

Die Fundamentallösung

Ausgewählte Themen gewöhnlicher

Differentialgleichungen und dynamischer

Systeme

Universität Mannheim

Literatur: Inverse Spectral Theory

Prof. Dr. M. U. Schmidt

Elizaveta Silanteva

Wirtschaftsmathematik (B.Sc.)

Herbst-/Wintersemester 2026

Einführung

Diese Seminararbeit behandelt die Konstruktion und die grundlegenden Eigenschaften der Fundamentallösungen der Differentialgleichung

$$-y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x), \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (1)$$

Dabei ist $\lambda \in \mathbb{C}$ der Spektralparameter und $q \in L^2([0, 1], \mathbb{C})$ das Potential. Die Darstellung folgt Kapitel 1, Seiten 1–14, von Pöschel und Trubowitz [1]; die Bezeichnungen Lemma 1 und Theorem 1–3 entsprechen der dortigen Nummerierung.

Gesucht sind die beiden Lösungen $y_1(x, \lambda, q)$ und $y_2(x, \lambda, q)$ mit den Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} y_1(0, \lambda, q) &= 1, & y_1'(0, \lambda, q) &= 0, \\ y_2(0, \lambda, q) &= 0, & y_2'(0, \lambda, q) &= 1. \end{aligned} \quad (2)$$

Sie sollen ein Fundamentalsystem bilden: Jede Lösung von (1) lässt sich dann eindeutig als Linearkombination von y_1 und y_2 darstellen. Die Untersuchung dieser beiden Lösungen liefert damit zugleich Informationen über alle Lösungen der Gleichung.

Ausgangspunkt ist eine Integralformel für die inhomogene Gleichung ohne Potential. Lemma 1 liefert diese Formel und wird anschließend mehrfach verwendet: zur Herleitung der Integralgleichungen, zur Konstruktion der Reihenkoeffizienten sowie zum Nachweis von Existenz und Eindeutigkeit. Die entscheidende Konvergenzabschätzung beruht auf dem Faktor $1/n!$, der durch die geordnete Integration entsteht. Abschließend werden die Wronski-Identität, die inhomogene Gleichung mit Potential und die Abschätzungen aus Theorem 3 bewiesen.

Ergänzend erläutern wir die Konstruktion durch einen Volterra-Operator und bestimmen den Fehler endlicher Reihensummen. Die analytische Abhängigkeit wird auch anhand expliziter Normabschätzungen der Fréchet-Ableitungen nachvollzogen. Ein konstantes Potential dient abschließend dazu, die abstrakte Konstruktion mit direkt berechenbaren Lösungen zu vergleichen.

Lösungsbegriff und absolute Stetigkeit

Auf $L^2([0, 1], \mathbb{C})$ verwenden wir die Norm

$$\|q\| = \left(\int_0^1 |q(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

Die Cauchy–Schwarz-Ungleichung ergibt für $0 \leq x \leq 1$

$$\int_0^x |q(t)| dt \leq \sqrt{x} \|q\|. \quad (3)$$

Insbesondere liegt jedes solche Potential auch in $L^1([0, 1], \mathbb{C})$. Da ein L^2 -Potential im Allgemeinen nicht stetig ist und nur bis auf Nullmengen festliegt, kann (1) nicht an jedem Punkt im klassischen Sinn verlangt werden.

Definition. Eine Lösung von (1) ist eine Funktion $y \in C^1([0, 1], \mathbb{C})$, deren Ableitung y' absolut stetig ist und welche die Differentialgleichung fast überall erfüllt.

Eine Funktion $u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ heißt absolut stetig, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass für jede endliche Familie paarweise disjunkter Intervalle (a_k, b_k) gilt:

$$\sum_k (b_k - a_k) < \delta \implies \sum_k |u(b_k) - u(a_k)| < \varepsilon.$$

Für die folgenden Beweise ist die äquivalente Integraldarstellung entscheidend: Eine absolut stetige Funktion besitzt fast überall eine Ableitung $u' \in L^1$ und erfüllt

$$u(x) = u(0) + \int_0^x u'(t) dt. \quad (4)$$

Umgekehrt ist eine unbestimmte Integration einer L^1 -Funktion absolut stetig und besitzt fast überall diese Funktion als Ableitung.

Insbesondere folgt aus $u' = 0$ fast überall für eine absolut stetige Funktion, dass u konstant ist. Diese Folgerung wird später bei der Eindeutigkeit und bei der Wronski-Identität benötigt. Außerdem gilt: Ist u absolut stetig und stimmt u' fast überall mit einer stetigen Funktion v überein, so folgt aus (4), dass $u \in C^1$ und $u' = v$ an jedem Punkt gilt.

Für eine Lösung erhält man somit

$$y'(x) = y'(0) + \int_0^x (q(t) - \lambda)y(t) dt.$$

Weil y auf dem kompakten Intervall beschränkt ist, gehört $(q - \lambda)y$ sogar zu L^2 . Die Lösungen liegen daher auch im Sobolevraum $H^2([0, 1], \mathbb{C})$, also im Raum der Funktionen mit schwachen Ableitungen bis zur Ordnung zwei in L^2 .

Der potentialfreie Fall

Für $q = 0$ lautet die Gleichung $-y'' = \lambda y$. Wir setzen

$$c_\lambda(x) = \cos(\sqrt{\lambda}x), \quad s_\lambda(x) = \begin{cases} \frac{\sin(\sqrt{\lambda}x)}{\sqrt{\lambda}}, & \lambda \neq 0, \\ x, & \lambda = 0. \end{cases}$$

Beide Funktionen sind unabhängig von der Wahl des Vorzeichens von $\sqrt{\lambda}$. Die scheinbare Singularität bei $\lambda = 0$ ist hebbar. Die bekannten Potenzreihen

$$c_\lambda(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m} \lambda^m}{(2m)!}, \quad s_\lambda(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+1} \lambda^m}{(2m+1)!}$$

zeigen außerdem, dass beide Funktionen für festes x ganze Funktionen von λ sind. Für die weiteren Beweise verwenden wir vor allem die Identitäten

$$c'_\lambda = -\lambda s_\lambda, \quad s'_\lambda = c_\lambda, \quad c_\lambda^2 + \lambda s_\lambda^2 = 1 \quad (5)$$

und die Anfangswerte

$$c_\lambda(0) = 1, \quad c'_\lambda(0) = 0, \quad s_\lambda(0) = 0, \quad s'_\lambda(0) = 1.$$

Lemma 1: die inhomogene Gleichung ohne Potential

Für $f \in L^2([0, 1], \mathbb{C})$ und $a, b \in \mathbb{C}$ besitzt das Anfangswertproblem

$$-y'' = \lambda y - f, \quad y(0) = a, \quad y'(0) = b$$

genau eine Lösung. Sie ist gegeben durch

$$y(x) = ac_\lambda(x) + bs_\lambda(x) + \int_0^x s_\lambda(x-t)f(t) dt. \quad (6)$$

Beweis

1. Regularität und Differentialgleichung. Wir untersuchen zunächst den Integralterm

$$v(x) = \int_0^x s_\lambda(x-t)f(t) dt.$$

Die Additionsformel liefert

$$s_\lambda(x-t) = s_\lambda(x)c_\lambda(t) - c_\lambda(x)s_\lambda(t).$$

Mit

$$A(x) = \int_0^x c_\lambda(t)f(t) dt, \quad B(x) = \int_0^x s_\lambda(t)f(t) dt$$

gilt also $v = s_\lambda A - c_\lambda B$. Da die Integranden zu L^1 gehören, sind A und B absolut stetig. Dasselbe gilt für v . Produktregel und (5) ergeben zunächst fast überall

$$\begin{aligned} v' &= c_\lambda A + s_\lambda c_\lambda f + \lambda s_\lambda B - c_\lambda s_\lambda f \\ &= c_\lambda A + \lambda s_\lambda B. \end{aligned}$$

Die rechte Seite ist stetig. Nach der oben erläuterten Eigenschaft absolut stetiger Funktionen ist v daher stetig differenzierbar, und diese Formel gilt überall. Die rechte Seite ist darüber hinaus absolut stetig, also auch v' . Erneutes Differenzieren ergibt fast überall

$$\begin{aligned} v'' &= -\lambda s_\lambda A + c_\lambda^2 f + \lambda c_\lambda B + \lambda s_\lambda^2 f \\ &= -\lambda v + (c_\lambda^2 + \lambda s_\lambda^2) f = -\lambda v + f. \end{aligned}$$

Außerdem gilt $v(0) = v'(0) = 0$. Somit erfüllt die rechte Seite von (6) sowohl die Differentialgleichung als auch die vorgegebenen Anfangsbedingungen im vereinbarten Lösungsbegriff.

2. Eindeutigkeit. Die Differenz w zweier Lösungen erfüllt $w'' = -\lambda w$ fast überall und $w(0) = w'(0) = 0$. Betrachte

$$U = c_\lambda w - s_\lambda w', \quad V = \lambda s_\lambda w + c_\lambda w'.$$

Beide Funktionen sind absolut stetig. Mithilfe von (5) und $w'' = -\lambda w$ folgt $U' = V' = 0$ fast überall. Daher sind U und V konstant, wegen ihrer Anfangswerte sogar identisch null. Aus

$$w = c_\lambda U + s_\lambda V$$

folgt $w = 0$. Damit ist die Lösung eindeutig. □

Die Rechnung zeigt zugleich die wiederholt benötigten Formeln

$$\begin{aligned} v'(x) &= \int_0^x c_\lambda(x-t)f(t) dt, \\ v''(x) &= f(x) - \lambda v(x) \quad \text{fast überall.} \end{aligned} \tag{7}$$

Ihre Gültigkeit setzt keine Stetigkeit von f voraus; genau hier ist die absolute Stetigkeit wesentlich.

Von Lemma 1 zu den Integralgleichungen

Wir schreiben (1) in der Form

$$-y'' = \lambda y - qy.$$

Ist y eine Lösung, so ist y stetig und beschränkt. Deshalb liegt $f = qy$ in L^2 , und Lemma 1 ist anwendbar. Für die normierten Anfangsdaten folgt

$$\begin{aligned} y_1(x) &= c_\lambda(x) + \int_0^x s_\lambda(x-t)q(t)y_1(t) dt, \\ y_2(x) &= s_\lambda(x) + \int_0^x s_\lambda(x-t)q(t)y_2(t) dt. \end{aligned} \tag{8}$$

Umgekehrt ist jede stetige Funktion, die eine dieser Integralgleichungen erfüllt, nach Lemma 1 eine Lösung des entsprechenden Anfangswertproblems: Man setzt erneut $f = qy_j$ und erhält die erforderliche Regularität, die Differentialgleichung und die Anfangswerte zugleich.

Die Integralgleichungen sind somit eine äquivalente Formulierung des Anfangswertproblems. Ihre besondere Struktur besteht darin, dass der Wert bei x nur von Werten im Intervall $[0, x]$ abhängt. Durch wiederholtes Einsetzen werden wir daraus die Lösungen konstruieren.

Konstruktion der Fundamentallösungen

Ausgehend von $C_0(x) = c_\lambda(x)$ und $S_0(x) = s_\lambda(x)$ definieren wir die Koeffizienten für $n \geq 1$ rekursiv durch

$$\begin{aligned} C_n(x) &= \int_0^x s_\lambda(x-t)q(t)C_{n-1}(t) dt, \\ S_n(x) &= \int_0^x s_\lambda(x-t)q(t)S_{n-1}(t) dt. \end{aligned} \tag{9}$$

Die Abhängigkeit von λ und q wird hier lediglich in der Notation unterdrückt. Diese Definition ist sinnvoll, weil die vorhergehenden Koeffizienten stetig sind und daher $qC_{n-1}, qS_{n-1} \in L^2$ gelten.

Erneute Anwendung von Lemma 1. Mit $f = qC_{n-1}$ und den Anfangsdaten $a = b = 0$ liefert Lemma 1 die eindeutige Lösung C_n des Anfangswertproblems

$$-C_n'' = \lambda C_n - qC_{n-1}, \quad C_n(0) = C_n'(0) = 0.$$

Entsprechend gilt dies für S_n mit $f = qS_{n-1}$. Wir vergleichen dieses Problem mit dem Anfangswertproblem aus Lemma 1:

$$-y'' = \lambda y - f, \quad y(0) = a, \quad y'(0) = b.$$

Die Größen in der Lemma-Aussage werden hier also wie folgt gewählt:

$$\boxed{y = C_n, \quad f = qC_{n-1}, \quad a = 0, \quad b = 0.}$$

Die Voraussetzung $f \in L^2$ ist erfüllt, denn C_{n-1} ist stetig und damit beschränkt, sodass

$$\|qC_{n-1}\|_{L^2} \leq \|q\| \|C_{n-1}\|_\infty < \infty.$$

Nun setzen wir diese Größen direkt in die Lösungsformel (6) ein:

$$\begin{aligned} y(x) &= ac_\lambda(x) + bs_\lambda(x) + \int_0^x s_\lambda(x-t)f(t) dt, \\ C_n(x) &= \underbrace{0 \cdot c_\lambda(x)}_{=0} + \underbrace{0 \cdot s_\lambda(x)}_{=0} + \int_0^x s_\lambda(x-t) \underbrace{q(t)C_{n-1}(t)}_{f(t)} dt \\ &= \int_0^x s_\lambda(x-t)q(t)C_{n-1}(t) dt. \end{aligned}$$

Dies ist genau die erste Rekursionsformel in (9). Lemma 1 liefert zugleich ihre Eindeutigkeit und die nötige Regularität: $C_n \in C^1$ und C_n' ist absolut stetig.

Für die zweite Koeffizientenfolge wenden wir dasselbe Lemma auf

$$-S_n'' = \lambda S_n - qS_{n-1}, \quad S_n(0) = S_n'(0) = 0$$

an, diesmal mit $y = S_n$, $f = qS_{n-1}$ und wieder $a = b = 0$. Die Voraussetzung $qS_{n-1} \in L^2$ folgt auf dieselbe Weise. Einsetzen in (6) ergibt

$$\begin{aligned} S_n(x) &= 0 \cdot c_\lambda(x) + 0 \cdot s_\lambda(x) + \int_0^x s_\lambda(x-t)q(t)S_{n-1}(t) dt \\ &= \int_0^x s_\lambda(x-t)q(t)S_{n-1}(t) dt. \end{aligned}$$

Die Rekursion löst also in jedem Schritt ein konkretes inhomogenes Anfangswertproblem. Sie ist zugleich die Rekursion, die man durch formalen Koeffizientenvergleich in $y_1(x, \lambda, \varepsilon q) = \sum_{n \geq 0} \varepsilon^n C_n(x, \lambda, q)$ erhalten würde. Die Konvergenz wird im nächsten Abschnitt bewiesen.

Zur Veranschaulichung genügt der erste Koeffizient

$$C_1(x) = \int_0^x s_\lambda(x-t)q(t)c_\lambda(t) dt.$$

Jede weitere Anwendung der Rekursion fügt einen Faktor q und eine Integrationsvariable hinzu. Definiere für $n \geq 1$

$$\Delta_n(x) = \{(t_1, \dots, t_n) : 0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq x\}, \quad t_{n+1} = x.$$

Induktiv erhält man die beiden Darstellungen

$$\begin{aligned} C_n(x, \lambda, q) &= \int_{\Delta_n(x)} c_\lambda(t_1) \prod_{i=1}^n [s_\lambda(t_{i+1} - t_i) q(t_i)] dt_1 \cdots dt_n, \\ S_n(x, \lambda, q) &= \int_{\Delta_n(x)} s_\lambda(t_1) \prod_{i=1}^n [s_\lambda(t_{i+1} - t_i) q(t_i)] dt_1 \cdots dt_n. \end{aligned} \quad (10)$$

Im Induktionsschritt wird die bisher äußerste Variable durch die neue Integrationsvariable ersetzt; die neue äußere Integration ergänzt die letzte Ungleichung in der Ordnung der Variablen. Fubini ist anwendbar, da die trigonometrischen Faktoren auf dem Integrationsgebiet beschränkt sind und die Produkte der $|q(t_i)|$ integrierbar sind.

Die Formeln (10) werden zweimal wesentlich gebraucht: Sie liefern die Fakultätsmajorante für die Konvergenz und machen in Theorem 3 sichtbar, wie viele Faktoren $1/|\sqrt{\lambda}|$ gewonnen werden können. Wir setzen nun

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} C_n, \quad y_2 = \sum_{n=0}^{\infty} S_n. \quad (11)$$

Theorem 1: Konvergenz, Existenz und Eindeutigkeit

Die Reihen (11) konvergieren gleichmäßig auf beschränkten Teilmengen von $[0, 1] \times \mathbb{C} \times L^2([0, 1], \mathbb{C})$. Ihre Summen sind die eindeutigen Lösungen von (1) mit den Anfangsdaten (2). Sie erfüllen (8) und die Abschätzung

$$|y_j(x, \lambda, q)| \leq E(x, \lambda, q), \quad j = 1, 2, \quad (12)$$

wobei

$$\eta = |\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}|, \quad E(x, \lambda, q) = \exp(\eta x + \|q\| \sqrt{x}).$$

Auch η hängt nicht von der Wahl des Vorzeichens der Wurzel ab.

Beweis

1. Abschätzung der elementaren Faktoren. Aus der Exponentialdarstellung des Kosinus folgt

$$|c_\lambda(u)| \leq e^{\eta u} \quad (0 \leq u \leq 1).$$

Wegen $s_\lambda(u) = \int_0^u c_\lambda(v) dv$ gilt außerdem

$$|s_\lambda(u)| \leq u e^{\eta u} \leq e^{\eta u}. \quad (13)$$

In den Produkten aus (10) addieren sich die Argumente der Exponentialfaktoren zu x , denn

$$t_1 + (t_2 - t_1) + \cdots + (x - t_n) = x.$$

Für beide Koeffizienten erhalten wir deshalb

$$|C_n(x, \lambda, q)|, |S_n(x, \lambda, q)| \leq e^{\eta x} \int_{\Delta_n(x)} \prod_{i=1}^n |q(t_i)| dt_1 \cdots dt_n.$$

2. Der Faktor $1/n!$. Der Integrand $\prod_i |q(t_i)|$ ist symmetrisch in den Variablen. Der Würfel $[0, x]^n$ zerfällt bis auf Nullmengen in $n!$ Gebiete, die den möglichen Reihenfolgen der Variablen entsprechen. Auf jedem dieser Gebiete ist das Integral gleich groß. Somit

$$\begin{aligned} \int_{\Delta_n(x)} \prod_{i=1}^n |q(t_i)| dt_1 \cdots dt_n &= \frac{1}{n!} \int_{[0, x]^n} \prod_{i=1}^n |q(t_i)| dt_1 \cdots dt_n \\ &= \frac{1}{n!} \left(\int_0^x |q(t)| dt \right)^n \leq \frac{(\|q\| \sqrt{x})^n}{n!}. \end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde (3) verwendet. Insgesamt folgt die zentrale Koeffizientenabschätzung

$$|C_n(x, \lambda, q)|, |S_n(x, \lambda, q)| \leq e^{\eta x} \frac{(\|q\| \sqrt{x})^n}{n!}. \quad (14)$$

Für $n = 0$ gilt dieselbe Schranke mit dem Faktor 1.

3. Gleichmäßige Konvergenz. Auf einer Menge mit $|\lambda| \leq L$ und $\|q\| \leq R$ ist $\eta x \leq \sqrt{L}$. Also werden beide Reihen unabhängig von x , λ und q durch die konvergente Zahlenreihe

$$e^{\sqrt{L}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R^n}{n!} = e^{\sqrt{L}+R}$$

majorisiert. Das Weierstraßsche Majorantenkriterium ergibt die behauptete gleichmäßige Konvergenz. Insbesondere sind die Summen für feste Parameter stetig in x . Summation von (14) liefert (12).

4. Die Reihensummen sind Lösungen. Aus der Rekursion folgt

$$\begin{aligned} y_1(x) &= c_\lambda(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x s_\lambda(x-t) q(t) C_{n-1}(t) dt \\ &= c_\lambda(x) + \int_0^x s_\lambda(x-t) q(t) \sum_{n=1}^{\infty} C_{n-1}(t) dt \\ &= c_\lambda(x) + \int_0^x s_\lambda(x-t) q(t) y_1(t) dt. \end{aligned}$$

Die Vertauschung ist gerechtfertigt: Die Partialsummen konvergieren gleichmäßig, und $s_\lambda(x - \cdot)q$ ist integrierbar. Das Integral des Fehlers wird daher durch eine Konstante mal den Supremumsfehler der Partialsummen beschränkt und geht gegen null.

Nun kommt Lemma 1 mit $f = qy_1$ zum Einsatz. Weil y_1 stetig ist, gilt $qy_1 \in L^2$. Die Integralformel zeigt damit, dass $y_1 \in C^1$, dass y_1' absolut stetig ist und dass

$y_1'' = (q - \lambda)y_1$ fast überall gilt. Die Anfangswerte sind $y_1(0) = 1$ und $y_1'(0) = 0$. Derselbe Schluss gilt für y_2 . Hier wird also nicht vorausgesetzt, dass die ursprünglich formale Reihe zweimal gliedweise nach x differenziert werden darf.

5. Eindeutigkeit. Seien y und $\tilde{y}$ zwei Lösungen mit denselben Anfangsdaten. Lemma 1, jeweils mit $f = qy$ beziehungsweise $f = q\tilde{y}$, liefert für die Differenz $v = y - \tilde{y}$

$$v(x) = \int_0^x s_\lambda(x-t)q(t)v(t) dt.$$

Nach Cauchy–Schwarz gilt

$$\begin{aligned} |v(x)|^2 &\leq \left(\int_0^x |s_\lambda(x-t)q(t)|^2 dt \right) \left(\int_0^x |v(t)|^2 dt \right) \\ &\leq M \int_0^x |v(t)|^2 dt, \quad M = \|q\|^2 \max_{0 \leq u \leq 1} |s_\lambda(u)|^2. \end{aligned}$$

Setze $F(x) = \int_0^x |v(t)|^2 dt$. Dann ist $F \geq 0$, $F(0) = 0$ und $F' \leq MF$. Deshalb

$$\frac{d}{dx} \left(e^{-Mx} F(x) \right) = e^{-Mx} (F'(x) - MF(x)) \leq 0.$$

Die nichtnegative Funktion $e^{-Mx} F(x)$ ist nichtwachsend und beginnt mit dem Wert null; sie ist also identisch null. Damit gilt $F = 0$ und wegen der Stetigkeit von v auch $v = 0$ auf dem ganzen Intervall. $\square$

Aus (7) und (8) folgen die beiden Ableitungsformeln

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= -\lambda s_\lambda(x) + \int_0^x c_\lambda(x-t)q(t)y_1(t) dt, \\ y_2'(x) &= c_\lambda(x) + \int_0^x c_\lambda(x-t)q(t)y_2(t) dt. \end{aligned} \tag{15}$$

Diese Formeln werden bei der analytischen Parameterabhängigkeit und im Beweis von Theorem 3 erneut verwendet.

Die Konstruktion als Volterra-Reihe

Die bisherigen Schritte lassen sich auch als Aussage über einen linearen Integraloperator verstehen. Für feste Parameter λ und q definieren wir auf dem Banachraum $C([0, 1], \mathbb{C})$ den Operator

$$(V_{\lambda,q}u)(x) := \int_0^x s_\lambda(x-t)q(t)u(t) dt.$$

Die Stetigkeit des Bildes folgt beispielsweise aus Lemma 1, denn $qu \in L^2$. Mit der Supremumsnorm ist dieser Operator beschränkt:

$$\|V_{\lambda,q}u\|_\infty \leq e^\eta \|q\| \|u\|_\infty.$$

Die Integralgleichungen lauten damit $y_1 = c_\lambda + V_{\lambda,q}y_1$ und $y_2 = s_\lambda + V_{\lambda,q}y_2$. Die bereits konstruierten Koeffizienten sind genau

$$C_n = V_{\lambda,q}^n c_\lambda, \quad S_n = V_{\lambda,q}^n s_\lambda.$$

Die erste Operatorabschätzung würde nur bei hinreichend kleinem $\|q\|$ unmittelbar ein Kontraktionsargument erlauben. Die Volterra-Struktur liefert jedoch mehr: Für $n \geq 1$ und ein beliebiges $u \in C([0, 1], \mathbb{C})$ erhält man durch Iteration

$$(V_{\lambda,q}^n u)(x) = \int_{\Delta_n(x)} u(t_1) \prod_{i=1}^n [s_\lambda(t_{i+1} - t_i) q(t_i)] dt_1 \cdots dt_n.$$

Die Argumente der Exponentialfaktoren addieren sich hier zu $x - t_1 \leq x$. Dieselbe Symmetrierechnung wie im Beweis von Theorem 1 ergibt deshalb

$$|(V_{\lambda,q}^n u)(x)| \leq e^{\eta x} \|u\|_\infty \frac{(\|q\| \sqrt{x})^n}{n!}, \quad \|V_{\lambda,q}^n\|_{\text{op}} \leq e^\eta \frac{\|q\|^n}{n!}.$$

Damit konvergiert die Operatorreihe $\sum_{n=0}^\infty V_{\lambda,q}^n$ in der Operatornorm für jedes $q \in L^2$. Es wird also keine Kleinheitsbedingung an das Potential benötigt.

Bezeichnet I den Identitätsoperator, so gilt für jede endliche Summe

$$(I - V_{\lambda,q}) \sum_{n=0}^N V_{\lambda,q}^n = I - V_{\lambda,q}^{N+1} = \left(\sum_{n=0}^N V_{\lambda,q}^n \right) (I - V_{\lambda,q}).$$

Die rechte Restpotenz verschwindet für $N \rightarrow \infty$ in der Operatornorm. Folglich besitzt $I - V_{\lambda,q}$ eine beschränkte Inverse, und

$$y_1 = (I - V_{\lambda,q})^{-1} c_\lambda, \quad y_2 = (I - V_{\lambda,q})^{-1} s_\lambda.$$

Diese Darstellung erklärt die Rolle der geordneten Integration besonders deutlich: Der Faktor $1/n!$ kontrolliert die wiederholte Anwendung des Operators auch dann, wenn seine erste Potenz eine große Norm hat. Sie fasst die bereits bewiesene Existenz und Eindeutigkeit in einer gemeinsamen Operatorformel zusammen.

Restglied und Genauigkeit endlicher Summen

Der Konvergenzbeweis liefert zugleich eine quantitative Aussage über den Fehler, der beim Abbruch der Reihen entsteht. Setze für $N \geq 0$

$$u_{1,N}(x) := \sum_{n=0}^N C_n(x, \lambda, q), \quad u_{2,N}(x) := \sum_{n=0}^N S_n(x, \lambda, q), \quad a_x := \|q\| \sqrt{x}.$$

Aus (14) folgt für $j = 1, 2$

$$|y_j(x, \lambda, q) - u_{j,N}(x)| \leq e^{\eta x} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{a_x^n}{n!}.$$

Um die rechte Seite durch einen einzigen Ausdruck zu ersetzen, schreiben wir $n = N + 1 + \ell$. Aus $(N + 1 + \ell)! \geq (N + 1)! \ell!$ folgt

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{a_x^n}{n!} \leq \frac{a_x^{N+1}}{(N+1)!} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{a_x^\ell}{\ell!} = \frac{a_x^{N+1}}{(N+1)!} e^{a_x}.$$

Somit erhält man die explizite Restgliedabschätzung

$$|y_j(x, \lambda, q) - u_{j,N}(x)| \leq E(x, \lambda, q) \frac{(\|q\|\sqrt{x})^{N+1}}{(N+1)!}.$$

Auf einer Menge mit $|\lambda| \leq L$ und $\|q\| \leq R$ ist der Fehler daher für beide Lösungen und alle $x \in [0, 1]$ höchstens $e^{\sqrt{L}+R} R^{N+1}/(N+1)!$. Diese Zahl geht mit N gegen null. Die Aussage gilt auf jeder solchen beschränkten Menge, obwohl beschränkte Teilmengen des unendlichdimensionalen Raumes L^2 im Allgemeinen nicht kompakt sind. Die gemeinsame Majorante ersetzt hier eine Argumentation über Kompaktheit.

Auch die Differentialgleichung der endlichen Summe lässt sich genau angeben. Da nur endlich viele Terme auftreten, darf ohne weiteres Differenzieren mit Summation vertauscht werden. Die Rekursion ergibt fast überall

$$-u''_{1,N} + qu_{1,N} - \lambda u_{1,N} = qC_N, \quad -u''_{2,N} + qu_{2,N} - \lambda u_{2,N} = qS_N.$$

Die normierten Anfangsdaten bleiben bei jedem Abbruch exakt erhalten, weil alle Koeffizienten mit $n \geq 1$ die Anfangsdaten null besitzen. Die rechte Seite misst somit ausschließlich den Fehler in der Differentialgleichung. Ihre L^2 -Norm ist nach der Majorante höchstens

$$\|qC_N\|_{L^2}, \|qS_N\|_{L^2} \leq e^\eta \frac{\|q\|^{N+1}}{N!}.$$

Damit sind sowohl der Funktionsfehler als auch der verbleibende Differentialgleichungsfehler kontrolliert. Für eine gewünschte Genauigkeit kann man einen Abbruchindex wählen, indem man diese expliziten Schranken mit der vorgegebenen Fehlertoleranz vergleicht.

Analytische Abhängigkeit von den Parametern

Die Entwicklung in q ist eine Potenzreihe in einer Funktionsvariablen. Für feste x und λ ist C_n ein stetiges homogenes Polynom vom Grad n : Ersetzt man in (10) die Faktoren $q(t_i)$ durch $h_i(t_i)$, so erhält man eine beschränkte n -lineare Form. Tatsächlich ist ihr Betrag höchstens

$$e^{\eta x} \prod_{i=1}^n \int_0^x |h_i(t)| dt \leq e^{\eta x} x^{n/2} \prod_{i=1}^n \|h_i\|.$$

Durch Mittelung über alle Permutationen erhält man eine symmetrische Form B_n mit $C_n(q) = B_n(q, \dots, q)$. Entsprechend verfährt man mit S_n . Insbesondere gilt $C_n(\varepsilon q) = \varepsilon^n C_n(q)$.

Für festes x sind die Koeffizienten auch ganze Funktionen von λ , da die Kerne c_λ und s_λ diese Eigenschaft besitzen. Integration über das feste, beschränkte Gebiet erhält die analytische Abhängigkeit; auf beschränkten Parametermengen stehen integrierbare Majoranten zur Verfügung. Die Koeffizienten sind damit gemeinsam analytisch in (λ, q) .

Nach Theorem 1 konvergieren die Reihen auf jeder beschränkten Parametermenge gleichmäßig. Der Weierstraßsche Satz für analytische Abbildungen auf komplexen Banachräumen ergibt daher, dass

$$(\lambda, q) \mapsto y_j(x, \lambda, q), \quad j = 1, 2,$$

ganze Funktionen auf $\mathbb{C} \times L^2([0, 1], \mathbb{C})$ sind. Die Reihen sind tatsächlich die Taylorentwicklungen bei $q = 0$:

$$C_n(x, \lambda, q) = \frac{1}{n!} D_q^n y_1(x, \lambda, 0)[q, \dots, q],$$

und analog gilt die entsprechende Formel für S_n und y_2 . Dabei bezeichnet D_q^n die n -te Fréchet-Ableitung. Die erste Fréchet-Ableitung ist die beschränkte lineare Abbildung $DF(q)$, für die $F(q+h) = F(q) + DF(q)[h] + o(\|h\|)$ gilt.

Symmetrisierung und gliedweise Differentiation

Der Übergang von einer konvergenten Reihe zur Taylorentwicklung lässt sich hier auch unmittelbar anhand der Koeffizienten begründen. Dazu fixieren wir zunächst x und λ . Mit A_n bezeichnen wir die oben eingeführte n -lineare Form, die aus dem Integral für C_n durch Ersetzen von $q(t_i)$ durch $h_i(t_i)$ entsteht. Für $n \geq 1$ ist ihre Symmetrisierung

$$B_n(h_1, \dots, h_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} A_n(h_{\sigma(1)}, \dots, h_{\sigma(n)}),$$

wobei $\mathfrak{S}_n$ die Menge aller Permutationen von $\{1, \dots, n\}$ bezeichnet. Auf der Diagonalen ändert diese Mittelung den Wert nicht; deshalb gilt weiterhin $C_n(q) = B_n(q, \dots, q)$.

Die Symmetrisierung liefert eine stärkere Schranke als die einzelne unsymmetrische Form. Der Betrag des trigonometrischen Kerns ist nach dem Beweis von Theorem 1 höchstens $e^{\eta x}$. Folglich gilt

$$\begin{aligned} |B_n(h_1, \dots, h_n)| &\leq \frac{e^{\eta x}}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \int_{\Delta_n(x)} \prod_{i=1}^n |h_{\sigma(i)}(t_i)| dt_1 \cdots dt_n \\ &= \frac{e^{\eta x}}{n!} \prod_{i=1}^n \int_0^x |h_i(t)| dt \\ &\leq \frac{e^{\eta x} x^{n/2}}{n!} \prod_{i=1}^n \|h_i\|. \end{aligned}$$

Für die mittlere Gleichheit ordnet man in jedem Summanden die Integrationsvariablen entsprechend der Permutation um. Die so entstehenden Integrationsgebiete zerlegen den Würfel $[0, x]^n$ bis auf Nullmengen. Erst die Summe über alle Permutationen stellt diese Zerlegung her; für einen einzelnen Summanden mit verschiedenen

h_i wäre der Faktor $1/n!$ nicht ohne Weiteres zulässig. Insbesondere besitzt die symmetrische Form die Operatornormschranke

$$\|B_n\| \leq \frac{e^{\eta x} x^{n/2}}{n!}.$$

Aus der Multilinearität und Symmetrie folgt für $0 \leq k \leq n$

$$D_q^k C_n(q)[h_1, \dots, h_k] = \frac{n!}{(n-k)!} B_n(\underbrace{q, \dots, q}_{n-k}, h_1, \dots, h_k).$$

Dabei zählt der Vorfaktor die Möglichkeiten, die k Richtungen auf verschiedene Argumentstellen zu verteilen. Für $k > n$ ist die Ableitung null. Auf einer Kugel $\|q\| \leq R$ erhalten wir somit für jede feste Ableitungsordnung k die summierbare Majorante

$$\sum_{n=k}^{\infty} \|D_q^k C_n(q)\| \leq e^{\eta x} x^{k/2} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(\sqrt{x}R)^{n-k}}{(n-k)!} = e^{\eta x + \sqrt{x}R} x^{k/2}.$$

Die Norm links ist die Operatornorm einer k -linearen Abbildung auf L^2 . Die Abschätzung gilt gleichmäßig für $x \in [0, 1]$ und für beschränkte Mengen von λ , da dort η beschränkt bleibt. Für $x = 0$ verschwinden sämtliche Ableitungen positiver Ordnung unmittelbar wegen der festen Anfangswerte.

Die Rechtfertigung der ersten Differentiation kann man besonders anschaulich durch einen Restterm sehen. Die binomische Entwicklung von $B_n(q+h, \dots, q+h)$ und die gerade bewiesene Schranke ergeben

$$\begin{aligned} & |y_1(x, \lambda, q+h) - y_1(x, \lambda, q) - \sum_{n=1}^{\infty} D_q C_n(q)[h]| \\ & \leq e^{\eta x + \sqrt{x}\|q\|} \left(e^{\sqrt{x}\|h\|} - 1 - \sqrt{x}\|h\| \right). \end{aligned}$$

Alle verwendeten Doppelsummen sind wegen derselben Exponentialmajorante absolut konvergent. Die rechte Seite ist $O(\|h\|^2)$ für $h \rightarrow 0$. Die Reihe der ersten Ableitungen definiert daher tatsächlich die Fréchet-Ableitung der Summe. Die entsprechende Argumentation für die bereits differenzierten Polynome rechtfertigt induktiv jede weitere Differentiation; die obige Majorante sichert jeweils die lokale gleichmäßige Konvergenz in der passenden Operatornorm.

Bei $q = 0$ bleibt in der Reihe für $D_q^k y_1$ nur der Summand mit $n = k$ übrig: Die Summanden mit $n < k$ verschwinden durch Differentiation, diejenigen mit $n > k$ enthalten noch mindestens ein Argument $q = 0$. Es folgt

$$D_q^k y_1(x, \lambda, 0)[h_1, \dots, h_k] = k! B_k(h_1, \dots, h_k).$$

Setzt man alle Richtungen gleich q , erhält man genau die oben behauptete Taylorformel. Dies identifiziert die rekursiv konstruierten Koeffizienten mit den tatsächlichen Ableitungen, ohne sich allein auf einen formalen Koeffizientenvergleich zu stützen.

Für S_n und y_2 gelten sämtliche Schritte ebenso, weil ihr Anfangsfaktor $s_\lambda(t_1)$ dieselbe verwendete Exponentialschranke erfüllt.

Die Normabschätzungen erklären zugleich den Unterschied zwischen einer Entwicklung entlang einer festen Richtung und der Analytizität auf dem gesamten Potentialraum. Eine Rechnung nur mit εq untersucht zunächst eine komplexe Gerade. Hier werden dagegen beliebige Richtungen $h_1, \dots, h_k$ gleichzeitig kontrolliert, und der Restterm hängt ausschließlich von der Norm der Änderung ab. Deshalb beschreibt die Ableitung auch Störungen, deren Richtung sich mit ihrer Größe verändert. Außerdem ist der Radius R der Potentialkugel beliebig. Die Konvergenz verlangt somit keine Kleinheitsbedingung an das Potential. Der Faktor $1/n!$, der ursprünglich aus der geordneten Integration stammt, sichert also sowohl die globale Lösungskonstruktion als auch die gesamte analytische Abhängigkeit von der Funktionsvariablen q .

Analytizität mit Werten in H^2 . Die Argumentation gilt wegen der gleichmäßigen Abschätzungen in x auch für die Abbildung $(\lambda, q) \mapsto y_j(\cdot, \lambda, q)$ mit Werten in $C([0, 1], \mathbb{C})$. Die Integralformeln (15) zeigen dasselbe für y'_j . Außerdem ist

$$y''_j = (q - \lambda)y_j$$

analytisch mit Werten in L^2 , denn die Multiplikation $L^2 \times C([0, 1]) \rightarrow L^2$ ist beschränkt bilinear: $\|qu\|_{L^2} \leq \|q\| \|u\|_\infty$. Folglich ist die Abbildung in den Sobolevraum H^2 analytisch. Formal kann man hierzu $u \mapsto (u, u', u'')$ verwenden, das H^2 als abgeschlossenen Unterraum von $(L^2)^3$ identifiziert.

Schließlich liefert komplexe Konjugation der Differentialgleichung und anschließende Eindeutigkeit

$$y_j(x, \bar{\lambda}, \bar{q}) = \overline{y_j(x, \lambda, q)}.$$

Für reelle λ und reellwertige Potentiale sind also y_j und y'_j reellwertig.

Wronski-Identität

Die Wronski-Determinante der beiden Lösungen ist

$$W(x) = \det \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y'_1(x) & y'_2(x) \end{pmatrix} = y_1(x)y'_2(x) - y'_1(x)y_2(x).$$

Es gilt

$$W(x) = 1 \quad \text{für alle } x \in [0, 1]. \quad (16)$$

Beweis

Die Funktionen y_j sind stetig differenzierbar und somit absolut stetig; ihre Ableitungen sind nach dem Lösungsbegriff ebenfalls absolut stetig. Produkte und Differenzen

absolut stetiger Funktionen sind auf diesem kompakten Intervall absolut stetig. Daher ist auch W absolut stetig. Fast überall ergibt die Produktregel

$$\begin{aligned} W' &= y_1' y_2' + y_1 y_2'' - y_1'' y_2 - y_1' y_2' \\ &= y_1(q - \lambda)y_2 - (q - \lambda)y_1 y_2 = 0. \end{aligned}$$

Aus (4) folgt nun $W(x) = W(0)$. Die normierten Anfangsbedingungen liefern $W(0) = 1$. $\square$

Insbesondere sind y_1 und y_2 linear unabhängig. Die Matrix

$$Y(x, \lambda, q) = \begin{pmatrix} y_1(x, \lambda, q) & y_2(x, \lambda, q) \\ y_1'(x, \lambda, q) & y_2'(x, \lambda, q) \end{pmatrix}$$

ist an jeder Stelle invertierbar und hat Determinante eins.

Theorem 2: die inhomogene Gleichung mit Potential

Seien $q, f \in L^2([0, 1], \mathbb{C})$ und $a, b \in \mathbb{C}$. Dann besitzt

$$-y'' + qy = \lambda y - f, \quad y(0) = a, \quad y'(0) = b$$

genau eine Lösung. Mit

$$G(x, t) = y_1(t)y_2(x) - y_2(t)y_1(x) \tag{17}$$

lautet sie

$$y(x) = ay_1(x) + by_2(x) + \int_0^x G(x, t)f(t) dt. \tag{18}$$

Alle Fundamentallösungen werden dabei für dieselben Parameter λ und q ausgewertet.

Beweis

Setze

$$A_f(x) = \int_0^x y_1(t)f(t) dt, \quad B_f(x) = \int_0^x y_2(t)f(t) dt.$$

Beide Funktionen sind absolut stetig. Der Integralterm in (18) ist

$$z(x) = y_2(x)A_f(x) - y_1(x)B_f(x).$$

Beim Differenzieren heben sich die Terme mit f zunächst auf:

$$z'(x) = y_2'(x)A_f(x) - y_1'(x)B_f(x).$$

Wie im Beweis von Lemma 1 ist diese zunächst fast überall erhaltene rechte Seite stetig. Daher gilt $z \in C^1$ und die Formel überall. Außerdem ist z' absolut stetig. Erneut folgt fast überall

$$\begin{aligned} z'' &= y_2'' A_f - y_1'' B_f + (y_2' y_1 - y_1' y_2) f \\ &= (q - \lambda)(y_2 A_f - y_1 B_f) + f \\ &= (q - \lambda)z + f. \end{aligned}$$

Hier wurde die Wronski-Identität (16) verwendet: Sie liefert genau den Faktor eins vor f . Da $A_f(0) = B_f(0) = 0$, gilt $z(0) = z'(0) = 0$. Damit löst (18) das Anfangswertproblem. Die Differenz zweier Lösungen löst das homogene Problem mit Anfangsdaten null und verschwindet nach dem Eindeutigkeitsbeweis von Theorem 1. $\square$

Zusammenhang mit Lemma 1. Die Wronski-Identität bedeutet für den Kern insbesondere

$$G(t, t) = 0, \quad \partial_x G(t, t) = 1.$$

Für $q = 0$ ergibt die Additionsformel $G(x, t) = c_\lambda(t)s_\lambda(x) - s_\lambda(t)c_\lambda(x) = s_\lambda(x - t)$. Theorem 2 erweitert somit genau die Integralformel aus Lemma 1.

Die erste Variation des Potentials

Die Lösungsformel aus Theorem 2 beschreibt auch, wie sich eine Fundamentallösung bei einer kleinen Änderung des Potentials verändert. Für eine Richtung $h \in L^2([0, 1], \mathbb{C})$ setzen wir

$$u_j(x) := D_q y_j(x, \lambda, q)[h], \quad j = 1, 2.$$

Wegen der bereits bewiesenen Analytizität mit Werten in H^2 darf die Differentialgleichung als Gleichung in L^2 nach dem Potential differenziert werden. Die Produktregel für die beschränkte bilineare Multiplikation liefert

$$-u_j'' + qu_j = \lambda u_j - hy_j, \quad u_j(0) = u_j'(0) = 0.$$

Die Anfangswerte verschwinden, weil die normierten Anfangsdaten von y_j nicht vom Potential abhängen. Außerdem gehört hy_j zu L^2 , da y_j stetig und beschränkt ist. Theorem 2 ist daher mit $f = hy_j$ anwendbar und ergibt

$$D_q y_j(x, \lambda, q)[h] = \int_0^x G(x, t) h(t) y_j(t, \lambda, q) dt.$$

Alle Fundamentallösungen im Kern G gehören zu denselben Parametern λ, q . Das Vorzeichen des Integrals stimmt mit dem Vorzeichen in Theorem 2 überein: Der zusätzliche Term der differenzierten Gleichung steht dort in der Form $-f = -hy_j$.

Für $q = 0$ wird diese Formel besonders einfach. Mit $G(x, t) = s_\lambda(x - t)$ erhält man beispielsweise

$$D_q y_1(x, \lambda, 0)[h] = \int_0^x s_\lambda(x - t) h(t) c_\lambda(t) dt.$$

Dies ist genau der erste rekursiv konstruierte Koeffizient C_1 in Richtung h . Die Variation der fertigen Lösung und die Reihenkonstruktion führen somit zum selben Ausdruck. Die oben bewiesenen Normabschätzungen geben zusätzlich

$$|D_q y_j(x, \lambda, q)[h]| \leq \sqrt{x} E(x, \lambda, q) \|h\|.$$

Damit wird die qualitative Aussage der analytischen Abhängigkeit durch eine konkrete Empfindlichkeitsabschätzung ergänzt.

Korollar 1: Darstellung sämtlicher Lösungen

Jede Lösung der homogenen Gleichung (1) besitzt die eindeutige Darstellung

$$y(x) = y(0)y_1(x, \lambda, q) + y'(0)y_2(x, \lambda, q). \quad (19)$$

Dies folgt aus Theorem 2 mit $f = 0$. Alternativ erfüllt die rechte Seite dieselbe homogene Gleichung und dieselben Anfangsbedingungen wie y , sodass Theorem 1 direkt die Gleichheit liefert. Die Koeffizienten sind durch Auswertung bei $x = 0$ eindeutig bestimmt. Damit bilden y_1, y_2 das gewünschte Fundamentalsystem.

Eine weitere Folgerung ist, dass eine nichttriviale Lösung keine doppelte Nullstelle besitzen kann. Gilt nämlich an einer Stelle $x_0 \in [0, 1]$ sowohl $y(x_0) = 0$ als auch $y'(x_0) = 0$, so folgt aus (19) und ihrer Ableitung

$$Y(x_0, \lambda, q) \begin{pmatrix} y(0) \\ y'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wegen $\det Y(x_0, \lambda, q) = 1$ sind beide Anfangswerte null. Erneut folgt aus (19), dass y identisch verschwindet. Hier wird die Wronski-Identität unmittelbar zur Aussage über die Nullstellen einer Lösung verwendet.

Theorem 3: Vergleich mit dem potentialfreien Fall

Für $x \in [0, 1]$, $q \in L^2([0, 1], \mathbb{C})$ und $\lambda \neq 0$ gelten mit $E = E(x, \lambda, q)$ die vier Abschätzungen

$$|y_1(x, \lambda, q) - c_\lambda(x)| \leq \frac{E}{|\sqrt{\lambda}|}, \quad (20)$$

$$|y_2(x, \lambda, q) - s_\lambda(x)| \leq \frac{E}{|\lambda|}, \quad (21)$$

$$|y'_1(x, \lambda, q) + \sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda}x)| \leq \|q\| E, \quad (22)$$

$$|y'_2(x, \lambda, q) - c_\lambda(x)| \leq \frac{\|q\| E}{|\sqrt{\lambda}|}. \quad (23)$$

Die Einschränkung $\lambda \neq 0$ betrifft nur diese Schreibweise der Abschätzungen. Die Lösungen selbst sind auch bei $\lambda = 0$ wohldefiniert und analytisch.

Beweis

1. Die zusätzliche Abschätzung für s_λ . Aus der Exponentialdarstellung des Sinus folgt

$$|\sin(\sqrt{\lambda}u)| \leq e^{\eta u}.$$

Neben (13) steht uns damit für $\lambda \neq 0$ die Schranke

$$|s_\lambda(u)| \leq \frac{e^{\eta u}}{|\sqrt{\lambda}|} \quad (0 \leq u \leq 1) \quad (24)$$

zur Verfügung. Wir verwenden sie nur für ausgewählte Faktoren in (10); die übrigen werden wie in Theorem 1 abgeschätzt.

2. Beweis von (20). Für $n \geq 1$ enthält C_n den Faktor $s_\lambda(x - t_n)$. Auf diesen wenden wir (24) an. Die übrige Rechnung ist dieselbe wie bei (14). Mit $a_x = \|q\|\sqrt{x}$ folgt

$$|C_n(x, \lambda, q)| \leq \frac{e^{\eta x}}{|\sqrt{\lambda}|} \frac{a_x^n}{n!}.$$

Da $C_0 = c_\lambda$, ergibt Summation ab $n = 1$

$$\begin{aligned} |y_1 - c_\lambda| &\leq \frac{e^{\eta x}}{|\sqrt{\lambda}|} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_x^n}{n!} \\ &= \frac{e^{\eta x}}{|\sqrt{\lambda}|} (e^{a_x} - 1) \leq \frac{E}{|\sqrt{\lambda}|}. \end{aligned}$$

3. Beweis von (21). In S_n treten für $n \geq 1$ sowohl der erste Faktor $s_\lambda(t_1)$ als auch der letzte Faktor $s_\lambda(x - t_n)$ auf. Diese beiden Faktoren sind auch für $n = 1$ vorhanden. Zweimalige Anwendung von (24) liefert deshalb

$$|S_n(x, \lambda, q)| \leq \frac{e^{\eta x}}{|\lambda|} \frac{a_x^n}{n!}.$$

Wegen $S_0 = s_\lambda$ folgt

$$|y_2 - s_\lambda| \leq \frac{e^{\eta x}}{|\lambda|} (e^{a_x} - 1) \leq \frac{E}{|\lambda|}.$$

Der zusätzliche Sinusfaktor erklärt also den Unterschied zwischen den Potenzen von $|\lambda|$ in den ersten beiden Abschätzungen.

4. Beweis von (22). Die erste Ableitungsformel in (15) ergibt

$$y_1'(x) + \sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda}x) = \int_0^x c_\lambda(x-t)q(t)y_1(t) dt.$$

Mit (12) und $|c_\lambda(x-t)| \leq e^{\eta(x-t)}$ erhalten wir

$$\begin{aligned} |y_1'(x) + \sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda}x)| &\leq e^{\eta x} \int_0^x |q(t)| e^{\|q\|\sqrt{t}} dt \\ &\leq E(x, \lambda, q) \int_0^x |q(t)| dt \\ &\leq E(x, \lambda, q) \|q\| \sqrt{x} \leq \|q\| E(x, \lambda, q). \end{aligned}$$

Die letzten beiden Schritte benutzen (3) und $x \leq 1$.

5. Beweis von (23). Zunächst benötigen wir eine verstärkte Schranke für y_2 selbst. Jeder Koeffizient S_n enthält mindestens einen Sinusfaktor; dies gilt auch für $S_0 = s_\lambda$. Wenden wir (24) auf genau einen solchen Faktor an, so folgt

$$|y_2(x, \lambda, q)| \leq \frac{e^{\eta x}}{|\sqrt{\lambda}|} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_x^n}{n!} = \frac{E(x, \lambda, q)}{|\sqrt{\lambda}|}. \quad (25)$$

Nun liefert die zweite Formel aus (15)

$$y_2'(x) - c_\lambda(x) = \int_0^x c_\lambda(x-t)q(t)y_2(t) dt.$$

Mit (25) folgt wie im vorherigen Schritt

$$\begin{aligned} |y_2'(x) - c_\lambda(x)| &\leq \frac{e^{\eta x}}{|\sqrt{\lambda}|} \int_0^x |q(t)| e^{\|q\|\sqrt{t}} dt \\ &\leq \frac{E(x, \lambda, q)}{|\sqrt{\lambda}|} \|q\| \sqrt{x} \leq \frac{\|q\| E(x, \lambda, q)}{|\sqrt{\lambda}|}. \end{aligned}$$

Damit sind alle vier Aussagen bewiesen. □

Beispiel: ein konstantes Potential

Die allgemeine Konstruktion lässt sich an einem konstanten Potential $q(x) = q_0$ mit $q_0 \in \mathbb{C}$ unmittelbar überprüfen. In diesem Fall reduziert sich die Differentialgleichung auf

$$-y'' = (\lambda - q_0)y.$$

Das Potential bewirkt also eine Verschiebung des Spektralparameters. Aus den Anfangsbedingungen und der bereits bewiesenen Eindeutigkeit folgt deshalb

$$y_1(x, \lambda, q_0) = c_{\lambda-q_0}(x), \quad y_2(x, \lambda, q_0) = s_{\lambda-q_0}(x). \quad (26)$$

Hier bezeichnet q_0 im dritten Argument die entsprechende konstante Funktion auf $[0, 1]$. Auch am Parameterwert $\lambda = q_0$ sind diese Formeln wohldefiniert: Die Definitionen von c_0 und s_0 ergeben $y_1(x) = 1$ und $y_2(x) = x$. Eine gesonderte Wahl einer komplexen Quadratwurzel ist somit nicht erforderlich. Dieses Beispiel verdeutlicht, warum die Darstellung durch ganze Funktionen zweckmäßiger ist als ein Ausdruck mit einer scheinbaren Singularität im Nenner.

Besonders anschaulich ist die Rekursion der Reihenkoeffizienten bei $\lambda = 0$. Dann gelten $C_0(x) = 1$, $S_0(x) = x$ und

$$C_n(x) = q_0 \int_0^x (x-t)C_{n-1}(t) dt, \quad S_n(x) = q_0 \int_0^x (x-t)S_{n-1}(t) dt.$$

Für jede ganze Zahl $k \geq 0$ liefert eine elementare Integration

$$\int_0^x (x-t)t^k dt = \frac{x^{k+2}}{(k+1)(k+2)}.$$

Einsetzen in die Rekursion und vollständige Induktion ergeben damit

$$C_n(x, 0, q_0) = \frac{q_0^n x^{2n}}{(2n)!}, \quad S_n(x, 0, q_0) = \frac{q_0^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}. \quad (27)$$

Bei jedem Integrationsschritt entstehen zwei zusätzliche Potenzen von x und die beiden nächsten Faktoren im Nenner. Die Rekursion rekonstruiert daher genau die Potenzreihen der expliziten Lösungen. Insbesondere lässt sich hier nicht nur die Konvergenz nachweisen, sondern jeder einzelne Beitrag des Potentials berechnen.

Ist $q_0 > 0$ reell, so erhält man durch Summation

$$y_1(x, 0, q_0) = \cosh(\sqrt{q_0}x), \quad y_2(x, 0, q_0) = \frac{\sinh(\sqrt{q_0}x)}{\sqrt{q_0}}.$$

Dies stimmt mit der Gleichung $y'' = q_0 y$ überein. Für $q_0 = 0$ gehen die Lösungen stetig in 1 und x über; für negatives reelles q_0 treten dagegen trigonometrische Funktionen auf. Das Verhalten der Lösungen hängt somit bereits in diesem einfachen Fall wesentlich vom Vorzeichen des Potentials ab. Die Konstruktion mittels der Integralgleichung behandelt alle diese Fälle in derselben Form.

Auch der Zusammenhang mit der Taylorentwicklung im Potential wird explizit sichtbar. Ersetzt man q_0 durch εq_0 , folgt aus (26)

$$y_1(x, \lambda, \varepsilon q_0) = c_{\lambda - \varepsilon q_0}(x), \quad C_1(x, \lambda, q_0) = -q_0 \frac{\partial c_\lambda(x)}{\partial \lambda} = \frac{q_0 x}{2} s_\lambda(x).$$

Die Ableitung ist auch bei $\lambda = 0$ durch die Potenzreihe definiert. Dort ergibt sich $C_1 = q_0 x^2/2$, genau wie in (27). Somit stimmen die Rekursion und die direkte Differentiation der expliziten Lösung überein.

Schließlich zeigt das Beispiel, wie die allgemeine Majorante einzuordnen ist. Für ein konstantes Potential ist $\|q\| = |q_0|$. Bei $\lambda = 0$ lautet die zuvor bewiesene Schranke

$$|C_n(x)|, |S_n(x)| \leq \frac{(|q_0| \sqrt{x})^n}{n!}.$$

Die exakten Koeffizienten besitzen hier sogar die stärkeren Nenner $(2n)!$ und $(2n+1)!$. Auf $0 \leq x \leq 1$ sind sie tatsächlich durch diese Majorante beschränkt. Die allgemeine Abschätzung ist also keine Aussage über die bestmögliche Schranke für jedes einzelne Potential. Ihre Stärke besteht darin, dass sie ohne explizite Lösungsformel für beliebige L^2 -Potentiale gilt und die Konvergenz einheitlich kontrolliert.

Bedeutung der Abschätzungen und Schluss

Für große positive Spektralparameter $\lambda = k^2$ mit $k > 0$ verschwindet η . Bei festem q ist $E \leq e^{\|q\|}$, sodass Theorem 3 gleichmäßig für $x \in [0, 1]$ ergibt:

$$\begin{aligned} y_1(x, k^2, q) &= \cos(kx) + O(k^{-1}), \\ y_2(x, k^2, q) &= \frac{\sin(kx)}{k} + O(k^{-2}), \\ y_1'(x, k^2, q) &= -k \sin(kx) + O(1), \\ y_2'(x, k^2, q) &= \cos(kx) + O(k^{-1}) \quad (k \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Die Konstanten in dieser Schreibweise dürfen von q abhängen, sind aber unabhängig von x und k . Für allgemeine komplexe λ muss der Faktor $e^{|\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}|x}$ berücksichtigt werden. Ohne diesen Faktor wäre eine entsprechende ungewichtete Aussage im Allgemeinen falsch: Bei $\lambda = -\kappa^2$ ist bereits $c_\lambda(x) = \cosh(\kappa x)$ exponentiell wachsend.

Die Beweisführung beruht auf wenigen wiederkehrenden Zusammenhängen. Absolute Stetigkeit rechtfertigt die Integralform des Lösungsbegriffs. Lemma 1 übersetzt die Differentialgleichung in eine Integralgleichung und liefert nach der Konstruktion auch die Regularität der Lösungen. Die geordnete Integration erzeugt den Faktor $1/n!$ und damit Konvergenz für jedes L^2 -Potential. Die Wronski-Identität ermöglicht schließlich die Darstellung inhomogener Lösungen, während die Integralformeln und die Koeffizientenabschätzungen gemeinsam die Aussagen von Theorem 3 liefern.

Damit stehen ein eindeutig bestimmtes Fundamentalsystem, seine analytische Parameterabhängigkeit und quantitative Vergleichsformeln zur Verfügung. Diese Ergebnisse bilden die Grundlage für die anschließende Untersuchung von Randwert- und Spektralproblemen.

Literatur

- [1] Jürgen Pöschel und Eugene Trubowitz: *Inverse Spectral Theory*. Pure and Applied Mathematics, Band 130. Academic Press, 1987. Kapitel 1: *A Fundamental Solution*, S. 1–14.