
Seminar ausgewählte Themen gewöhnlicher Differentialgleichungen

Thema B: **Das Dirichletproblem I**

Universität Mannheim

Omar Malek Sehili

22. März 2026

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|---|----------|
| 1 | Einführung | 1 |
| 1.1 | Das Dirichlet Problem | 1 |
| 2 | Lemma 1 | 2 |
| 2.1 | Hilfsaussage | 2 |
| 2.2 | Beweis von Lemma 1 | 3 |
| 3 | The Counting Lemma | 4 |
| 3.1 | Der Satz von Rouché | 4 |
| 3.2 | The Counting Lemma | 5 |
| 4 | Theorem 1 | 8 |
| 4.1 | Logischer Zusammenhang der Aussagen | 9 |
| 5 | Literatur | 9 |

1 Einführung

1.1 Das Dirichlet Problem

Wie im letzten Kapitel betrachten wir die Differentialgleichung:

$$-y'' + q(x)y = \lambda y \quad \text{mit } x \in [0, 1]$$

wobei $\lambda \in \mathbb{C}$ und $q \in L^2_{\mathbb{R}}$ ist. Jetzt fordern wir aber zusätzlich die Dirichlet-Randbedingungen:

$$y(0) = 0 \quad y(1) = 0$$

Definition 1.1 (Dirichlet Eigenwerte und Dirichlet-Spektrum). *Eine komplexe Zahl λ heißt **Dirichlet Eigenwert** von q falls das zugehörige Dirichlet-Randwertproblem gelöst werden kann; die Menge aller Eigenwerte von q heißt **Dirichlet-Spektrum**.*

Definition 1.2 (Eigenfunktion). *Eine Lösung $y \neq 0$ heißt dann **Eigenfunktion** von q zum Eigenwert λ .*

Notation und Abkürzungen

- Im folgenden wird *Dirichlet-Randwertproblem* mit D.-RWP abgekürzt.
- *Anfangswertproblem* wird mit AWP abgekürzt.
- $L^2_{\mathbb{R}}$ ist der Raum der quadratingrierbaren reellwertigen Funktionen auf dem Intervall $[0, 1]$.
- $L^2_{\mathbb{C}}$ ist der Raum der quadratingrierbaren komplexwertigen Funktionen auf dem Intervall $[0, 1]$.
- $\sigma_{\mathbb{D}}(q)$ soll das Dirichlet-Spektrum zu einer Funktion q sein.

Wir erinnern zurück an Korollar 1 aus Kapitel 1.

Korollar 1.3 (Korollar 1). *Jede Lösung der Differentialgleichung*

$$-y'' + q(x)y = \lambda y \quad \text{mit } x \in [0, 1]$$

kann auf folgende Art geschrieben werden:

$$y(x) = y(0)y_1(x) + y'(0)y_2(x).$$

wobei

$$\begin{aligned} y_1(0, \lambda, q) &= y_2'(0, \lambda, q) = 1 \\ y_1'(0, \lambda, q) &= y_2(0, \lambda, q) = 0 \end{aligned}$$

Wegen den Randbedingungen können wir also schließen, dass jede Lösung y des D.-RWP ein Vielfaches von y_2 sein muss. $y(0) = y(1) = 0 \implies y(x) = y'(0)y_2(x)$

Im Folgenden betrachten wir q als fix.

Satz 1.4. $\lambda \in \mathbb{C}$ ist genau dann ein Dirichlet-Eigenwert wenn λ eine Nullstellen von $y_2(1, z)$ ist

Beweis. (\Leftarrow) Sei λ eine Nullstelle von $y_2(1, z)$. Per Definition löst $y_2(x, z)$ die DGL $-y'' + q(x)y = zy$ mit $y_2(0, z) = 0$ und $y_2'(0, z) = 1$. Wegen $y_2(x, \lambda) = 0$ ist das D.-RWP gelöst und $y_2'(0, \lambda) \neq 0$.

(\Rightarrow) Angeommen λ ist ein Dirichlet Eigenwert von q mit Eigenfunktion $y(x)$. Wegen Korollar 1 ist $y(x) = y'(0)y_2(x, \lambda)$. Also ist $0 = y(1) = y'(0)y_2(1, \lambda)$. Wegen der Existenz und Eindeutigkeit des linearen Anfangswertproblems ¹ muss also $y'(0) \neq 0$ sein, also ist $y_2(x, \lambda) = 0$. □

2 Lemma 1

2.1 Hilfsaussage

Für den Beweis von Lemma 1 benötigen wir folgende Hilfsaussage:

Lemma 2.1. *Sei $z = x + iy$ dann gilt:*

$$|\sin z|^2 = \cosh^2 y - \cos^2 x$$

¹(Gewöhnliche Differentialgleichungen FSS2025, Kap.1.7) Schreibe die DGL $-y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x)$ als:

$$u(x) = \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix}, \quad u'(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q(x) - \lambda & 0 \end{pmatrix} u(x).$$

Das Anfangswertproblem $u'(x) = A(x)u(x)$ mit $u(0) = u_0$ besitzt eine Eindeutige Lösung. Angenommen $y(0) = y'(0) = 0$ dann löst $\begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix}$ das lineare Anfangswertproblem mit Anfangswert $u_0 = u(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Da aber auch die Nullfunktion dasselbe AWP löst würde $y \equiv 0$ folgen, dies ist ausgeschlossen da y als Eigenfunktion per Definition nicht identisch Null ist.

Beweis. Für $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned} \cosh x &:= \frac{e^x + e^{-x}}{2} && \implies \cosh^2 x = \frac{1}{4}(e^{2x} + 2 + e^{-2x}) \\ \cos x &:= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} && \implies \cos^2 x = \frac{1}{4}(e^{2ix} + 2 + e^{-2ix}) \end{aligned}$$

Sei $z = x + iy$

$$\begin{aligned} |\sin z|^2 &= \left(\frac{-i}{2} (e^{iz} - e^{-iz}) \right) \overline{\left(\frac{-i}{2} (e^{iz} - e^{-iz}) \right)} \\ &= \frac{1}{4} (e^{-y+ix} - e^{y-ix}) (e^{-y-ix} - e^{y+ix}) \\ &= \frac{1}{4} (e^{-y+ix+(-y-ix)} - e^{y-ix+(-y-ix)} - e^{-y-ix+(y-ix)} + e^{y+ix+(y-ix)}) \\ &= \frac{1}{4} (e^{-2y} - e^{-2ix} - e^{-2ix} + e^{2y}) \\ &= \frac{1}{4} (e^{-2y} + e^{2y} - (e^{-2ix} + e^{-2ix})) \\ &= \cosh^2 y - \cos^2 x \end{aligned}$$

□

2.2 Beweis von Lemma 1

Lemma 2.2 (Lemma 1). Für alle $z \in \mathbb{C}$ die $|z - n\pi| \geq \frac{\pi}{4}$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ erfüllen gilt

$$e^{|\operatorname{Im} z|} < 4|\sin z|$$

Beweis. Wir bemerken, dass $|\sin z|$ eine gerade Funktion mit Periode π ist

$$|\sin(-z + k\pi)| = |\sin(-z) \cos(k\pi) + \cos(-z) \sin(k\pi)| = |\sin(-z)| = |\sin(z)|.$$

Es reicht also die Aussage für $|z| \geq \frac{\pi}{4}$ und $\operatorname{Re} z = x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ zu zeigen. Wir betrachten jetzt die Fälle:

- $x \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$. $\cos(x)$ ist auf $[0, \frac{\pi}{2}]$ monoton fallend und es gilt

$$\cosh(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} + \dots \geq 1. \quad (1)$$

Somit folgt

$$\cos^2 x \leq \cos^2 \frac{\pi}{6} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 \leq \frac{3}{4} \cosh^2 y$$

- $x \in [0, \frac{\pi}{6}]$ Per Annahme ist $x^2 + y^2 = |z|^2 \geq \left(\frac{\pi}{4}\right)^2$, dies ist äquivalent zu

$$y^2 \geq \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 - x^2 \geq \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 - \left(\frac{\pi}{6}\right)^2 = \frac{5}{144}\pi^2 \approx 0,34 > \frac{1}{3}.$$

Da die Reihe 1 absolut konvergent ist, ist es ihr Produkt mit sich selbst auch.

$$\begin{aligned}
 \cosh^2 y &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{y^{2(n-k)}}{(2(n-k))!} \frac{y^{2k}}{(2k)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{y^{2n}}{(2(n-k))!(2k)!} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} y^{2n} \sum_{k=0}^n \frac{1}{(2(n-k))!(2k)!} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} y^{2n} \frac{1}{(2n)!} \sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} y^{2n} \frac{1}{(2n)!} \sum_{\substack{l=0 \\ l \text{ gerade}}}^{2n} \binom{2n}{l} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} y^{2n} \frac{2^{2n-1}}{(2n)!}
 \end{aligned}$$

Dabei wurde in der dritten Zeile die Identität $\binom{2n}{2k} = \frac{(2n)!}{(2k)!(2n-2k)!}$ und in der vierten Zeile die aus dem binomischen Lehrsatz folgende Identität $\sum_{k=0}^n \binom{2n}{k} a^k b^{n-k} = \frac{1}{2} ((a+b)^n - (b-a)^n)$ verwendet. Insbesondere haben wir also die Abschätzung

$$\cosh^2 y = 1 + y^2 + \frac{1}{3}y^4 + \frac{2}{45}y^6 + \dots \geq 1 + y^2 > \frac{4}{3} \geq \frac{4}{3} \cos^2 x,$$

und es gilt wieder

$$\frac{3}{4} \cosh^2 y \geq \cos^2 x.$$

In beiden Fällen folgt:

$$|\sin z|^2 \stackrel{2.1}{=} \cosh^2 y - \cos^2 x \geq \frac{1}{4} \cosh^2 y = \frac{1}{16} (e^{2y} + 2 + e^{-2y}) > \frac{1}{16} e^{2|y|}.$$

Wurzelziehen und Multiplikation mit 4 liefert den gewünschten Ausdruck

$$e^{|y|} < 4|\sin z|.$$

□

3 The Counting Lemma

3.1 Der Satz von Rouché

Wir präsentieren den Satz hier in vereinfachter Version:

Theorem 3.1. *Seien $f, g : G \rightarrow \mathbb{C}$ auf einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ holomorph und sei γ eine einfache geschlossene Kurve. Wenn für alle z aus dem Bild von γ gilt*

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)|,$$

dann haben f und g , gezählt mit Vielfachheiten, gleich viele Nullstellen in der von γ eingeschlossenen Region.

Eine einfach geschlossene Kurve ist eine geschlossene Kurve die sich nicht selbst schneidet (eine homöomorphe Einbettung von \mathbb{S}^1 in \mathbb{C}). Wir bemerken das die von γ eingeschlossene Region wegen des Jordanschen Kurvensatz beschränkt ist. Die Bedingung $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$ impliziert, dass f und g keine Nullstellen im Bild von γ haben.

Ein Beweis findet sich in Busam, R., Freitag, E.: Funktionentheorie 1.

3.2 The Counting Lemma

Lemma 3.2 (The Counting Lemma). *Sei $q \in L_{\mathbb{C}}^2$ und $2e^{\|q\|} < N \in \mathbb{N}$. Dann besitzt $y_2(1, \lambda, q)$ genau N Nullstellen, gezählt mit Vielfachheiten, in der offenen Halbebene*

$$\operatorname{Re}\lambda < \left(N + \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2,$$

und für jedes $n > N$ genau eine einfache Nullstelle in der Region

$$|\sqrt{\lambda} - n\pi| < \frac{\pi}{2},$$

und es gibt keine weiteren Nullstellen.

Beweis. Unser Ziel ist es den Satz von Rouché für y_2 und $\frac{\sin \sqrt{z}}{\sqrt{z}}$ auf geeigneten Konturen zu verwenden. Aus Kapitel 1 (Seite 10 *Analytic Properties*) wissen wir, dass y_2 eine ganze Funktion (holomorph auf ganz \mathbb{C}) ist. Wegen

$$\frac{\sin \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (\sqrt{\lambda})^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (\sqrt{\lambda})^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (\lambda)^n$$

ist auch $\frac{\sin \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}}$ eine ganze Funktion.

Seien $2e^{\|q\|} < N < K$ mit $N, K \in \mathbb{N}$, betrachte die Konturen

$$\begin{aligned} |\sqrt{\lambda}| &= \left(K + \frac{1}{2}\right)\pi, \\ \operatorname{Re}\sqrt{\lambda} &= \left(N + \frac{1}{2}\right)\pi, \\ |\sqrt{\lambda} - n\pi| &= \frac{\pi}{2} \quad \text{für } n > N. \end{aligned}$$

Wir wollen zeigen, dass $|z - k\pi| \geq \frac{\pi}{4}$ mit $k \in \mathbb{Z}$ auf allen Konturen gilt.

1. Sei $\operatorname{Re}\sqrt{\lambda} = \left(N + \frac{1}{2}\right)\pi$

$$\begin{aligned} |\sqrt{\lambda} - k\pi| &= \sqrt{(\operatorname{Re}\sqrt{\lambda} - k\pi)^2 + (\operatorname{Im}\sqrt{\lambda})^2} \geq \sqrt{(\operatorname{Re}\sqrt{\lambda} - k\pi)^2} \\ &= \left|\left(N + \frac{1}{2}\right)\pi - k\pi\right| = \left|N - k + \frac{1}{2}\right|\pi \geq \frac{\pi}{2} > \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

2. Sei $|\sqrt{\lambda}| = \left(K + \frac{1}{2}\right)\pi$

$$|\sqrt{\lambda} - k\pi| \geq \left| |\sqrt{\lambda}| - k\pi \right| = \left| \left(K + \frac{1}{2}\right)\pi - k\pi \right| = \left|K - k + \frac{1}{2}\right|\pi \geq \frac{\pi}{2} > \frac{\pi}{4}$$

3. Sei $|\sqrt{\lambda} - n\pi| = \frac{\pi}{2}$

$$|\sqrt{\lambda} - k\pi| = |\sqrt{\lambda} - n\pi + (n - k)\pi| \geq ||\sqrt{\lambda} - n\pi| + |n - k|\pi| = \left|\frac{\pi}{2} - |n - k|\pi\right| \geq \frac{\pi}{2} > \frac{\pi}{4}$$

Somit ist Lemma 1 auf allen Konturen anwendbar, wir erhalten also die Abschätzung

$$e^{|\operatorname{Im}z|} < 4|\sin z|.$$

Wir erinnern an die Basic Estimates für y_2 :

$$\left| y_2(x, \lambda, q) - \frac{\sin \sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}} \right| \leq \frac{1}{|\lambda|} \exp(|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}|x + \|q\|\sqrt{x})$$

Somit folgt also:

$$\begin{aligned} \left| y_2(1, \lambda, q) - \frac{\sin \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} \right| &\leq \frac{1}{|\lambda|} e^{\|q\|} e^{|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}|} \\ &< \frac{e^{\|q\|}}{|\lambda|} 4|\sin \sqrt{\lambda}| = \frac{4e^{\|q\|}}{\sqrt{|\lambda|}} \frac{|\sin \sqrt{\lambda}|}{\sqrt{|\lambda|}} \\ &< \frac{2N}{\sqrt{|\lambda|}} \left| \frac{\sin \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} \right| \end{aligned}$$

Wobei in der letzten Zeile $N > 2e^{\|q\|}$ und $\sqrt{|z|} = |\sqrt{z}|$ verwendet wurden. Es bleibt also zu zeigen, dass $\frac{2N}{\sqrt{|\lambda|}} \leq 1$ ist, wir prüfen die Bedingung wieder auf allen Konturen.

1. Sei $\operatorname{Re}\sqrt{\lambda} = (N + \frac{1}{2})\pi$ dann ist $|\sqrt{\lambda}| \geq (N + \frac{1}{2})\pi$

$$\frac{2N}{|\sqrt{\lambda}|} \leq \frac{2N}{(N + \frac{1}{2})\pi} < \frac{2N}{N\pi} < 1.$$

2. Sei $|\sqrt{\lambda}| = (K + \frac{1}{2})\pi$ wobei $K > N$.

$$\frac{2N}{|\sqrt{\lambda}|} \leq \frac{2N}{(K + \frac{1}{2})\pi} < \frac{2N}{N\pi} < 1.$$

3. Sei $|\sqrt{\lambda} - n\pi| = \frac{\pi}{2}$ also ist $\frac{\pi}{2} = |\sqrt{\lambda} - n\pi| \geq ||\sqrt{\lambda}| - n\pi| \geq |\sqrt{\lambda}| - n\pi \Leftrightarrow |\sqrt{\lambda}| \geq (n - \frac{1}{2})\pi$

$$\frac{2N}{|\sqrt{\lambda}|} \leq \frac{2N}{(N + \frac{1}{2})\pi} < \frac{2N}{N\pi} < 1.$$

Es sind also alle Voraussetzungen für den Satz von Rouché erfüllt und y_2 und $\frac{\sin \sqrt{z}}{\sqrt{z}}$ haben gleich viele Nullstellen in diesen Regionen.

$\frac{\sin \sqrt{z}}{\sqrt{z}}$ hat nur einfache Nullstellen bei $\lambda = k^2 \pi^2$, $k \in \mathbb{N}$. Somit hat y_2

$$K \text{ Nullstellen in } |\sqrt{\lambda}| \leq (K + \frac{1}{2})\pi, \quad K > N$$

$$1 \text{ Nullstelle in } |\sqrt{\lambda} - n\pi| \leq \frac{\pi}{2}, \quad n > N$$

Für $K = N + 1$ hat y_2 also $N + 1$ Nullstellen in dem großen Kreis (oranger Kreis in Abbildung 1). In dem großen Kreis haben wir aber keine Kontrolle über die Vielfachheiten. Wir wollen also noch die erste Nullstelle in den eiförmigen Regionen, von denen wir wissen, dass y_2 nur eine einfache Nullstelle besitzt, „ausscheiden“. Dazu bemerken wir, dass die Bedingungen für den Satz von Rouché auf der lila Kontur in Abbildung 2 gelten und $\frac{\sin \sqrt{z}}{\sqrt{z}}$ dort auch nur eine Nullstelle besitzt. Somit wissen wir, dass y_2 N Nullstellen, gezählt mit Vielfachheiten, in dem orangenen Kreis minus der lila sichelförmigen Region hat.

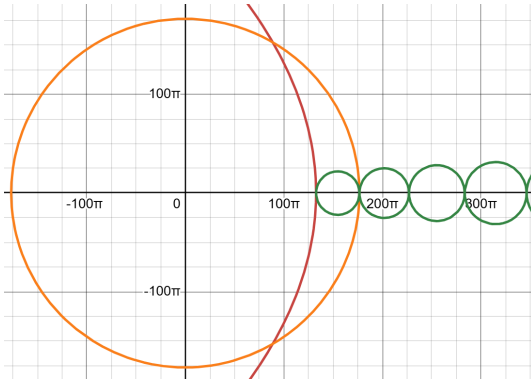


Abbildung 1: $K = N + 1$

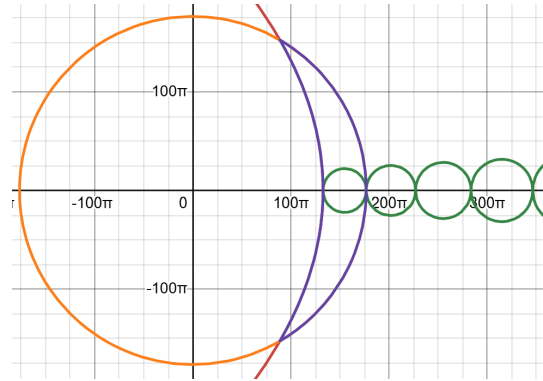


Abbildung 2: Gute Nullstelle

Lassen wir nun $K \in \mathbb{N}$ immer größer werden, bekommen wir immer eine weitere Nullstelle; weiterhin muss sie sich in der nächsten Eier-förmigen Region befinden (illustrativ Abbildung 3), somit gibt es außerhalb dieser keine weiteren Nullstellen.

Insbesondere hat y_2 also N Nullstellen links der Kontur $\text{Re}\sqrt{\lambda} = (N + \frac{1}{2})\pi$ (rote Parabel in Abbildung 4) und genau eine Nullstelle in den Regionen $|\sqrt{\lambda} - n\pi| < \frac{\pi}{2}$ für $n > N$ (grüne eiförmige Regionen in Abbildung 4). Die im Satz geforderte Aussage ist noch etwas schwächer, die Nullstellen sollen sich nur links der Geraden $\text{Re}\lambda = (N + \frac{1}{2})^2 \pi^2$ (lila Gerade in Abbildung 4) befinden.

Sei $\lambda = \omega^2$ und $x + iy = \omega = \text{Re}\sqrt{\lambda} + i \text{Im}\sqrt{\lambda}$, dann ist $\omega^2 = x^2 - y^2 + i2xy$ also folgt

$$\text{Re}\lambda = \text{Re}\omega^2 = x^2 - y^2 \leq x^2 = (\text{Re}\sqrt{\lambda})^2 < \left(\left(N + \frac{1}{2} \right) \pi \right)^2 = \left(N + \frac{1}{2} \right)^2 \pi^2.$$

Das heißt die N Nullstellen liegen wirklich in der offenen Halbebene

$$\text{Re}\lambda < \left(N + \frac{1}{2} \right)^2 \pi^2,$$

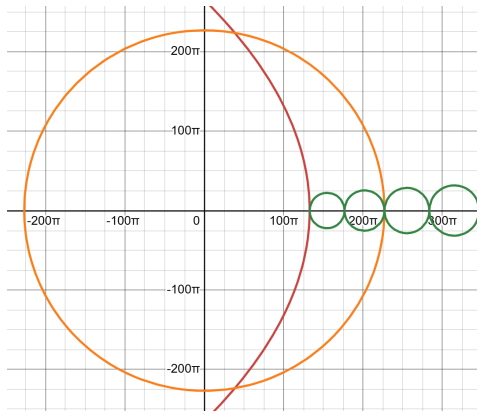


Abbildung 3: $K = N + 2$

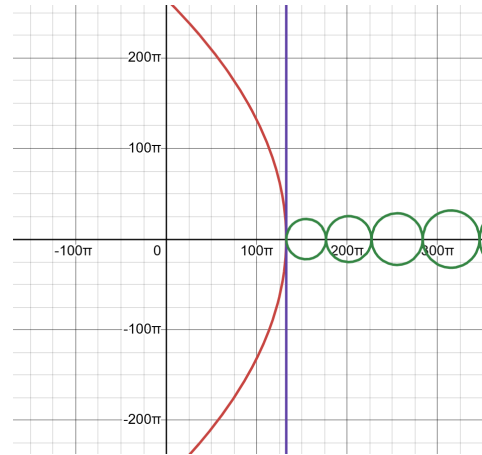


Abbildung 4: Aussage des Satzes

□

Die Grafiken wurden in Desmos erstellt; für ein q mit $\|q\| \leq 1$ und somit $N = 6$.

4 Theorem 1

Sei q nun eine reellwertige Funktion.

Theorem 4.1. *Das Dirichlet-Spektrum von q in $L^2_{\mathbb{C}}$ ist eine nach oben unbeschränkte und nach unten beschränkte Folge reeller Zahlen.*

Beweis. Wegen des Counting Lemmas und Satz 1.4 wissen wir, dass das Spektrum aus einer endlichen Menge an Eigenwerten mit Abstand kleiner $(N + \frac{3}{2})\pi$ und unendlich vielen Eigenwerten, die jeweils in einer der Regionen $|\sqrt{\lambda} - n\pi| \leq \frac{\pi}{2}$ für $n > N$ liegen. Wir müssen also nur zeigen, dass das Spektrum reell ist.

Sei also λ ein Dirichlet Eigenwert von q mit Eigenfunktion y d.h.

$$-y'' + qy = \lambda y. \quad (2)$$

Da q reellwertig ist, erhalten wir durch Konjugation

$$-\bar{y}'' + q\bar{y} = \bar{\lambda}\bar{y} \quad (3)$$

\bar{y} mal (2) minus y mal (3) liefert

$$y\bar{y}'' - y''\bar{y} = (\lambda - \bar{\lambda})|y|^2.$$

Wir erinnern zurück an die Wronski-Determinante (*Wronksian Kapitel 1 Seite 11*)

$$[f, g] = fg' - f'g.$$

Somit ist

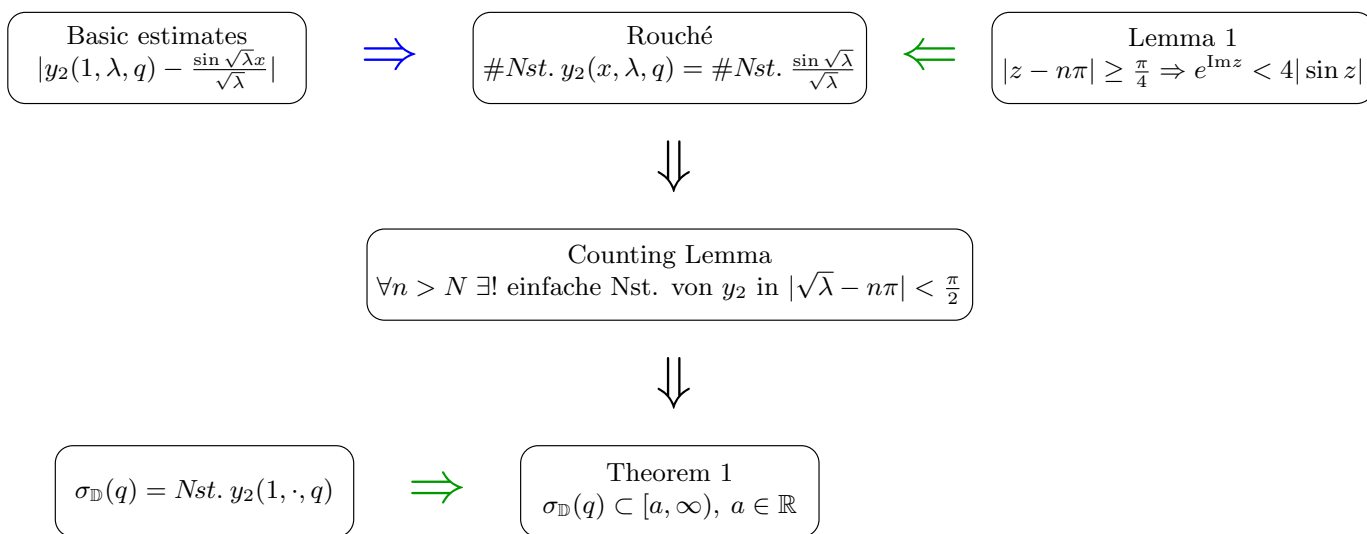
$$[y, \bar{y}]' = (y\bar{y}' - y'\bar{y})' = (y'\bar{y}' + y\bar{y}''') - (y''\bar{y} + y'\bar{y}') = y\bar{y}'' - y''\bar{y} = (\lambda - \bar{\lambda})|y|^2.$$

Wegen den Randwertbedingungen ist $[y, \bar{y}]_0^1 = 0$. Integrieren liefert daher

$$0 = [y, \bar{y}]_0^1 = (\lambda - \bar{\lambda}) \int_0^1 |y|^2 dx$$

Da y eine Eigenfunktion ist kann das integral nicht verschwinden, somit muss $\lambda = \bar{\lambda}$ sein, also ist insbesondere λ reell. □

4.1 Logischer Zusammenhang der Aussagen



5 Literatur

- J. Pöschel, E. Trubowitz: *Inverse Spectral Theory*, Academic Press, 1996
- R. Busam, E. Freitag: *Funktionentheorie 1*, Springer, 2006
- M. U. Schmidt: *Dynamische Systeme/Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Vorlesungsskript, Mannheim, FSS25.