kappa_2, \dots$ als die "Endgeschwindigkeiten" der Lösung interpretieren werden (vgl. Anfang Kapitel 2).

2 Theorem 4

Im Theorem 4 betrachten wir nun paar grundlegende Eigenschaften von κ_n .

Theorem 4:

Für jedes $n \geq 1$ ist κ_n eine kompakte, reell analytische Funktion auf L^2 mit asymptotischen Verhalten:

$$\kappa_n(q) = \frac{1}{2\pi n} \langle \sin(2\pi n x), q \rangle + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = \ell_1^2(n).$$

Der Gradient ist:

$$\frac{\partial \kappa_n}{\partial q(t)} = a_n(t, q) - [a_n] g_n^2(t, q) = \frac{1}{2\pi n} \sin(2\pi n t) + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Die Fehlerterme sind gleichmäßig auf beschränkten Teilmengen von $[0, 1] \times L^2$.

Beweis:

Aus Kapitel 1 und 2 wissen wir, dass $y'_2(1, \mu_n(q), q)$ und $\mu_n(q)$ kompakte, reell analytische Funktionen sind. Zudem gilt $y'_2(1, \mu_n(q), q) \neq 0 \forall q \in L^2, \forall n \geq 1$ (Kapitel 2).

Somit folgt, dass auch die Funktion $\kappa_n(q) = \log((-1)^n y'_2(1, \mu_n(q), q))$ kompakt und reell analytisch ist.

Um den Gradienten $\frac{\partial \kappa_n}{\partial q(t)}$ zu berechnen, brauchen wir folgende Resultate aus den vorherigen Kapiteln:
 Aus dem Theorem 6 (Kapitel 1) folgt für $j=2, x=1$:

$$\frac{\partial y_2'(1)}{\partial q(t)} = y_2'(1)y_1(t)y_2(t) - y_1'(1)y_2^2(t)$$

Da $t \in [0, 1]$, kann man die Indikatorfunktion $\mathbf{1}_{[0,1]}(t)$ weglassen. Zudem folgt aus dem Theorem:

$$\frac{\partial y_2'(1)}{\partial \lambda} = - \int_0^1 \frac{\partial y_2'(1)}{\partial q(t)} dt = -y_2'(1) \int_0^1 y_1(t)y_2(t) dt + y_1'(1) \int_0^1 y_2^2(t) dt$$

Aus dem Theorem 2 und 3 (Kapitel 2) folgt:

$$\frac{\partial \mu_n}{\partial q(t)} = g_n^2(t, q) = \frac{y_2^2(t, \mu_n)}{[y_2^2]}$$

Aus dem Korollar 1 (Kapitel 2) folgt:

$$a_n = \frac{1}{2\pi n} \sin(2\pi n x) + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Nun berechnen wir den Gradienten $\frac{\partial \kappa_n}{\partial q(t)}$ mit Hilfe der Kettenregel:

$$\frac{\partial \kappa_n}{\partial q(t)} = \frac{1}{y_2'(1, \lambda, q)} \left(\frac{\partial y_2'(1, \lambda, q)}{\partial \lambda} \frac{\partial \mu_n}{\partial q(t)} + \frac{\partial y_2'(1, \lambda, q)}{\partial q(t)} \right) \Big|_{\lambda=\mu_n}$$

Im Folgenden kürzen wir wie bereits oben $y_2'(1, \lambda, q)$ mit $y_2'(1)$ ab. Außerdem wird nicht an jede Funktion geschrieben, dass diese bei $\lambda = \mu_n$ ausgewertet wird. Wir werden jetzt die obigen Resultate einsetzen und vereinfachen. Also folgt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \kappa_n}{\partial q(t)} &= \frac{1}{y_2'(1)} \left(\frac{\partial y_2'(1)}{\partial \lambda} \frac{\partial \mu_n}{\partial q(t)} + \frac{\partial y_2'(1)}{\partial q(t)} \right) \\ &= \frac{1}{y_2'(1)} \left((-y_2'(1) \int_0^1 y_1(s)y_2(s) ds + y_1'(1) \int_0^1 y_2^2(s) ds) g_n^2(t) + (y_2'(1)y_1(t)y_2(t) - y_1'(1)y_2^2(t)) \right) \\ &= - \left(\int_0^1 y_1(s)y_2(s) ds \right) g_n^2(t) + \frac{y_1'(1)}{y_2'(1)} \left(\int_0^1 y_2^2(s) ds \right) g_n^2(t) + y_1(t)y_2(t) - \frac{y_1'(1)}{y_2'(1)} y_2^2(t) \\ &= - \left(\int_0^1 y_1(s)y_2(s) ds \right) g_n^2(t) + \frac{y_1'(1)}{y_2'(1)} [y_2^2] \frac{y_2^2(t)}{[y_2^2]} + y_1(t)y_2(t) - \frac{y_1'(1)}{y_2'(1)} y_2^2(t) \\ &= - \left(\int_0^1 y_1(s)y_2(s) ds \right) g_n^2(t) + y_1(t)y_2(t) \\ &= - \left(\int_0^1 a_n(s) ds \right) g_n^2(t) + a_n(t) \\ &= a_n(t) - [a_n] g_n^2(t) \\ &= \frac{1}{2\pi n} \sin(2\pi n t) + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

Bei der sechsten Gleichheit haben wir $a_n = y_1(x, \mu_n)y_2(x, \mu_n)$ verwendet.
 Für die letzte Gleichung begründen wir jetzt noch, dass $[a_n]g_n^2(t)$ in $O(\frac{1}{n^2})$ liegt:
 Dazu betrachten wir zuerst $[a_n]$:

$$[a_n] = \int_0^1 a_n(s) ds = \int_0^1 \left(\frac{1}{2\pi n} \sin(2\pi n s) + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) ds = \int_0^1 O\left(\frac{1}{n^2}\right) ds$$

Die letzte Gleichheit gilt, da $\int_0^1 \sin(2\pi n s) ds = 0$. Zudem gilt, dass der $O(\frac{1}{n^2})$ gleichmäßig in $t \in [0, 1]$ gilt und es folgt nun, dass eine Konstante $C \geq 0$ existiert, so dass gilt:

$$|[a_n]| \leq \int_0^1 \frac{C}{n^2} ds = \frac{C}{n^2}$$

Somit folgt $[a_n] = O(\frac{1}{n^2})$.

Nun betrachten wir $g_n^2(t)$. Aus Theorem 4 (Kapitel 2) wissen wir, dass:

$$g_n(x, q) = \sqrt{2} \sin(\pi n x) + O(\frac{1}{n})$$

Somit existiert eine Konstante $C > 0$, so dass $\forall x \in [0, 1]$ und $n \geq 1$ gilt:

$$|g_n(x, q)| \leq \sqrt{2} |\sin(\pi n x)| + \frac{C}{n} \leq \sqrt{2} + \frac{C}{n}$$

Der Fehlerterm $O(\frac{1}{n})$ gilt gleichmäßig in $x \in [0, 1]$, somit ist $|g_n(x, q)|$ gleichmäßig beschränkt und folglich auch $|g_n^2(x, q)|$. Also folgt $|g_n^2(x, q)| = O(1)$.

Somit folgt, dass $[a_n]g_n^2(t) = O(\frac{1}{n^2})$. Die Gleichmäßigkeit der Fehlerterme folgt aus Korollar 1 (Kapitel 2) und Theorem 4 (Kapitel 2), da die asymptotischen Verhalten für a_n und g_n gleichmäßig auf beschränkten Teilmengen von $[0, 1] \times L^2$ gelten.

Um den nächsten Schritt vollständig nachvollziehen zu können, zeigen wir zunächst, dass $\kappa_n(0) = 0$ gilt. Dazu brauchen wir folgende bereits bekannte Resultate:

1. $\kappa_n(q) = \log((-1)^n y_2'(1, \mu_n(q), q))$ (oben definiert)

2. $y_2(x, \lambda, 0) = \frac{\sin(\sqrt{\lambda}x)}{\sqrt{\lambda}}$ (Kapitel 1)

3. $\mu_n(0) = n^2 \pi^2$ (Kapitel 2)

Daraus folgt:

$$\kappa_n(0) = \log((-1)^n y_2'(1, \mu_n(0), 0)) = \log((-1)^n \cos(n\pi)) = \log((-1)^n (-1)^n) = \log(1) = 0$$

Dies und den oben berechneten Gradienten verwenden wir nun:

$$\begin{aligned} \kappa_n(q) &= \int_0^1 \frac{d}{dt} \kappa_n(tq) dt \\ &= \int_0^1 \langle \frac{1}{2\pi n} \sin(2\pi n x) + O(\frac{1}{n^2}), q \rangle dt \\ &= \langle \frac{1}{2\pi n} \sin(2\pi n x), q \rangle + \int_0^1 \langle O(\frac{1}{n^2}), q \rangle dt \\ &= \frac{1}{2\pi n} \langle \sin(2\pi n x), q \rangle + O(\frac{1}{n^2}) \end{aligned}$$

Es bleibt $\kappa_n = \ell_1^2(n)$ zu zeigen, also dass $\sum_{n \geq 1} n^2 |\kappa_n(q)|^2 < \infty$ gilt.

Aus Theorem 7 (Kapitel 2) wissen wir, dass $\{\sqrt{2} \sin(\pi n x)\}_{n \geq 1}$ eine Orthonormalbasis für L^2 ist. Also gilt $\sum_{n \geq 1} |\langle q, \sqrt{2} \sin(\pi n x) \rangle|^2 \leq \|q\|_{L^2}^2$ und somit auch $\sum_{n \geq 1} |\langle q, \sin(2\pi n x) \rangle|^2 < \infty$. Also folgt, dass

$$\sum_{n \geq 1} n^2 \left(\frac{1}{2\pi n} \langle \sin(2\pi n x), q \rangle \right)^2 = \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{n \geq 1} \langle \sin(2\pi n x), q \rangle^2 < \infty$$

Zudem $\exists C > 0$, so dass gilt:

$$\sum_{n \geq 1} n^2 O(\frac{1}{n^2})^2 \leq \sum_{n \geq 1} \frac{C}{n^2} < \infty$$

Also folgt (unter Berücksichtigung folgender Ungleichung $|a + b|^2 \leq 2|a|^2 + 2|b|^2$):

$$\sum_{n \geq 1} n^2 |\kappa_n(q)|^2 = \sum_{n \geq 1} n^2 \left| \frac{1}{2\pi n} \langle \sin(2\pi n x), q \rangle + O(\frac{1}{n^2}) \right|^2 < \infty$$

und somit

$$\kappa_n = \ell_1^2(n)$$

q.e.d.

3 Lemma 3

Lemma 3:

Für $m, n \geq 1$ gilt:

a)

$$\left\langle \frac{\kappa_m}{\partial q}, \frac{d}{dx} \frac{\partial \kappa_n}{\partial q} \right\rangle = 0$$

b)

$$\left\langle \frac{\kappa_m}{\partial q}, \frac{d}{dx} \frac{\partial \mu_n}{\partial q} \right\rangle = \frac{1}{2} \delta_{mn}$$

c)

$$\left\langle \frac{\partial \mu_m}{\partial q}, \frac{d}{dx} \frac{\partial \mu_n}{\partial q} \right\rangle = 0$$

Beweis:

Für den Beweis dieses Lemmas benutzen wir folgende Resultate.

Aus Theorem 8 (Kapitel 2) folgt:

Für $m, n \geq 1$ gilt:

1) $\langle g_m^2, \frac{d}{dx} g_n^2 \rangle = 0$

2) $\langle a_m, \frac{d}{dx} g_n^2 \rangle = \frac{1}{2} \delta_{mn}$

3) $\langle a_m, \frac{d}{dx} a_n \rangle = 0$

Aus obigen wissen wir:

$$\frac{\partial \kappa_n}{\partial q(t)} = a_n(t, q) - [a_n] g_n^2(t, q) \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mu_n}{\partial q(t)} = g_n^2(t, q)$$

Nun zeigen wir nacheinander die drei Aussagen:

a) z.z.: $\left\langle \frac{\partial \kappa_m}{\partial q}, \frac{d}{dx} \frac{\partial \kappa_n}{\partial q} \right\rangle = 0$

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial \kappa_m}{\partial q}, \frac{d}{dx} \frac{\partial \kappa_n}{\partial q} \right\rangle &= \left\langle a_m - [a_m] g_m^2, \frac{d}{dx} a_n - [a_n] \frac{d}{dx} g_n^2 \right\rangle \\ &= \left\langle a_m, \frac{d}{dx} a_n \right\rangle - [a_n] \left\langle a_m, \frac{d}{dx} g_n^2 \right\rangle - [a_m] \left\langle g_m^2, \frac{d}{dx} a_n \right\rangle + [a_m][a_n] \left\langle g_m^2, \frac{d}{dx} g_n^2 \right\rangle \\ &= -\frac{1}{2} [a_n] \delta_{mn} + \frac{1}{2} [a_m] \delta_{mn} \\ &= \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \frac{1}{2} [a_n] - \frac{1}{2} [a_n], & m = n \end{cases} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Die dritte Gleichung folgt, wenn wir die Resultate aus Theorem 8 (Kapitel 2) einsetzen und zudem wissen, dass $\langle g_m^2, \frac{d}{dx} a_n \rangle = -\frac{1}{2} \delta_{mn}$ gilt, da:

$$\begin{aligned} \left\langle g_m^2, \frac{d}{dx} a_n \right\rangle &= \int_0^1 g_m^2(x) a_n'(x) dx = [g_m^2(x) a_n(x)]_0^1 - \int_0^1 (g_m^2)'(x) a_n(x) dx \\ &= 0 - \left\langle \frac{d}{dx} g_m^2, a_n \right\rangle = -\frac{1}{2} \delta_{mn} \end{aligned}$$

Dabei folgt die dritte Gleichung, da $g_m(0) = g_m(1) = 0$ und somit $[g_m^2(x) a_n(x)]_0^1 = 0$ gilt. Die vierte Gleichung folgt aus der Symmetrie des Skalarprodukts und dem Resultat 2) aus Theorem 8 (Kapitel 2).

b) z.z.: $\left\langle \frac{\partial \kappa_m}{\partial q}, \frac{d}{dx} \frac{\partial \mu_n}{\partial q} \right\rangle = \frac{1}{2} \delta_{mn}$

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial \kappa_m}{\partial q}, \frac{d}{dx} \frac{\partial \mu_n}{\partial q} \right\rangle &= \left\langle a_m - [a_m] g_m^2, \frac{d}{dx} g_n^2 \right\rangle \\ &= \left\langle a_m, \frac{d}{dx} g_n^2 \right\rangle - [a_m] \left\langle g_m^2, \frac{d}{dx} g_n^2 \right\rangle \\ &= \frac{1}{2} \delta_{mn} \end{aligned}$$

Wobei für die letzte Gleichung wieder die Resultate aus Theorem 8 (Kapitel 2) eingesetzt wurden.

$$c) \text{ z.z.: } \left\langle \frac{\partial \mu_m}{\partial q}, \frac{d}{dx} \frac{\partial \mu_n}{\partial q} \right\rangle = 0$$

$$\left\langle \frac{\partial \mu_m}{\partial q}, \frac{d}{dx} \frac{\partial \mu_n}{\partial q} \right\rangle = \langle g_m^2, \frac{d}{dx} g_n^2 \rangle = 0$$

Die letzte Gleichung folgt wieder aus Theorem 8 (Kapitel 2). q.e.d.

4 Theorem 5

Im Lemma 1 (Kapitel 3) haben wir bereits gesehen, dass die Eigenwerte $\mu(q) = (\mu_1(q), \mu_2(q), \dots)$ nicht ausreichen, um q eindeutig zu bestimmen. Deswegen formulieren wir nun eine neue Abbildung, für die wir zeigen werden, dass sie q eindeutig bestimmt.

Dafür betrachten wir die Abbildung

$$q \rightarrow \kappa(q) = (\kappa_1, \kappa_2, \dots),$$

die nach Theorem 4 jedem $q \in L^2$ eine Folge in einen Hilbertraum ℓ_1^2 der reellen Folgen $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots)$, für die $\sum_{n \geq 1} n^2 \varepsilon_n^2 < \infty$ gilt, zuordnet.

Kombinieren wir diese κ -Werte mit den Dirichlet-Eigenwerten μ , so erhalten wir die Abbildung

$$q \rightarrow (\kappa(q), \mu(q)),$$

die von L^2 in den Produktraum $\ell_1^2 \times S$ abbildet.

Diese Abbildung wird eine wichtige Rolle spielen bei der Lösung des inversen Dirichlet Problems. Nun werden wir, wie bereits angekündigt zeigen, dass durch diese Abbildung q eindeutig festgelegt ist.

Theorem 5:

Die Abbildung $\kappa \times \mu : L^2 \rightarrow \ell_1^2 \times S$ ist injektiv.

Beweis:

Um die Aussage zu beweisen, nehmen wir an, dass für $p, q \in L^2$ $\kappa(q) = \kappa(p)$ und $\mu(q) = \mu(p)$ gilt. Unser Ziel ist es also nun zu zeigen, dass aus dieser Annahme $q = p$ folgt.

Wir definieren nun folgende meromorphe Funktion, die nach Theorem 2 (Kapitel 2) bei $\mu_n, n \geq 1$ einfache Pole besitzt:

$$\frac{[y_2(x, \lambda, q) - y_2(x, \lambda, p)][y_2(1-x, \lambda, q^*) - y_2(1-x, \lambda, p^*)]}{y_2(1, \lambda, q)}$$

Später werden wir die Residuen dieser Funktion betrachten und argumentieren, dass diese gleich null sein müssen, weshalb wir dann folgern können, dass $p = q$ gilt. Aber um dies machen zu können, müssen wir erstmal noch paar Sachen einsehen.

Aus der Annahme $\kappa(q) = \kappa(p)$ folgt:

$$\begin{aligned} \kappa(q) = \kappa(p) &\Leftrightarrow \kappa_n(q) = \kappa_n(p) \quad \forall n \\ &\Leftrightarrow \log((-1)^n y_2'(1, \mu_n(q), q)) = \log((-1)^n y_2'(1, \mu_n(p), p)) \\ &\Leftrightarrow (-1)^n y_2'(1, \mu_n, q) = (-1)^n y_2'(1, \mu_n, p) \\ &\Leftrightarrow y_2'(1, \mu_n, q) = y_2'(1, \mu_n, p) \end{aligned}$$

Wobei die vorletzte Äquivalenz aus der Injektivität des Logarithmus folgt, da $(-1)^n y_2'(1, \mu_n(q), q)$ und $(-1)^n y_2'(1, \mu_n(p), p)$ nicht negativ sind (Kapitel 2).

Im nächsten Schritt zeigen wir, dass $y_2(1-x, \mu_n, q^*) = -\frac{y_2(x, \mu_n, q)}{y_2'(1, \mu_n, q)}$ gilt:

Definiere $F(x) = y_2(1-x, \mu_n, q^*)$ und $G(x) = -\frac{y_2(x, \mu_n, q)}{y_2'(1, \mu_n, q)}$. Wir zeigen nun, dass F und G dasselbe Anfangswertproblem lösen, weshalb aufgrund der Eindeutigkeit $F(x) = G(x)$ folgt.

Betrachten wir nun zu erst F:

Setze $u(s) = y_2(s, \mu_n, q^*)$. Dann erfüllt u nach Definition $-u''(s) + q^*(s)u(s) = \mu_n u(s)$ und es gilt $F(x) = u(1-x)$.

Da $q^*(1-x) = q(x)$ folgt:

$$\begin{aligned} -F''(x) + q(x)F(x) &= -u''(1-x) + q(x)u(1-x) \\ &= -u''(1-x) + q^*(1-x)u(1-x) \\ &= \mu_n u(1-x) \\ &= \mu_n F(x) \end{aligned}$$

Also löst F die Differentialgleichung mit Potential q.

Zudem gilt:

$$F(x) = y_2(1-x, \mu_n, q^*), \quad F'(x) = -y_2'(1-x, \mu_n, q^*).$$

$$\text{Also } F(1) = y_2(0, \mu_n, q^*) = 0, \quad F'(1) = -y_2'(0, \mu_n, q^*) = -1.$$

Nun betrachten wir G:

Da für $y_2(x, \mu_n, q) - y'' + q(x)y = \mu_n y$ gilt, erfüllt auch G als konstantes Vielfaches von $y_2(x, \mu_n, q)$ die Differentialgleichung:

$$-G''(x) + qG(x) = \mu_n G(x)$$

$$\text{Außerdem gilt } G(x) = -\frac{y_2(x, \mu_n, q)}{y_2'(1, \mu_n, q)}, \quad G'(x) = -\frac{y_2'(x, \mu_n, q)}{y_2'(1, \mu_n, q)}.$$

$$\text{Also } G(1) = 0, G'(1) = -1.$$

Somit lösen F und G dasselbe Anfangswertproblem und somit gilt $F = G$.

Analoges gilt für p.

Somit gilt für das Residuum der meromorphen Funktion an der Stelle μ_n :

$$\begin{aligned} & -\frac{[y_2(x, \mu_n, q) - y_2(x, \mu_n, p)][y_2(1-x, \mu_n, q^*) - y_2(1-x, \mu_n, p^*)]}{\dot{y}_2(1, \mu_n, q)} \\ &= -\frac{[y_2(x, \mu_n, q) - y_2(x, \mu_n, p)][-\frac{y_2(x, \mu_n, q)}{y_2'(1, \mu_n, q)} - (-\frac{y_2(x, \mu_n, p)}{y_2'(1, \mu_n, p)})]}{\dot{y}_2(1, \mu_n, q)} \\ &= \frac{[y_2(x, \mu_n, q) - y_2(x, \mu_n, p)]^2}{\dot{y}_2(1, \mu_n, q)y_2'(1, \mu_n, p)} \geq 0 \end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung gilt aufgrund von Theorem 2 (Kapitel 2).

Mit denselben Abschätzungen wie im Beweis von Theorem 3 sehen wir, dass die Voraussetzungen von Lemma 2 für die betrachtete meromorphe Funktion für $r_n = (n + \frac{1}{2})^2 \pi^2$ erfüllt sind. Somit können wir Lemma 2 anwenden und es folgt, dass alle Residuen null sind. Also gilt:

$$\frac{[y_2(x, \mu_n, q) - y_2(x, \mu_n, p)]^2}{\dot{y}_2(1, \mu_n, q)y_2'(1, \mu_n, p)} = 0 \Leftrightarrow y_2(x, \mu_n, q) = y_2(x, \mu_n, p)$$

Somit erfüllt die selbe Funktion u, die Gleichungen:

$$-u'' + qu = \mu_n u \wedge -u'' + pu = \mu_n u$$

Daraus folgt dann durch Subtraktion der Gleichungen und da $u \neq 0$ fast überall:

$$(q-p)u = 0 \Leftrightarrow q = p$$

q.e.d.

5 Lemma 4

Lemma 4:

$$\kappa(q^*) = -\kappa(q)$$

Also ist q gerade genau dann wenn $\kappa(q) = 0$.

Beweis:

Wir beweisen nun die erste Aussage:

Aus dem Beweis von Theorem 5 wissen wir bereits:

$$y_2(1-x, \mu_n(q), q^*) = -\frac{y_2(x, \mu_n(q), q)}{y_2'(1, \mu_n(q), q)}$$

Mit $\mu_n(q^*) = \mu_n(q)$ (Lemma 1, Kapitel 3) folgt:

$$y_2(1-x, \mu_n(q^*), q^*) = -\frac{y_2(x, \mu_n(q), q)}{y_2'(1, \mu_n(q), q)}$$

Nun leiten wir beide Seiten nach x ab:

$$-y_2'(1-x, \mu_n(q^*), q^*) = -\frac{y_2'(x, \mu_n(q), q)}{y_2'(1, \mu_n(q), q)}$$

Sei $x=0$, dann folgt:

$$-y_2'(1, \mu_n(q^*), q^*) = -\frac{y_2'(0, \mu_n(q), q)}{y_2'(1, \mu_n(q), q)} = -\frac{1}{y_2'(1, \mu_n(q), q)}$$

Somit gilt:

$$\begin{aligned} \kappa_n(q^*) &= \log((-1)^n y_2'(1, \mu_n(q^*), q^*)) \\ &= \log((-1)^n \frac{1}{y_2'(1, \mu_n(q), q)}) \\ &= \log\left(\frac{1}{(-1)^n y_2'(1, \mu_n(q), q)}\right) \\ &= -\log((-1)^n y_2'(1, \mu_n(q), q)) \\ &= -\kappa_n(q) \end{aligned}$$

Kommen wir nun zur zweiten Aussage:

" \Rightarrow " q ist gerade $\Leftrightarrow q(x) = q(1-x) = q^*(x)$. Also gilt:

$$\kappa(q) = \kappa(q^*) \Leftrightarrow \kappa(q) = -\kappa(q) \Leftrightarrow 2\kappa(q) = 0 \Leftrightarrow \kappa(q) = 0$$

" \Leftarrow " Sei $\kappa(q) = 0$. Es gilt:

$$\begin{aligned} \kappa(q^*) &= -\kappa(q) = 0 = \kappa(q) \\ \mu_n(q^*) &= \mu(q) \text{ (Lemma 1)} \end{aligned}$$

Somit folgt:

$$(\kappa(q^*), \mu(q^*)) = (\kappa(q), \mu(q))$$

Mit Theorem 5 gilt also:

$$q^* = q \Leftrightarrow q(1-x) = q(x) \Leftrightarrow q \text{ ist gerade}$$

q.e.d.

6 Theorem 6

Im Folgenden werden wir die analytischen Eigenschaften der Abbildung $\kappa \times \mu$ untersuchen.

Dafür führen wir nun zwei Größen ein:

Für $n \geq 1$ definiere:

$$V_n(x, q) = 2 \frac{d}{dx} g_n^2 = 2 \frac{d}{dx} \frac{\partial \mu_n}{\partial q}$$

$$W_n(x, q) = -2 \frac{d}{dx} (a_n - [a_n] g_n^2) = -2 \frac{d}{dx} \frac{\partial \kappa_n}{\partial q}$$

Also folgt mit Korollar 1 (Kapitel 2):

$$\begin{aligned}
V_n &= 4\pi n \sin(2\pi n x) + O(1) \\
W_n &= -2 \frac{d}{dx} (a_n - [a_n] g_n^2) \\
&= -2 \frac{d}{dx} a_n + 2[a_n] \frac{d}{dx} g_n^2 \\
&= -2(\cos(2\pi n x) + O(\frac{1}{n})) + 2 \cdot O(\frac{1}{n^2}) \cdot (2\pi n \sin(2\pi n x) + O(1)) \\
&= -2 \cos(2\pi n x) + O(\frac{1}{n})
\end{aligned}$$

Die vorletzte Gleichung gilt, da: $[a_n] = \int_0^1 a_n(x) dx = \frac{1}{2\pi n} \int_0^1 \sin(2\pi n x) dx + \int_0^1 O(\frac{1}{n^2}) = O(\frac{1}{n^2})$.

Die letzte Gleichung gilt, da $2 \cdot O(\frac{1}{n^2}) \cdot (2\pi n \sin(2\pi n x) + O(1)) = O(\frac{1}{n})$.

Dabei gilt $V_n = 4\pi n \sin(2\pi n x) + O(1)$ und $W_n = -2 \cos(2\pi n x) + O(\frac{1}{n})$ gleichmäßig auf beschränkten Teilmengen von $[0, 1] \times L^2$.

Theorem 6:

$\kappa \times \mu$ ist in jeden Punkt von L^2 ein lokal reell analytischer Isomorphismus.

Zudem ist die Inverse der Abbildung $d_q(\kappa \times \mu)$ die lineare Abbildung von $\ell_1^2 \times \mathbb{R} \times \ell^2$ nach L^2 , gegeben durch

$$(d_q(\kappa \times \mu))^{-1}(\varepsilon, \eta) = \sum_{n \geq 1} \varepsilon_n V_n + \eta_0 + \sum_{n \geq 1} \eta_n W_n.$$

Beweis:

Nun beweisen wir die erste Aussage:

Da wir bereits aus Theorem 1 wissen, dass μ reell analytisch auf L^2 ist, müssen wir jetzt nur noch zeigen, dass auch κ reell analytisch ist:

Fixiere $p \in L^2$. Aus dem Beweis von Theorem 1 wissen wir, dass es eine komplexe Umgebung U von p gibt, so dass die Abbildungen $q \rightarrow \mu_n(q)$ und $q \rightarrow g_n^2(q)$ auf U analytisch sind.

Da $y_2'(1, \mu_n(q), q)$ analytisch von (λ, q) abhängt und $\mu_n(q)$ analytisch von q , folgt dass $y_2'(1, \mu_n(q), q)$ analytisch in q ist. Zudem ist der Logarithmus analytisch, wenn sein Argument nicht verschwindet, dies ist hier der Fall ($y_2'(1, \mu_n, q) \neq 0$). Also folgt, dass $\kappa_n = \log((-1)^n y_2'(1, \mu_n))$ analytisch auf U ist.

Aus Theorem 4 wissen wir, dass $\kappa_n = \frac{1}{2\pi n} \langle \sin(2\pi x, q) \rangle + O(\frac{1}{n^2}), n \geq 1$ gleichmäßig auf U gilt. Es folgt, dass sich κ zu einer beschränkten Abbildung von U in die Komplexifizierung von ℓ_1^2 fortsetzen lässt, deren sämtlichen Komponenten analytisch sind. Somit sind die Voraussetzungen für Theorem A.3. erfüllt und es folgt, dass κ analytisch auf U ist.

Da das Argument für beliebiges $p \in L^2$ gilt, folgt, dass κ analytisch auf L^2 ist.

Nun betrachten wir die Ableitung von $\kappa \times \mu$ und zeigen, dass diese beschränkt invertierbar ist. Dann wird aus dem Satz über die inverse Funktion folgen, dass $\kappa \times \mu$ für jeden Punkt von L^2 ein lokal reell analytischer Isomorphismus ist.

Zur Berechnung der Ableitung von $\kappa \times \mu$ verwenden wir den zweiten Teil von Theorem A.3. Dafür benötigen wir die folgenden "Koordinatenfunktionen" von $\kappa \times \mu$:

$$q \rightarrow \kappa_n(q), n \geq 1$$

$$q \rightarrow [q]$$

$$q \rightarrow \tilde{\mu}_n(q), n \geq 1$$

Somit folgt aus Theorem A.3, dass die Ableitung von $\kappa \times \mu$ die lineare Abbildung von L^2 nach $\ell_1^2 \times \mathbb{R} \times \ell^2$ gegeben durch

$$v \rightarrow (\langle \frac{\partial \kappa_n}{\partial q}, v \rangle, n \geq 1; [v]; \langle \frac{\partial \tilde{\mu}_n}{\partial q}, v \rangle, n \geq 1) \text{ ist.}$$

Zudem wissen wir aus Theorem 4 (Kapitel 3) und Korollar 1 (Kapitel 2), dass:

$$2\pi n \frac{\partial \kappa_n}{\partial q} = \sin(2\pi n x) + O(\frac{1}{n}), n \geq 1$$

$$1 = 1$$

$$\frac{\partial \tilde{\mu}_n}{\partial q} = -\cos(2\pi n x) + O(\frac{1}{n}), n \geq 1$$

Aus Lemma 3 folgt, dass diese Vektoren linear unabhängig sind, da es für jeden dieser Vektoren einen anderen Vektor gibt, der zu allen anderen orthogonal ist, aber nicht zu diesem einen. Damit kann dieser Vektor nicht Linearkombination der übrigen sein und die Vektoren sind linear unabhängig.

Zudem gilt das die Vektoren $\{\sin(2\pi nx), 1, \cos(2\pi nx)\}_{n \geq 1}$ eine Orthonormalbasis auf L^2 bilden (abgesehen von einem irrelevanten Faktor $\sqrt{2}$). Die Orthonormaleigenschaft folgt aus:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sin(2\pi nx) \cos(2\pi mx) dx &= 0 \\ \int_0^1 \sin(2\pi nx) dx &= 0 \\ \int_0^1 \cos(2\pi nx) dx &= 0\end{aligned}$$

Also sind die Vektoren orthogonal auf $[0,1]$. Zudem gilt:

$$\begin{aligned}\|1\|_{L^2} &= 1 \\ \|\sin(2\pi nx)\|_{L^2} &= \|\cos(2\pi nx)\|_{L^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

Also sind die Vektoren eine Orthonormalbasis von L^2 (abgesehen von einem irrelevanten Faktor $\sqrt{2}$).

Außerdem folgt aus

$$\begin{aligned}2\pi n \frac{\partial \kappa_n}{\partial q} - \sin(2\pi nx) &= O\left(\frac{1}{n}\right), \\ \frac{\partial \tilde{\mu}_n}{\partial q} + \cos(2\pi nx) &= O\left(\frac{1}{n}\right),\end{aligned}$$

dass aufgrund von $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} < \infty$ gilt:

$$\begin{aligned}\sum_{n \geq 1} \left\| 2\pi n \frac{\partial \kappa_n}{\partial q} - \sin(2\pi nx) \right\|^2 &< \infty, \\ \sum_{n \geq 1} \left\| \frac{\partial \tilde{\mu}_n}{\partial q} + \cos(2\pi nx) \right\|^2 &< \infty.\end{aligned}$$

Somit sind alle Voraussetzungen für Theorem D.3 erfüllt und damit gilt, dass

$$v \rightarrow \left(\left\langle \frac{\partial \kappa_n}{\partial q}, v \right\rangle, n \geq 1; [v]; \left\langle \frac{\partial \tilde{\mu}_n}{\partial q}, v \right\rangle, n \geq 1 \right)$$

ein linearer Isomorphismus von L^2 nach $\ell_1^2 \times \mathbb{R} \times \ell^2$ ist.

Da $\kappa \times \mu$ reell-analytisch ist und $d_q(\kappa \times \mu)$ ein linearer Isomorphismus zwischen den Banachräumen L^2 und $\ell_1^2 \times \mathbb{R} \times \ell^2$ ist, folgt aus dem inversen Funktionensatz für reell-analytische Abbildungen zwischen Banachräumen, dass $\kappa \times \mu$ in einer Umgebung von q lokal invertierbar ist und die lokale Umkehrabbildung reell-analytisch ist. Also ist die erste Aussage bewiesen.

Kommen wir nun zur zweiten Aussage:

Setzte

$$u = \sum_{n \geq 1} \varepsilon V_n + \eta_0 + \sum_{n \geq 1} \eta_n W_n.$$

Nun wollen wir zeigen, dass dieses u die entsprechende inverse Abbildung von $d_q(\kappa \times \eta)$ definiert. Also zeigen wir für beliebiges Element $(\varepsilon, \eta) \in \ell_1^2 \times (\mathbb{R} \times \ell^2)$, dass gilt:

$$d_q(\kappa \times \mu)(u) = (\varepsilon, \eta)$$

Falls $\varepsilon \in \ell_1^2$ und $\eta \in \mathbb{R} \times \ell^2$ dann konvergiert $u = \sum_{n \geq 1} \varepsilon V_n + \eta_0 + \sum_{n \geq 1} \eta_n W_n$ in L^2 . Dies gilt, da:

Wenn $\varepsilon \in \ell_1^2$, dann gilt $\sum_{n \geq 1} n^2 \varepsilon_n^2 < \infty$ und für V_n gilt $V_n = 4\pi n \sin(2\pi nx) + O(1)$. Somit folgt, dass $\sum_{n \geq 1} \varepsilon_n V_n$ in L^2 konvergiert.

η_0 liegt als Konstante offensichtlich auch in L^2 .

Wenn $(\eta_n)_{n \geq 1} \in \ell^2$, dann gilt $\sum_{n \geq 1} \eta_n^2 < \infty$ und für W_n gilt $W_n = -2 \cos(2\pi n x) + O(\frac{1}{n})$. Somit folgt, dass $\sum_{n \geq 1} \eta_n W_n$ in L^2 konvergiert.

Also konvergiert u in L^2 und liegt somit im Definitionsbereich von $d_q(\kappa \times \mu)$.

Nun zeigen wir, dass $d_q(\kappa \times \mu)(u) = (\varepsilon, \eta)$ gilt und verwenden dabei die oben hergeleitete Formel für die Ableitung von $(\kappa \times \mu)$:

$$v \rightarrow (\langle \frac{\partial \kappa_n}{\partial q}, v \rangle, n \geq 1; [v]; \langle \frac{\partial \tilde{\mu}_n}{\partial q}, v \rangle, n \geq 1)$$

Nun berechnen wir die einzelnen Komponenten dieser Ableitung:

$$\begin{aligned} \langle \frac{\partial \kappa_n}{\partial q}, u \rangle &= \langle \frac{\partial \kappa_n}{\partial q}, \sum_{m \geq 1} \varepsilon_m V_m + \eta_0 + \sum_{m \geq 1} \eta_m W_m \rangle \\ &= \sum_{m \geq 1} \varepsilon_m \langle \frac{\partial \kappa_n}{\partial q}, V_m \rangle + \eta_0 \langle \frac{\partial \kappa_n}{\partial q}, 1 \rangle + \sum_{m \geq 1} \eta_m \langle \frac{\partial \kappa_n}{\partial q}, W_m \rangle \\ &= \sum_{m \geq 1} 2\varepsilon_m \langle \frac{\partial \kappa_n}{\partial q}, \frac{d}{dx} \frac{\partial \mu_m}{\partial q} \rangle + \sum_{m \geq 1} -2\eta_m \langle \frac{\partial \kappa_n}{\partial q}, \frac{d}{dx} \frac{\partial \kappa_m}{\partial q} \rangle \\ &= \sum_{m \geq 1} \varepsilon_m \delta_{mn} \\ &= \varepsilon_n \end{aligned}$$

Für die dritte Gleichung hat man $V_n = 2 \frac{d}{dx} \frac{\partial \mu_n}{\partial q}$, $W_n = -2 \frac{d}{dx} \frac{\partial \kappa_n}{\partial q}$ und $\langle \frac{\partial \kappa_n}{\partial q}, 1 \rangle = \int_0^1 \frac{\partial \kappa_n}{\partial q}(x) dx = \int_0^1 a_n(x) dx - [a_n] \int_0^1 g_n^2(x) dx = [a_n] - [a_n] \cdot 1 = 0$ genutzt und für die vierte Gleichung die Resultate aus Lemma 3 (Kapitel 3).

$$\begin{aligned} [u] &= \int_0^1 u(x) dx \\ &= \langle 1, u \rangle \\ &= \langle 1, \sum_{n \geq 1} \varepsilon_n V_n + \eta_0 + \sum_{n \geq 1} \eta_n W_n \rangle \\ &= \sum_{n \geq 1} \varepsilon_n \langle 1, V_n \rangle + \eta_0 \langle 1, 1 \rangle + \sum_{n \geq 1} \eta_n \langle 1, W_n \rangle \\ &= \eta_0 \end{aligned}$$

Für die letzte Gleichung hat man folgenden zwei Resultate verwendet:

$$\langle 1, V_n \rangle = \int_0^1 V_n(x) dx = 2 \int_0^1 \frac{d}{dx} g_n^2(x) dx = 2[g_n^2(x)]_0^1 = 2(g_n^2(1) - g_n^2(0)) = 0$$

$$\langle 1, W_n \rangle = \int_0^1 W_n(x) dx = -2 \int_0^1 \frac{d}{dx} (a_n - [a_n] g_n^2)(x) dx = -2[a_n(x) - [a_n] g_n^2(x)]_0^1 = 0$$

Dabei ist zu bedenken, dass $g_n(0) = g_n(1) = 0$ und $a_n(0) = a_n(1) = 0$ gilt.

$$\begin{aligned} \langle \frac{\partial \tilde{\mu}_n}{\partial q}, u \rangle &= \langle \frac{\partial \tilde{\mu}_n}{\partial q}, \sum_{m \geq 1} \varepsilon_m V_m + \eta_0 + \sum_{m \geq 1} \eta_m W_m \rangle \\ &= \sum_{m \geq 1} \varepsilon_m \langle \frac{\partial \tilde{\mu}_n}{\partial q}, V_m \rangle + \eta_0 \langle \frac{\partial \tilde{\mu}_n}{\partial q}, 1 \rangle + \sum_{m \geq 1} \eta_m \langle \frac{\partial \tilde{\mu}_n}{\partial q}, W_m \rangle \\ &= \sum_{m \geq 1} 2\varepsilon_m \langle \frac{\partial \tilde{\mu}_n}{\partial q}, \frac{d}{dx} \frac{\partial \mu_m}{\partial q} \rangle + \sum_{m \geq 1} -2\eta_m \langle \frac{\partial \tilde{\mu}_n}{\partial q}, \frac{d}{dx} \frac{\partial \kappa_m}{\partial q} \rangle \\ &= \sum_{m \geq 1} \eta_m \delta_{nm} \\ &= \eta_n \end{aligned}$$

Für die dritte Gleichung hat man wieder $V_n = 2 \frac{d}{dx} \frac{\partial \mu_n}{\partial q}$, $W_n = -2 \frac{d}{dx} \frac{\partial \mu_n}{\partial q}$ genutzt und $\langle \frac{\partial \tilde{\mu}_n}{\partial q}, 1 \rangle = \langle g_n^2 - 1, 1 \rangle = \int_0^1 (g_n^2(x) - 1) dx = \int_0^1 g_n^2(x) dx - \int_0^1 1 dx = 1 - 1 = 0$.

Für die vierte Gleichung hat man die Resultate aus Lemma 3 verwendet, wobei man folgendes bedenken muss:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial \tilde{\mu}_n}{\partial q}, \frac{d}{dx} \frac{\partial \kappa_m}{\partial q} \right\rangle &= \int_0^1 \frac{\partial \tilde{\mu}_n}{\partial q}(x) \left(\frac{\partial \kappa_m}{\partial q} \right)'(x) dx = \left[\frac{\partial \tilde{\mu}_n}{\partial q}(x) \frac{\partial \kappa_m}{\partial q}(x) \right]_0^1 - \int_0^1 \left(\frac{\partial \tilde{\mu}_n}{\partial q} \right)'(x) \frac{\partial \kappa_m}{\partial q}(x) dx \\ &= - \int_0^1 \left(\frac{\partial \tilde{\mu}_n}{\partial q} \right)'(x) \frac{\partial \kappa_m}{\partial q}(x) dx = - \left\langle \frac{d}{dx} \frac{\partial \tilde{\mu}_n}{\partial q}, \frac{\partial \kappa_m}{\partial q} \right\rangle = - \left\langle \frac{\partial \kappa_m}{\partial q}, \frac{d}{dx} \frac{\partial \tilde{\mu}_n}{\partial q} \right\rangle = -\frac{1}{2} \delta_{mn} \end{aligned}$$

Für die dritte Gleichung hat man hier $\left[\frac{\partial \tilde{\mu}_n}{\partial q}(x) \frac{\partial \kappa_m}{\partial q}(x) \right]_0^1 = 0$ verwendet. Dies folgt, da $\frac{\partial \kappa_m}{\partial q} = a_m - [a_m]g_m^2$ und $a_m(0) = a_m(1) = 0$ und $g_m(0) = g_m(1) = 0$ gilt.

Somit folgt, dass gilt:

$$d_q(\kappa \times \mu)(u) = (\varepsilon, \eta) \Leftrightarrow (d_q(\kappa \times \mu))^{-1}(\varepsilon, \eta) = \sum_{n \geq 1} \varepsilon_n V_n + \eta_0 + \sum_{n \geq 1} \eta_n W_n$$

q.e.d.

7 Korollar 1

Nun betrachten wir die Inverse der Ableitung von μ_E . Nach den Theoremen 2 und 3 ist diese Abbildung ein reell-analytischer Isomorphismus zwischen E und einer offenen Teilmenge von S .

Korollar 1:

Für $q \in E$ ist die Inverse von $d_q \mu_E$ die lineare Abbildung von $\mathbb{R} \times \ell^2 \cong T_{\mu(q)} S$ auf $E \cong T_q E$ gegeben durch

$$(d_q \mu_E)^{-1}(\eta) = \eta_0 + \sum_{n \geq 1} \eta_n W_n.$$

Insbesondere ist die Folge $1, W_n, n \geq 1$ eine Basis von E .

Somit gilt $W_n \in E$, wenn $q \in E$, d.h. W_n sind gerade an einem geraden Punkt q .

Beweis:

Aus dem letzten Theorem wissen wir, dass $\kappa \times \mu$ ein reell analytischer Isomorphismus zwischen L^2 und einer offenen Teilmenge von $\ell_1^2 \times \mathbb{R} \times \ell^2$ ist.

Zudem wissen wir aus Lemma 4, dass $q \in E \Leftrightarrow \kappa(q) = 0$ gilt.

Somit gilt für $q \in E$: $(\kappa \times \mu)(q) = (0, \mu(q)) \in \{0\} \times \mathbb{R} \times \ell^2$. Also

$$(\kappa \times \mu)(E) = (\kappa \times \mu)(L^2) \cap (\{0\} \times \mathbb{R} \times \ell^2).$$

Somit folgt:

$$\mu_E^{-1}(\eta) = (\kappa \times \mu)^{-1}(0, \eta).$$

Also ist μ_E^{-1} die Einschränkung von $(\kappa \times \mu)^{-1}$ auf $(\kappa \times \mu)(L^2) \cap (\{0\} \times \mathbb{R} \times \ell^2)$ entsprechend gilt für die Ableitung:

$$(d_q \mu_E)^{-1}(\eta) = (d_q(\kappa \times \mu))^{-1}(0, \eta)$$

Für $(d_q(\kappa \times \mu))^{-1}(\varepsilon, \eta) = \sum_{n \geq 1} \varepsilon_n V_n + \eta_0 + \sum_{n \geq 1} \eta_n W_n$ gilt auf E also $\varepsilon = 0$ und der V_n -Teil fällt weg. Somit folgt:

$$(d_q \mu_E)^{-1}(\eta) = \eta_0 + \sum_{n \geq 1} \eta_n W_n$$

Die zweite Aussage folgt direkt, da $(d_q \mu_E)^{-1}$ ein linearer Isomorphismus ist, wobei gilt:

$$(d_q \mu_E)^{-1} : \mathbb{R} \times \ell^2 \rightarrow E$$

mit

$$(d_q \mu_E)^{-1}(\eta_0, \eta_1, \eta_2, \dots) = \eta_0 + \sum_{n \geq 1} \eta_n W_n$$

Damit gilt, dass die Folge $1, W_n, n \geq 1$ eine Basis von E ist. q.e.d.