

Universität Mannheim
Fakultät für Wirtschaftsinformatik und Wirtschaftsmathematik

Bachelorarbeit

Reelle algebraisch- geometrische Potentiale

vorgelegt von

Nikola Schweizer

Matrikelnummer:	2018214
Semester:	6. Fachsemester
Betreuer:	Professor Martin Schmidt
Abgabedatum:	18.08.2026

Eidesstattliche Versicherung

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und ohne fremde Hilfe angefertigt habe. Alle Stellen, die wörtlich oder sinngemäß aus veröffentlichten oder unveröffentlichten Quellen entnommen wurden, sind als solche kenntlich gemacht. Ich versichere außerdem, dass die Arbeit weder vollständig noch in wesentlichen Teilen bereits zu einem früheren Zeitpunkt oder an anderer Stelle als Prüfungsleistung vorgelegt wurde. Alle verwendeten Quellen, einschließlich der Sekundärliteratur, elektronischer Ressourcen, graphischer Darstellungen und Bilder, sind vollständig und korrekt in der Bibliographie angegeben.

Ich bin ferner damit einverstanden, dass meine Arbeit zum Zwecke eines Plagiatsabgleichs in elektronischer Form anonymisiert gespeichert und übermittelt wird. Mir ist bekannt, dass bei fehlender oder unrichtiger Abgabe dieser Erklärung die Prüfungsleistung mit „nicht ausreichend“ bewertet werden kann.

Ort, Datum

Unterschrift

Anmerkung

Bei der Erstellung dieser Arbeit wurden KI-basierte Werkzeuge unterstützend für sprachliche Überarbeitungen sowie zur Diskussion mathematischer Formulierungen und Argumentationsansätze verwendet.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	4
2	Satz 1: Konstruktion der Polynomtripel	6
2.1	Konstruktion und Eindeutigkeit	6
2.2	Beispiele	9
3	Satz 2: Reelle Spektraldaten	12
3.1	Reelle Daten und Lage der Nullstellen	13
3.2	Verteilung der Nullstellen von β	14
3.3	Diffeomorphismus auf eine kompakte Zusammenhangskomponente . . .	19
4	Satz 3: Globale Lösbarkeit des Anfangswertproblems	31
5	Zusammenfassung	39
	Literaturverzeichnis	40

1 Einleitung

Die vorliegende Arbeit steht im Zusammenhang mit algebraisch-geometrischen Lösungen des eindimensionalen Schrödingerproblems [2]. Für ein glattes reelles oder komplexes Potential q auf einem offenen Intervall $I \subset \mathbb{R}$ wird der Schrödingeroperator

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x)$$

mit der zugehörigen Eigenwertgleichung

$$-y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x)$$

betrachtet. Durch Ordnungsreduktion lässt sich diese Gleichung als System erster Ordnung schreiben. Aus $y'' = (q(x) - \lambda)y$ folgt

$$\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q(x) - \lambda & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}.$$

Im algebraisch-geometrischen Ansatz betrachtet man spurlose 2×2 -matrixwertige Funktionen $\xi(x, \lambda)$, welche die zugehörige Laxgleichung erfüllen. Für Potentiale von endlichem Typ können die Einträge von ξ polynomial in der Spektralvariablen λ gewählt werden [4, Remark 1.7]. Dadurch lässt sich das Problem auf endlich viele algebraische Daten zurückführen.

Ausgehend von dieser endlichdimensionalen Beschreibung wird im Folgenden insbesondere der reelle Fall untersucht. Da die Determinante von ξ entlang der Laxgleichung erhalten bleibt, fixieren wir ein normiertes komplexes Polynom

$$a(\lambda) = \prod_{n=0}^{2N} (\lambda - a_n)$$

vom ungeraden Grad $2N + 1$ und betrachten spurlose matrixwertige Polynome

$$\xi(\lambda) = \begin{pmatrix} \alpha(\lambda) & \beta(\lambda) \\ \gamma(\lambda) & -\alpha(\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{N-1} \alpha_n \lambda^n & \sum_{n=0}^N \beta_n \lambda^n \\ \sum_{n=0}^{N+1} \gamma_n \lambda^n & -\sum_{n=0}^{N-1} \alpha_n \lambda^n \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Dabei gelten für die Leitkoeffizienten $\beta_N = 1$ und $\gamma_{N+1} = -1$.

Für diese Matrizen wird

$$\det \xi(\lambda) = a(\lambda)$$

gefordert. Da

$$\det \xi = -\alpha^2 - \beta\gamma,$$

ist diese Bedingung äquivalent zu

$$\alpha^2 + \beta\gamma = -a$$

und bildet den zentralen algebraischen Ausgangspunkt der Arbeit.

Im ersten Schritt wird gezeigt, dass die betrachteten Polynomtripel durch endlich viele Spektraldaten eindeutig bestimmt werden. Dazu werden paarweise verschiedene Nullstellen $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ von β und die zugehörigen Werte

$$\nu_n = \alpha(\lambda_n)$$

betrachtet, welche

$$\nu_n^2 = -a(\lambda_n)$$

erfüllen und das Tripel (α, β, γ) eindeutig bestimmen.

Anschließend wird diese Konstruktion auf den reellen Fall übertragen. Für ein reelles Polynom a mit paarweise verschiedenen reellen Nullstellen werden die möglichen Lagen der λ_n bestimmt und die Menge der zulässigen reellen Spektraldaten geometrisch untersucht. Insbesondere wird gezeigt, dass die relevante Datenmenge eine kompakte N -dimensionale Untermannigfaltigkeit bildet und durch die Rekonstruktionsabbildung diffeomorph auf eine kompakte Zusammenhangskomponente der entsprechenden Menge reeller Polynomtripel abgebildet wird.

Im letzten Schritt wird die zugehörige autonome Differentialgleichung betrachtet. Für ein Polynomtripel ξ der Form (1) wird

$$q(\xi) = \gamma_N + \beta_{N-1}$$

definiert. Die daraus entstehende Laxgleichung erhält die vorgegebenen Gradbedingungen, die Determinante und im reellen Fall die Realität der Koeffizienten. Für Anfangswerte in der zuvor beschriebenen kompakten Zusammenhangskomponente wird daraus die globale Existenz der Lösung für alle $x \in \mathbb{R}$ gefolgert.

Damit verbinden die drei Hauptresultate der Arbeit die algebraische Rekonstruktion aus Spektraldaten, die geometrische Beschreibung des reellen Lösungsraums und die Dynamik der zugehörigen Differentialgleichung.

Die Formulierung der drei Sätze folgt der Themenstellung [6].

2 Satz 1: Konstruktion der Polynomtripel

2.1 Konstruktion und Eindeutigkeit

Satz 1. Für $N \in \mathbb{N}_0$ und $a_0, \dots, a_{2N} \in \mathbb{C}$ sei $a(\lambda) = \prod_{n=0}^{2N} (\lambda - a_n)$. Dann gibt es zu N paarweise verschiedenen $\lambda_1, \dots, \lambda_N \in \mathbb{C}$ und dazugehörigen Lösungen $\nu_1, \dots, \nu_N$ von $\nu_n^2 = -a(\lambda_n)$ für $n = 1, \dots, N$ eindeutig bestimmte Polynome $\beta(\lambda) = \prod_{n=1}^N (\lambda - \lambda_n)$, α und $\gamma \in \mathbb{C}[\lambda]$ vom Grad $\deg \alpha < N$ und $\deg \gamma = N + 1$, so dass $\alpha(\lambda_n) = \nu_n$ für alle $n = 1, \dots, N$ und $\alpha^2 + \beta\gamma = -a$ gilt.

Satz 1 liefert die grundlegende Konstruktion der in dieser Arbeit betrachteten Matrixpolynome zunächst im komplexen Fall. Gegeben sind das Polynom a mit den Nullstellen $a_0, \dots, a_{2N}$ sowie Daten $(\lambda_1, \nu_1), \dots, (\lambda_N, \nu_N)$ mit paarweise verschiedenen $\lambda_n \in \mathbb{C}$ und

$$\nu_n^2 = -a(\lambda_n), \quad n = 1, \dots, N.$$

Zu zeigen ist, dass sich daraus eindeutig bestimmte Polynome $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}[\lambda]$ konstruieren lassen, welche die geforderten Gradbedingungen sowie

$$\alpha^2 + \beta\gamma = -a$$

erfüllen. Für den Beweis wird zunächst das Polynom β durch seine vorgegebenen Nullstellen bestimmt und α mithilfe der Interpolation der Daten (λ_n, ν_n) konstruiert. Aus der Beziehung $\alpha^2 + \beta\gamma = -a$ ergibt sich anschließend das Polynom γ .

Abschließend wird die Eindeutigkeit der Konstruktion gezeigt.

Beweis. Zunächst betrachten wir das Polynom β . Da seine paarweise verschiedenen Nullstellen $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ vorgegeben sind und β normiert sein soll, ist es eindeutig durch

$$\beta(\lambda) = \prod_{n=1}^N (\lambda - \lambda_n)$$

bestimmt. Für die Konstruktion von α betrachten wir die Beziehung

$$\alpha^2 + \beta\gamma = -a$$

an den Nullstellen von β . Für jedes $n = 1, \dots, N$ gilt $\beta(\lambda_n) = 0$, sodass

$$\alpha(\lambda_n)^2 = -a(\lambda_n)$$

folgt. Wir fordern daher

$$\alpha(\lambda_n) = \nu_n, \quad n = 1, \dots, N.$$

Gesucht ist somit ein Polynom α vom Grad höchstens $N - 1$, das diese Interpolationsbedingungen erfüllt. Hierzu definieren wir die Lagrange-Basispolynome

$$L_n(\lambda) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^N \frac{\lambda - \lambda_k}{\lambda_n - \lambda_k}, \quad n = 1, \dots, N.$$

Diese sind wohldefiniert, da die λ_n paarweise verschieden sind und erfüllen

$$L_n(\lambda_m) = \begin{cases} 1, & m = n, \\ 0, & m \neq n. \end{cases}$$

Da jedes Basispolynom L_n Grad höchstens $N - 1$ besitzt, wird durch

$$\alpha(\lambda) = \sum_{n=1}^N \nu_n L_n(\lambda)$$

ein Polynom vom Grad höchstens $N - 1$ definiert, das an den Stellen λ_n die vorgegebenen Werte ν_n annimmt.

Für die weitere Rechnung ist es zweckmäßig, die Basispolynome mithilfe von β darzustellen. Wegen $\beta(\lambda) = \prod_{k=1}^N (\lambda - \lambda_k)$ gilt zunächst

$$\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^N (\lambda - \lambda_k) = \frac{\beta(\lambda)}{\lambda - \lambda_n}.$$

Aus der Produktregel folgt für die Ableitung von β nach λ

$$\beta'(\lambda) = \sum_{j=1}^N \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N (\lambda - \lambda_k).$$

Setzt man $\lambda = \lambda_n$, so verschwinden alle Summanden mit $j \neq n$, sodass

$$\beta'(\lambda_n) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^N (\lambda_n - \lambda_k).$$

Da die λ_n paarweise verschieden sind, gilt $\beta'(\lambda_n) \neq 0$. Damit lassen sich die Basispolynome in der Form

$$L_n(\lambda) = \frac{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^N (\lambda - \lambda_k)}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^N (\lambda_n - \lambda_k)} = \frac{\beta(\lambda)}{(\lambda - \lambda_n) \beta'(\lambda_n)}$$

schreiben. Folglich erhält man für α die Darstellung

$$\alpha(\lambda) = \sum_{n=1}^N \nu_n \frac{\beta(\lambda)}{(\lambda - \lambda_n) \beta'(\lambda_n)}. \quad (2)$$

Es bleibt, das Polynom γ zu bestimmen. Nach Voraussetzung sollen α , β und γ die Beziehung $\alpha(\lambda)^2 + \beta(\lambda)\gamma(\lambda) = -a(\lambda)$ erfüllen. Wir definieren daher

$$\gamma(\lambda) := -\frac{\alpha(\lambda)^2 + a(\lambda)}{\beta(\lambda)} \quad (3)$$

und zeigen zunächst, dass dieser Quotient tatsächlich ein Polynom liefert.

Aus $\alpha(\lambda_n) = \nu_n$ und $\nu_n^2 = -a(\lambda_n)$ folgt

$$\alpha(\lambda_n)^2 + a(\lambda_n) = 0, \quad n = 1, \dots, N.$$

Damit sind $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ paarweise verschiedene Nullstellen des Polynoms $\alpha^2 + a$. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra enthält dessen Linearfaktorzerlegung daher die Faktoren

$$(\lambda - \lambda_1), \dots, (\lambda - \lambda_N).$$

Folglich ist

$$\beta(\lambda) = \prod_{n=1}^N (\lambda - \lambda_n)$$

ein Teiler von $\alpha^2 + a$. Es existiert also ein Polynom $r \in \mathbb{C}[\lambda]$ mit

$$\alpha^2 + a = \beta r.$$

Damit gilt

$$\gamma = -\frac{\alpha^2 + a}{\beta} = -r \in \mathbb{C}[\lambda].$$

Somit ist gezeigt, dass die Definition von γ tatsächlich ein Polynom liefert. Es bleibt zu überprüfen, dass γ die geforderte Gradbedingung erfüllt. Zugleich bestimmen wir den Leitkoeffizienten von γ . Wegen $\deg \alpha \leq N - 1$ gilt

$$\deg(\alpha^2) \leq 2N - 2.$$

Da a den Grad $2N + 1$ besitzt, wird der höchste Term von $\alpha^2 + a$ allein durch a bestimmt. Somit gilt

$$\deg(\alpha^2 + a) = 2N + 1.$$

Mit $\deg \beta = N$ folgt daraus

$$\deg \gamma = \deg(\alpha^2 + a) - \deg \beta = N + 1.$$

Da a normiert ist, besitzt $\alpha^2 + a$ den führenden Koeffizienten 1. Zusammen mit der Normierung von β und dem Minuszeichen in (3) folgt daraus, dass γ den Leitkoeffizienten -1 besitzt. Diese Eigenschaft wird in Satz 1 nicht explizit vorausgesetzt, sondern ergibt sich direkt aus der Konstruktion. Insbesondere erfüllen die konstruierten Tripel wegen $\beta_N = 1$ und $\gamma_{N+1} = -1$ genau die in (1) an ξ gestellten Bedingungen.

Zum Schluss zeigen wir die Eindeutigkeit des Polynomtripels.

Sei $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma})$ eine weitere Lösung zu denselben Daten $((\lambda_1, \nu_1), \dots, (\lambda_N, \nu_N))$. Aufgrund der vorgegebenen Nullstellen und des normierten führenden Koeffizienten gilt zunächst $\tilde{\beta} = \beta$. Da sowohl α als auch $\tilde{\alpha}$ Grad höchstens $N - 1$ besitzen und an den N paarweise verschiedenen Stellen $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ dieselben Werte $\nu_1, \dots, \nu_N$ annehmen, besitzt das Polynom $\tilde{\alpha} - \alpha$ die N verschiedenen Nullstellen $\lambda_1, \dots, \lambda_N$. Wegen $\deg(\tilde{\alpha} - \alpha) \leq N - 1$ folgt daraus $\tilde{\alpha} - \alpha = 0$, also $\tilde{\alpha} = \alpha$. Schließlich erhält man

$$\tilde{\gamma} = -\frac{\tilde{\alpha}^2 + a}{\tilde{\beta}} = -\frac{\alpha^2 + a}{\beta} = \gamma,$$

womit auch γ eindeutig bestimmt ist.

Damit sind die Polynome α , β und γ durch die vorgegebenen Spektraldaten (λ_n, ν_n) eindeutig bestimmt und besitzen die in Satz 1 geforderten Eigenschaften. $\square$

2.2 Beispiele

Zur Veranschaulichung der Konstruktion aus Satz 1 betrachten wir die Fälle $N = 1$ und $N = 2$. Der Fall $N = 1$ ist algebraisch besonders einfach und erlaubt zugleich eine anschauliche geometrische Einordnung der zugehörigen reellen Spektraldaten. Für $N = 2$ tritt erstmals die Interpolation aus Satz 1 in Erscheinung.

Beispiel 1 (Fall $N = 1$). Für $N = 1$ besitzt das Polynom a den Grad 3 und hat die Darstellung

$$a(\lambda) = \prod_{n=0}^2 (\lambda - a_n).$$

Zu einem gegebenen Datenpaar $(\lambda_1, \nu_1) \in \mathbb{C}^2$ mit $\nu_1^2 = -a(\lambda_1)$ sollen die zugehörigen Polynome α , β und γ bestimmt werden.

Da β normiert ist und λ_1 als Nullstelle besitzt, folgt unmittelbar

$$\beta(\lambda) = \lambda - \lambda_1.$$

Für α gilt die Gradbedingung $\deg \alpha \leq N - 1 = 0$, sodass α konstant ist. Aus der Interpolationsbedingung $\alpha(\lambda_1) = \nu_1$ ergibt sich direkt

$$\alpha(\lambda) = \nu_1.$$

Das Polynom γ wird durch die Identität $\alpha^2 + \beta\gamma = -a$ bestimmt. Durch Einsetzen der bereits bestimmten Polynome erhält man

$$\gamma(\lambda) = -\frac{\nu_1^2 + a(\lambda)}{\lambda - \lambda_1}.$$

Wegen $\nu_1^2 = -a(\lambda_1)$ verschwindet der Zähler an der Stelle λ_1 und ist daher durch $\lambda - \lambda_1$ teilbar. Somit ist γ ein Polynom vom Grad 2 mit führendem Koeffizienten -1 .

Insgesamt erhält man für das Datenpaar (λ_1, ν_1) die Polynome

$$\alpha(\lambda) = \nu_1, \quad \beta(\lambda) = \lambda - \lambda_1, \quad \gamma(\lambda) = -\frac{\nu_1^2 + a(\lambda)}{\lambda - \lambda_1}.$$

Bemerkung 1. Für $N = 1$ besitzt a den Grad 3. Unter der zusätzlichen Voraussetzung $a_0 < a_1 < a_2$ hat die Gleichung

$$\nu^2 = -a(\lambda)$$

die Standardform einer elliptischen Kurve, vergleiche [7, Kapitel III].

Für $\lambda \in [a_1, a_2]$ bestehen die reellen Spektraldaten aus den beiden Zweigen

$$\nu = \pm \sqrt{-a(\lambda)},$$

die sich in den Punkten $(a_1, 0)$ und $(a_2, 0)$ treffen. Sie bilden somit eine geschlossene, ovale Kurve, die topologisch einem Kreis entspricht. Gerade im Fall $N = 1$ lässt sich die geometrische Struktur der reellen Spektraldaten damit besonders anschaulich erkennen. Im folgenden Kapitel wird diese Struktur genauer untersucht und über die Rekonstruktionsabbildung mit den entsprechenden Polynomtripeln in Beziehung gesetzt.

Beispiel 2 (Fall $N = 2$). Für $N = 2$ besitzt das Polynom

$$a(\lambda) = \prod_{k=0}^4 (\lambda - a_k)$$

den Grad 5. Gegeben seien die Datenpaare $(\lambda_1, \nu_1), (\lambda_2, \nu_2) \in \mathbb{C}^2$ mit paarweise ver-

schiedenen λ_1, λ_2 und $\nu_i^2 = -a(\lambda_i)$ für $i = 1, 2$.

Zunächst ergibt sich für das Polynom β

$$\beta(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2).$$

Da $\deg \alpha \leq 1$ gilt, wird α mithilfe der in Satz 1 hergeleiteten Interpolationsformel bestimmt. Es gilt

$$\alpha(\lambda) = \nu_1 \frac{\beta(\lambda)}{(\lambda - \lambda_1) \beta'(\lambda_1)} + \nu_2 \frac{\beta(\lambda)}{(\lambda - \lambda_2) \beta'(\lambda_2)}.$$

Mit $\beta'(\lambda_1) = \lambda_1 - \lambda_2$ und $\beta'(\lambda_2) = \lambda_2 - \lambda_1$ vereinfacht sich dies zu

$$\alpha(\lambda) = \nu_1 \frac{\lambda - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} + \nu_2 \frac{\lambda - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

Die Interpolationsformel aus Satz 1 liefert in diesem Fall also die eindeutig bestimmte Gerade durch die beiden Punkte (λ_1, ν_1) und (λ_2, ν_2) .

Anschließend erhalten wir γ

$$\gamma(\lambda) = -\frac{\alpha(\lambda)^2 + a(\lambda)}{(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)}.$$

Aufgrund der Interpolationsbedingungen $\alpha(\lambda_i) = \nu_i$ für $i = 1, 2$ ist der Zähler auch hier durch $(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$ teilbar. Damit zeigt sich erneut unmittelbar das im Beweis verwendete Faktorisierungsargument. Folglich ist γ ein Polynom vom Grad 3 mit führendem Koeffizienten -1 .

3 Satz 2: Reelle Spektraldaten

Satz 2. Wenn im Satz 1 $a_0 < a_1 < \dots < a_{2N}$, $\lambda_1 < \dots < \lambda_N$ und $\nu_1, \dots, \nu_N$ reell sind, dann liegen die entsprechenden (α, β, γ) in $(\mathbb{R}[\lambda])^3$ und alle λ_n in $(-\infty, a_0] \cup [a_1, a_2] \cup \dots \cup [a_{2N-1}, a_{2N}]$.

Für solche $a_0 < a_1 < \dots < a_{2N}$, $\lambda_1 < \dots < \lambda_N$ und $\nu_1, \dots, \nu_N$ gibt es genau dann eine stetige Abbildung $s \in [0, 1] \mapsto (\mathbb{R}[\lambda])^3$, $s \mapsto (\alpha_s, \beta_s, \gamma_s)$ auf solchen Daten entsprechenden Tripeln mit $\det \xi_s(\lambda) = a(\lambda) = \prod_{n=0}^{2N} (\lambda - a_n)$, so dass $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ diesen $\lambda_1 < \dots < \lambda_N$ und $\nu_1, \dots, \nu_N$ entspricht und $(\alpha_s, \beta_s, \gamma_s)$ für $s \uparrow 1$ unbeschränkt ist, wenn entweder $(-\infty, a_0]$ mindestens ein λ_n enthält oder $[a_{2n-1}, a_{2n}]$ für ein $n = 1, \dots, N$ mehrere der entsprechenden λ_n enthält.

Für solche $a_0 < a_1 < \dots < a_{2N}$ und $a(\lambda) = \prod_{n=0}^{2N} (\lambda - a_n)$ ist die entsprechende Abbildung

$$\left\{ \left((\lambda_1, \nu_1), \dots, (\lambda_N, \nu_N) \right) \in (\mathbb{R}^2)^N \mid \lambda_n \in [a_{2n-1}, a_{2n}] \text{ und } \nu_n^2 = -a(\lambda_n) \text{ für } n = 1, \dots, N \right\} \quad (4)$$

$$\longrightarrow \left\{ (\alpha, \beta, \gamma) \in (\mathbb{R}[\lambda])^3 \mid \deg \alpha < N, \deg \beta = N, \beta_N = 1, \alpha^2 + \beta\gamma = -a \right\}, \quad (5)$$

$$\left((\lambda_1, \nu_1), \dots, (\lambda_N, \nu_N) \right) \longmapsto (\alpha, \beta, \gamma)$$

andererseits ein Diffeomorphismus von der kompakten N -dimensionalen Untermannigfaltigkeit (4) von $(\mathbb{R}^2)^N$ auf eine kompakte Zusammenhangskomponente von (5), die eine Untermannigfaltigkeit von $(\mathbb{R}[\lambda])^3$ bildet.

Satz 2 überträgt die Konstruktion aus Satz 1 auf den reellen Fall. Während dort beliebige komplexe Daten zugelassen waren, betrachten wir nun reelle Nullstellen $a_0 < a_1 < \dots < a_{2N}$ des Polynoms a sowie reelle Spektraldaten (λ_n, ν_n) .

Der Satz besteht aus drei Aussagen, die wir nacheinander beweisen.

Zunächst betrachten wir die Realität der Konstruktion und die Lage der Nullstellen. Unter den reellen Voraussetzungen besitzen auch die Polynome α , β und γ reelle Koeffizienten und die Nullstellen von β können nur in gewissen Teilintervallen von $\mathbb{R}$ liegen. Die zweite Aussage untersucht, welche Verteilungen der Nullstellen auf diese Teilintervalle mit einer beschränkten Familie von Polynomtripeln vereinbar sind.

Wir schließen dabei diejenigen Konfigurationen aus, bei denen sich die zugehörigen Tripel entlang einer stetigen Deformation unbeschränkt fortsetzen lassen.

Schließlich beschreibt die dritte Aussage die verbleibende Konfiguration, in der jedes Intervall $[a_{2n-1}, a_{2n}]$ genau eine Nullstelle von β enthält. In diesem Fall ist die Zuordnung der Spektraldaten zu den Polynomtripeln ein Diffeomorphismus auf eine kompakte Zusammenhangskomponente.

3.1 Reelle Daten und Lage der Nullstellen

Der Beweis der ersten Aussage gliedert sich in zwei Schritte. Zunächst zeigen wir, dass unter den reellen Voraussetzungen von Satz 2 auch die Polynome α , β und γ reelle Koeffizienten besitzen, anschließend bestimmen wir über die Vorzeichenstruktur von a die Lage der Nullstellen von β .

Beweis. Nach Satz 1 hat β die Darstellung

$$\beta(\lambda) = \prod_{n=1}^N (\lambda - \lambda_n).$$

Da nach Voraussetzung $\lambda_n \in \mathbb{R}$ für $n = 1, \dots, N$ gilt, besitzt β ausschließlich reelle Koeffizienten. Somit folgt $\beta \in \mathbb{R}[\lambda]$.

Für das Polynom α liefert die Interpolationsformel (2)

$$\alpha(\lambda) = \sum_{n=1}^N \nu_n \frac{\beta(\lambda)}{(\lambda - \lambda_n) \beta'(\lambda_n)}.$$

Da β reelle Koeffizienten besitzt, hat auch die Ableitung β' reelle Koeffizienten. Für $\lambda_n \in \mathbb{R}$ ist daher auch $\beta'(\lambda_n)$ reell. Da die Nullstellen $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ von β paarweise verschieden und damit einfach sind, ist zudem $\beta'(\lambda_n) \neq 0$. Zusammen mit $\nu_n \in \mathbb{R}$ liegt daher jeder Summand in $\mathbb{R}[\lambda]$. Folglich ist $\alpha \in \mathbb{R}[\lambda]$.

Schließlich betrachten wir die Darstellung (3)

$$\gamma = -\frac{\alpha^2 + a}{\beta}.$$

Nach den Voraussetzungen von Satz 2 besitzt das Polynom $a(\lambda) = \prod_{k=0}^{2N} (\lambda - a_k)$ ausschließlich reelle Nullstellen. Damit gilt $a \in \mathbb{R}[\lambda]$.

Da bereits $\alpha, \beta \in \mathbb{R}[\lambda]$ gezeigt wurde, liegt auch der Zähler $-(\alpha^2 + a)$ in $\mathbb{R}[\lambda]$. Nach Satz 1 ist dieser durch β teilbar. Da die Division mit Rest in $\mathbb{R}[\lambda]$ ausgeführt werden kann und in $\mathbb{C}[\lambda]$ eindeutig ist, stimmt der Quotient mit γ überein.

Somit folgt $\gamma \in \mathbb{R}[\lambda]$ und damit

$$(\alpha, \beta, \gamma) \in (\mathbb{R}[\lambda])^3.$$

Nachdem die Realität der konstruierten Polynomtripel gezeigt ist, bestimmen wir nun die mögliche Lage der Nullstellen von β .

Nach Voraussetzung gilt $\nu_n^2 = -a(\lambda_n)$ für $n = 1, \dots, N$. Da ν_n reell ist, folgt

$$-a(\lambda_n) = \nu_n^2 \geq 0,$$

also $a(\lambda_n) \leq 0$. Daher liegen alle Nullstellen λ_n des Polynoms β in der Menge

$$\{\lambda \in \mathbb{R} \mid a(\lambda) \leq 0\}.$$

Zur expliziten Bestimmung dieser Menge betrachten wir das Polynom

$$a(\lambda) = \prod_{k=0}^{2N} (\lambda - a_k).$$

Wegen $a_0 < a_1 < \dots < a_{2N}$ sind die Nullstellen $a_0, \dots, a_{2N}$ paarweise verschieden und somit einfach. Folglich wechselt a an jeder seiner Nullstellen das Vorzeichen. Da a den ungeraden Grad $2N + 1$ und den führenden Koeffizienten 1 besitzt, gilt außerdem $a(\lambda) > 0$ für hinreichend große λ , sodass a rechts der größten Nullstelle a_{2N} positiv ist. Durchläuft man die Nullstellen in absteigender Reihenfolge, ergibt sich unmittelbar die alternierende Vorzeichenstruktur des Polynoms.

Damit gilt $a(\lambda) \leq 0$ genau auf den Intervallen

$$(-\infty, a_0], \quad [a_1, a_2], \quad \dots, \quad [a_{2N-1}, a_{2N}].$$

Somit folgt

$$\lambda_n \in (-\infty, a_0] \cup [a_1, a_2] \cup \dots \cup [a_{2N-1}, a_{2N}] \quad \text{für alle } n = 1, \dots, N.$$

Damit ist die erste Aussage bewiesen. □

3.2 Verteilung der Nullstellen von β

In diesem Abschnitt untersuchen wir, welche Verteilungen der Nullstellen von β zu unbeschränkten Familien von Polynomtripeln führen. Zunächst konstruieren wir für die beiden in Satz 2 genannten Fälle jeweils eine stetige Deformation der Spektraldaten, entlang derer das zugehörige Polynomtripel unbeschränkt wird. Anschließend betrachten wir den verbleibenden Fall und zeigen, dass dort keine solche Deformation möglich

ist. Hierfür verwenden wir die Kompaktheit aus der dritten Aussage, die unabhängig davon bewiesen wird.

Beweis. Zum Beweis der zweiten Aussage betrachten wir stetige Deformationen der Spektraldaten

$$(\lambda_1(s), \nu_1(s)), \dots, (\lambda_N(s), \nu_N(s)), \quad s \in [0, 1),$$

bei denen für jedes s die Bedingungen $\nu_n(s)^2 = -a(\lambda_n(s))$ und $\lambda_1(s) < \dots < \lambda_N(s)$ erfüllt sind. Nach Satz 1 gehört zu jedem solchen Datensatz ein eindeutig bestimmtes Tripel $(\alpha_s, \beta_s, \gamma_s)$. Im Folgenden untersuchen wir, wann dieses Tripel für $s \uparrow 1$ unbeschränkt wird.

Wir betrachten zunächst den Fall, dass mindestens eine der Nullstellen λ_n im Intervall $(-\infty, a_0]$ liegt. Unter diesen wählen wir die am weitesten links gelegene Nullstelle. Aufgrund der Ordnung

$$\lambda_1 < \dots < \lambda_N$$

handelt es sich dabei notwendigerweise um λ_1 .

Da das Intervall nach links unbeschränkt ist, lässt sich λ_1 stetig nach $-\infty$ deformieren, während alle übrigen λ_n festgehalten werden. Wir wählen hierzu die Deformation

$$\lambda_1(s) = \lambda_1 - \frac{s}{1-s},$$

wobei

$$\lambda_1(s) \longrightarrow -\infty \quad \text{für } s \uparrow 1$$

gilt. Den zugehörigen Wert $\nu_1(s)$ wählen wir stetig so, dass

$$\nu_1(s)^2 = -a(\lambda_1(s)), \quad \nu_1(0) = \nu_1.$$

Liegt λ_1 zunächst auf dem Randpunkt a_0 , so treffen dort beide Zweige zusammen, sodass die Fortsetzung über einen der beiden Zweige gewählt werden kann. Für das folgende Unbeschränktheitsargument ist diese Wahl unerheblich.

Da $\lambda_1(s)$ monoton nach links verläuft, bleibt $\lambda_1(s)$ für alle $s \in [0, 1)$ im Intervall $(-\infty, a_0]$. Auf diesem Intervall gilt $a(\lambda) \leq 0$, sodass $\nu_1(s)$ für alle s reell gewählt werden kann. Ferner bleibt die Anordnung $\lambda_1(s) < \lambda_2 < \dots < \lambda_N$ erhalten, sodass die Voraussetzungen von Satz 1 für jedes s erfüllt sind und die zugehörigen Tripel $(\alpha_s, \beta_s, \gamma_s)$ stetig von s abhängen.

Nach Satz 1 gilt

$$\beta_s(\lambda) = \prod_{n=1}^N (\lambda - \lambda_n(s)).$$

Beim Ausmultiplizieren erhält man für den Koeffizienten von λ^{N-1}

$$\beta_{N-1}(s) = - \sum_{n=1}^N \lambda_n(s).$$

Da $\lambda_2, \dots, \lambda_N$ fest bleiben und $\lambda_1(s) \rightarrow -\infty$ für $s \uparrow 1$, gilt

$$- \sum_{n=1}^N \lambda_n(s) \longrightarrow +\infty.$$

Somit wird ein Koeffizient von β_s unbeschränkt. Daher ist β_s und folglich auch die Familie $(\alpha_s, \beta_s, \gamma_s)$ für $s \uparrow 1$ unbeschränkt.

Als Nächstes betrachten wir den Fall, dass eines der Intervalle $[a_{2n-1}, a_{2n}]$ mindestens zwei Nullstellen von β enthält. Für die Konstruktion einer unbeschränkten Deformation genügt es, zwei dieser Nullstellen zu betrachten und alle übrigen Spektraldaten festzuhalten. Wir bezeichnen mit λ_j die am weitesten links gelegene Nullstelle in diesem Intervall und mit λ_{j+1} ihren rechten Nachbarn. Nach Annahme liegt auch $\lambda_{j+1} \in [a_{2n-1}, a_{2n}]$. Zwischen a_{2n-1} und λ_j liegt somit keine weitere Nullstelle von β , was für die folgende Konstruktion wesentlich ist.

Liegt eine der beiden Nullstellen auf einem Randpunkt des Intervalls, so gilt dort $a(\lambda) = 0$ und damit wegen $\nu^2 = -a(\lambda)$ auch $\nu = 0$. In diesem Fall verschieben wir die betreffende Nullstelle zunächst stetig in das Innere des Intervalls, wobei die Verschiebung so gewählt wird, dass die Anordnung der Nullstellen erhalten bleibt. Da die beiden Zweige am Randpunkt zusammentreffen, kann das Vorzeichen des zugehörigen ν -Wertes bei dieser Fortsetzung frei gewählt werden.

Wir dürfen für den weiteren Beweis daher annehmen, dass λ_j und λ_{j+1} im Inneren von $[a_{2n-1}, a_{2n}]$ liegen und ν_j sowie ν_{j+1} von null verschieden sind.

Wir unterscheiden nun nach den Vorzeichen der zugehörigen Werte.

Besitzen ν_j und ν_{j+1} verschiedene Vorzeichen, so lassen wir λ_j stetig gegen λ_{j+1} konvergieren und halten alle übrigen Spektraldaten fest. Wir wählen hierfür die stetige Deformation

$$\lambda_j(s) = (1-s)\lambda_j + s\lambda_{j+1}, \quad \nu_j(s)^2 = -a(\lambda_j(s)),$$

wobei $\nu_j(s)$ stetig aus ν_j hervorgeht. Da $\lambda_j(s)$ für $s < 1$ im Inneren des Intervalls verbleibt, gilt $a(\lambda_j(s)) < 0$. Somit verschwindet $\nu_j(s)$ nicht und behält sein Vorzeichen bei. Außerdem gilt $\lambda_j(s) < \lambda_{j+1}$, sodass die Anordnung der Nullstellen erhalten bleibt. Besitzen ν_j und ν_{j+1} hingegen dasselbe Vorzeichen, so führen wir λ_j zunächst zum linken Randpunkt a_{2n-1} des Intervalls und von dort wieder in Richtung λ_{j+1} . Da zwischen

a_{2n-1} und λ_{j+1} keine weitere Nullstelle von β liegt, ist die Deformation

$$\lambda_j(s) = \begin{cases} (1-2s)\lambda_j + 2s a_{2n-1}, & s \in [0, \frac{1}{2}], \\ (2-2s)a_{2n-1} + (2s-1)\lambda_{j+1}, & s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

zulässig. Den zugehörigen Wert $\nu_j(s)$ wählen wir stetig so, dass

$$\nu_j(s)^2 = -a(\lambda_j(s))$$

gilt. Bis zum Randpunkt wird der ursprüngliche Zweig beibehalten, anschließend wählen wir den Zweig mit dem Vorzeichen $-\text{sgn}(\nu_{j+1})$. Damit gilt

$$\nu_j(s) \longrightarrow -\nu_{j+1} \quad \text{für } s \uparrow 1.$$

Auch bei dieser Deformation bleibt wegen $\lambda_j(s) < \lambda_{j+1}$ für alle $s < 1$ die Anordnung der Nullstellen erhalten.

In beiden Fällen erhalten wir somit eine stetige Deformation der Spektraldaten mit

$$\lambda_{j+1} - \lambda_j(s) \longrightarrow 0 \quad \text{und} \quad \nu_j(s) + \nu_{j+1} \longrightarrow 0$$

für $s \uparrow 1$, wobei $\nu_{j+1} \neq 0$ ist und alle übrigen Spektraldaten unverändert bleiben.

Wir zeigen nun, dass α_s für diese Deformation unbeschränkt wird.

Nach der Interpolationsformel (2) gilt

$$\alpha_s(\lambda) = \sum_{n=1}^N \nu_n(s) \frac{\beta_s(\lambda)}{(\lambda - \lambda_n(s)) \beta'_s(\lambda_n(s))}.$$

Da

$$\frac{\beta_s(\lambda)}{\lambda - \lambda_n(s)}$$

ein normiertes Polynom vom Grad $N-1$ ist, ergibt sich beim Ausmultiplizieren für den Koeffizienten von λ^{N-1} in α_s

$$\alpha_{N-1}(s) = \sum_{n=1}^N \frac{\nu_n(s)}{\beta'_s(\lambda_n(s))}.$$

Wir betrachten nun die Beiträge der beiden kollidierenden Nullstellen $\lambda_j(s)$ und λ_{j+1} zum Koeffizienten $\alpha_{N-1}(s)$. Wir setzen $\delta_s := \lambda_{j+1} - \lambda_j(s)$, wobei $\delta_s \rightarrow 0$ für $s \uparrow 1$ gilt. Ferner definieren wir

$$R_j(s) := \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq j, j+1}}^N (\lambda_j(s) - \lambda_m), \quad R_{j+1} := \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq j, j+1}}^N (\lambda_{j+1} - \lambda_m).$$

Damit gilt

$$\beta'_s(\lambda_j(s)) = -\delta_s R_j(s), \quad \beta'_s(\lambda_{j+1}) = \delta_s R_{j+1}.$$

Da die übrigen Nullstellen festgehalten werden und paarweise verschieden sind, gilt $R_{j+1} \neq 0$ sowie

$$R_j(s) \longrightarrow R_{j+1} \quad \text{für } s \uparrow 1.$$

Der Beitrag der beiden kollidierenden Nullstellen zu $\alpha_{N-1}(s)$ ist

$$\frac{\nu_j(s)}{\beta'_s(\lambda_j(s))} + \frac{\nu_{j+1}}{\beta'_s(\lambda_{j+1})} = \frac{1}{\delta_s} \left(\frac{\nu_{j+1}}{R_{j+1}} - \frac{\nu_j(s)}{R_j(s)} \right).$$

Da $\nu_j(s) \rightarrow -\nu_{j+1}$ und $R_j(s) \rightarrow R_{j+1}$ für $s \uparrow 1$ gilt, konvergiert der Ausdruck in der Klammer gegen

$$\frac{2\nu_{j+1}}{R_{j+1}} \neq 0.$$

Da zugleich $\delta_s \rightarrow 0$ gilt, wird der Beitrag der beiden kollidierenden Nullstellen unbeschränkt. Die übrigen Summanden bleiben beschränkt, da ihre Nenner gegen von null verschiedene Grenzwerte konvergieren und die zugehörigen ν unverändert bleiben.

Somit ist der Koeffizient $\alpha_{N-1}(s)$ für $s \uparrow 1$ unbeschränkt und folglich auch die Familie $(\alpha_s, \beta_s, \gamma_s)$.

Damit existiert in den beiden betrachteten Situationen eine stetige Deformation der Spektraldaten, unter der das zugehörige Polynomtripel für $s \uparrow 1$ unbeschränkt wird. Sind die beiden zuvor betrachteten Fälle ausgeschlossen, so liegt keine Nullstelle von β in $(-\infty, a_0]$ und jedes der N Intervalle $[a_{2n-1}, a_{2n}]$ enthält höchstens eine Nullstelle. Da β insgesamt genau N reelle Nullstellen $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ besitzt, muss daher jedes dieser Intervalle genau eine Nullstelle enthalten.

Nach der ersten Aussage liegen die $\lambda_n(s)$ für jedes s in der Vereinigung der zulässigen, paarweise disjunkten Intervalle. Da die Deformation stetig ist, kann keine Nullstelle ihr jeweiliges Intervall verlassen. Die Verteilung der Nullstellen bleibt daher erhalten, sodass die deformierten Spektraldaten für alle $s \in [0, 1)$ weiterhin in der Menge (4) liegen.

Nach Satz 1 gehört zu jedem dieser Datensätze ein eindeutig bestimmtes Tripel $(\alpha_s, \beta_s, \gamma_s)$. Dieses liegt somit im Bild von (4), das nach der dritten Aussage kompakt und daher beschränkt ist. Folglich bleiben die Koeffizienten der Tripel für alle $s \in [0, 1)$ beschränkt, sodass keine für $s \uparrow 1$ unbeschränkte Deformation existieren kann.

Damit ist die zweite Aussage bewiesen. □

3.3 Diffeomorphismus auf eine kompakte Zusammenhangskomponente

Die dritte Aussage besagt, dass die Zuordnung der Spektraldaten zu den Polynomtripeln ein Diffeomorphismus von der Menge (4) auf eine kompakte Zusammenhangskomponente von (5) ist. Wir bezeichnen diese Zuordnung im Folgenden mit f .

Zunächst zeigen wir, dass die Menge (4) eine kompakte, zusammenhängende N -dimensionale Untermannigfaltigkeit von $(\mathbb{R}^2)^N$ ist. Anschließend untersuchen wir die Glattheit von f und seiner Umkehrabbildung und zeigen, dass das Bild von f ebenfalls eine N -dimensionale Untermannigfaltigkeit bildet. Abschließend weisen wir nach, dass dieses Bild eine kompakte Zusammenhangskomponente von (5) ist.

Hierfür benötigen wir zunächst eine Aussage über die lokale Struktur der Menge (5), die wir dem eigentlichen Beweis voranstellen.

Lemma 1. *Die Menge (5) ist in einer Umgebung jedes Punktes des Bildes von f eine N -dimensionale Untermannigfaltigkeit von $(\mathbb{R}[\lambda])^3$.*

Beweis. Die Menge (5) besteht aus den Tripeln

$$\left\{ (\alpha, \beta, \gamma) \in (\mathbb{R}[\lambda])^3 \mid \deg \alpha < N, \deg \beta = N, \beta_N = 1, \alpha^2 + \beta\gamma = -a \right\}.$$

Zunächst bemerken wir, dass die Definition der Menge (5) die Gradbedingungen für γ sowie die Bedingung an seinen Leitkoeffizienten bereits impliziert. Es gilt

$$\deg \alpha < N, \quad \deg \beta = N, \quad \deg(\alpha^2) \leq 2N - 2.$$

Da $\deg(\alpha^2) \leq 2N - 2 < 2N + 1 = \deg a$ und $\alpha^2 + \beta\gamma = -a$ gilt, kann der höchste Gradterm von $-a$ nicht aus α^2 stammen und muss daher aus dem Produkt $\beta\gamma$ herrühren. Folglich gilt

$$\deg \gamma = N + 1,$$

und wegen des normierten führenden Koeffizienten von β besitzt γ den führenden Koeffizienten -1 . Wir betrachten daher den affinen Raum

$$A := \{ (\alpha, \beta, \gamma) \in (\mathbb{R}[\lambda])^3 \mid \deg \alpha < N, \deg \beta = N, \beta_N = 1, \deg \gamma = N+1, \gamma_{N+1} = -1 \},$$

der durch die Grad- und Normierungsbedingungen festgelegt ist. Damit ist (5) eine Teilmenge von A . Aufgrund der Anzahl der freien Koeffizienten gilt

$$\dim A = 3N + 1.$$

Für die Gleichungsabbildung betrachten wir nun den Grad des Ausdrucks $\alpha^2 + \beta\gamma + a$.

Da die Leitkoeffizienten von β und γ festgelegt sind, heben sich die Terme vom Grad $2N + 1$ in $\beta\gamma + a$ auf.

Zusätzlich gilt $\deg(\alpha^2) \leq 2N - 2$, somit besitzt $\alpha^2 + \beta\gamma + a$ stets Grad höchstens $2N$.

Wir betrachten daher die Abbildung

$$F : A \longrightarrow \mathbb{R}[\lambda]_{\leq 2N}, \quad F(\alpha, \beta, \gamma) = \alpha^2 + \beta\gamma + a.$$

Damit lässt sich die Menge (5) als Nullstellenmenge

$$F^{-1}(\{0\})$$

schreiben. Nach der Produktregel lautet die Ableitung von F an einer Stelle

$$(\alpha, \beta, \gamma) \in A$$

$$DF_{(\alpha, \beta, \gamma)}(\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}) = 2\alpha\dot{\alpha} + \gamma\dot{\beta} + \beta\dot{\gamma}.$$

Dabei erfüllen die Richtungsvektoren $\deg \dot{\alpha} < N$, $\deg \dot{\beta} < N$ und $\deg \dot{\gamma} \leq N$, da die führenden Koeffizienten von β und γ in A fest sind.

Wir zeigen nun die Surjektivität von DF an jedem Punkt des Bildes von f .

Sei dazu $(\alpha, \beta, \gamma) \in f((4))$. Dann stammen die Nullstellen $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ von β aus den nach Definition von (4) paarweise disjunkten Intervallen und sind daher paarweise verschieden.

Zunächst zeigen wir, dass α und γ an keiner dieser Nullstellen gleichzeitig verschwinden.

Sei $n \in \{1, \dots, N\}$ mit $\alpha(\lambda_n) = \gamma(\lambda_n) = 0$. Aus der Beziehung $\alpha^2 + \beta\gamma = -a$ folgt unmittelbar

$$a(\lambda_n) = 0.$$

Differenzieren nach λ liefert

$$2\alpha\alpha' + \beta'\gamma + \beta\gamma' = -a'.$$

Da λ_n eine Nullstelle von β ist, gilt zusätzlich $\beta(\lambda_n) = 0$. Setzt man nun $\lambda = \lambda_n$ ein, so verschwinden sämtliche Terme auf der linken Seite und es folgt

$$a'(\lambda_n) = 0.$$

Damit wäre λ_n eine mehrfache Nullstelle von a . Dies widerspricht der Voraussetzung, dass die Nullstellen von a einfach sind. Somit gilt für jedes n

$$(\alpha(\lambda_n), \gamma(\lambda_n)) \neq (0, 0).$$

Sei nun $h \in \mathbb{R}[\lambda]$ mit $\deg h \leq 2N$ beliebig. Da für jedes n mindestens einer der Werte $2\alpha(\lambda_n)$ und $\gamma(\lambda_n)$ von null verschieden ist, können reelle Zahlen r_n und s_n so gewählt

werden, dass

$$2\alpha(\lambda_n)r_n + \gamma(\lambda_n)s_n = h(\lambda_n), \quad n = 1, \dots, N.$$

Da die Nullstellen $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ paarweise verschieden sind, existieren nach der Lagrange-Interpolationsformel Polynome $\dot{\alpha}$ und $\dot{\beta}$ vom Grad kleiner als N mit

$$\dot{\alpha}(\lambda_n) = r_n, \quad \dot{\beta}(\lambda_n) = s_n, \quad n = 1, \dots, N.$$

Damit verschwindet das Polynom

$$S := h - 2\alpha\dot{\alpha} - \gamma\dot{\beta}$$

an sämtlichen Nullstellen $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ von β . Somit ist S durch β teilbar. Es existiert also ein Polynom $\dot{\gamma}$ mit

$$S = \beta\dot{\gamma}.$$

Es bleibt zu überprüfen, dass $\dot{\gamma}$ die erforderliche Gradbedingung erfüllt. Aus $\deg \alpha, \deg \dot{\alpha} < N$ folgt $\deg(\alpha\dot{\alpha}) \leq 2N-2$ und aus $\deg \gamma = N+1$ sowie $\deg \dot{\beta} < N$ folgt $\deg(\gamma\dot{\beta}) \leq 2N$. Zusammen mit $\deg h \leq 2N$ ergibt sich daher

$$\deg S \leq 2N.$$

Da $S = \beta\dot{\gamma}$ und $\deg \beta = N$ gilt, folgt schließlich

$$\deg \dot{\gamma} \leq N.$$

Damit erfüllen $\dot{\alpha}, \dot{\beta}$ und $\dot{\gamma}$ die Bedingungen des Richtungsraums und es gilt

$$DF_{(\alpha,\beta,\gamma)}(\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}) = 2\alpha\dot{\alpha} + \gamma\dot{\beta} + \beta\dot{\gamma} = h.$$

Da h beliebig gewählt wurde, ist DF an jedem Punkt des Bildes von f surjektiv und besitzt somit den Rang $2N+1$.

Nach der Charakterisierung von Untermannigfaltigkeiten durch Gleichungen [3, §9, Satz 2] ist die Nullstellenmenge $F^{-1}(\{0\})$ daher in einer Umgebung jedes solchen Punktes eine Untermannigfaltigkeit der Dimension

$$(3N+1) - (2N+1) = N.$$

Damit ist die Behauptung des Lemmas gezeigt. □

Beweis. Schritt 1: Struktur der Menge (4). Wir zeigen zuerst, dass die Menge (4) eine kompakte, zusammenhängende N -dimensionale Untermannigfaltigkeit von $(\mathbb{R}^2)^N$ ist.

Hierzu definieren wir für $n = 1, \dots, N$

$$M_n := \left\{ (\lambda, \nu) \in [a_{2n-1}, a_{2n}] \times \mathbb{R} \mid \nu^2 = -a(\lambda) \right\}.$$

Damit lässt sich die Menge (4) als kartesisches Produkt

$$M_1 \times \dots \times M_N$$

darstellen. Es genügt daher, die entsprechenden Eigenschaften für die einzelnen Faktoren M_n nachzuweisen.

Für den Beweis betrachten wir die Funktion

$$G: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad G(\lambda, \nu) = \nu^2 + a(\lambda).$$

Da G eine Polynomfunktion ist, ist sie insbesondere glatt. Es gilt

$$M_n = G^{-1}(\{0\}) \cap ([a_{2n-1}, a_{2n}] \times \mathbb{R}),$$

und die partiellen Ableitungen von G lauten

$$\frac{\partial G}{\partial \lambda}(\lambda, \nu) = a'(\lambda), \quad \frac{\partial G}{\partial \nu}(\lambda, \nu) = 2\nu.$$

Wir zeigen zunächst, dass M_n eine glatte eindimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$ ist. Hierzu überdecken wir M_n durch vier offene Teilmengen, auf denen jeweils λ oder ν als Parameter dient.

Nach der ersten Aussage gilt $a(\lambda) < 0$ für alle $\lambda \in (a_{2n-1}, a_{2n})$, sodass die Gleichung $\nu^2 = -a(\lambda)$ dort genau die beiden Lösungen

$$\nu = \pm \sqrt{-a(\lambda)}$$

besitzt. Wir definieren die beiden Teilmengen

$$\begin{aligned} U_n^+ &:= \left\{ (\lambda, \nu) \in (a_{2n-1}, a_{2n}) \times (0, \infty) \mid \nu^2 = -a(\lambda) \right\}, \\ U_n^- &:= \left\{ (\lambda, \nu) \in (a_{2n-1}, a_{2n}) \times (-\infty, 0) \mid \nu^2 = -a(\lambda) \right\}. \end{aligned}$$

Diese Zerlegung entspricht den beiden Zweigen der Kurve M_n . Die Projektion auf die erste Koordinate

$$\pi_\lambda: U_n^\pm \longrightarrow (a_{2n-1}, a_{2n}), \quad (\lambda, \nu) \longmapsto \lambda$$

ist bijektiv mit den Umkehrabbildungen

$$\lambda \mapsto (\lambda, \sqrt{-a(\lambda)}) \quad \text{auf } U_n^+, \quad \lambda \mapsto (\lambda, -\sqrt{-a(\lambda)}) \quad \text{auf } U_n^-.$$

Da a ein Polynom und die Quadratwurzelfunktion auf $(0, \infty)$ glatt ist, sind beide Umkehrabbildungen glatt. Somit ist π_λ auf U_n^+ beziehungsweise U_n^- jeweils ein Diffeomorphismus.

Die Randpunkte $(a_{2n-1}, 0)$ und $(a_{2n}, 0)$ wurden in den Teilmengen U_n^+ und U_n^- bewusst ausgeschlossen, da die Parametrisierung über λ dort keine glatte lokale Beschreibung liefert. Um auch diese Punkte zu erfassen, verwenden wir im Folgenden eine zweite Parametrisierung über die Koordinate ν .

Wir betrachten zunächst die Funktion $\lambda \mapsto a(\lambda)$ auf dem Intervall $[a_{2n-1}, a_{2n}]$. Da a stetig und das Intervall kompakt ist, nimmt a dort ein Minimum an.

Nach dem Satz von Rolle besitzt a' zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Nullstellen von a mindestens eine Nullstelle. Da a' den Grad $2N$ besitzt und es genau $2N$ Intervalle (a_k, a_{k+1}) gibt, liegt in jedem dieser Intervalle genau eine Nullstelle von a' .

Insbesondere besitzt a auf $[a_{2n-1}, a_{2n}]$ genau eine kritische Stelle. Wegen

$$a(a_{2n-1}) = a(a_{2n}) = 0 \quad \text{und} \quad a(\lambda) < 0 \quad \text{für } \lambda \in (a_{2n-1}, a_{2n})$$

liegt diese im Inneren und ist die eindeutig bestimmte Minimalstelle. Wir bezeichnen sie mit

$$m_n \in (a_{2n-1}, a_{2n}).$$

Wir definieren nun die Teilmengen

$$\begin{aligned} V_n^- &:= \{(\lambda, \nu) \in (a_{2n-2}, m_n) \times \mathbb{R} \mid \nu^2 = -a(\lambda)\}, \\ V_n^+ &:= \{(\lambda, \nu) \in (m_n, a_{2n+1}) \times \mathbb{R} \mid \nu^2 = -a(\lambda)\}. \end{aligned}$$

Die Intervalle werden dabei bewusst über $[a_{2n-1}, a_{2n}]$ hinaus gewählt, sodass die Randpunkte $(a_{2n-1}, 0)$ und $(a_{2n}, 0)$ als innere Punkte auftreten. Auf den zusätzlich erfassten Intervallstücken gilt $a(\lambda) > 0$, sodass dort keine reellen Lösungen der Gleichung $\nu^2 = -a(\lambda)$ auftreten.

Für $n = N$ bezeichnet a_{2N+1} dabei keine weitere Nullstelle von a , sondern eine beliebig gewählte reelle Zahl mit $a_{2N+1} > a_{2N}$.

Auf $[a_{2n-1}, m_n)$ und $(m_n, a_{2n}]$ besitzt a' keine Nullstelle. Im Inneren folgt dies aus der Eindeutigkeit der kritischen Stelle m_n , an den Randpunkten aus der Einfachheit der Nullstellen von a . Folglich ist a auf beiden Teilintervallen streng monoton.

Damit besitzt die Gleichung

$$\nu^2 = -a(\lambda)$$

für jeden zulässigen Wert von ν jeweils genau eine Lösung λ in dem entsprechenden Teilintervall. Die Projektion auf die zweite Koordinate

$$\pi_\nu : V_n^\pm \longrightarrow \left(-\sqrt{-a(m_n)}, \sqrt{-a(m_n)} \right), \quad (\lambda, \nu) \longmapsto \nu,$$

ist daher bijektiv. Nach dem oben Gezeigten gilt in allen Punkten von $V_n^- \cup V_n^+$

$$\frac{\partial G}{\partial \lambda}(\lambda, \nu) = a'(\lambda) \neq 0.$$

Der Satz über implizite Funktionen [3, §8, Satz 2] liefert daher eine eindeutig bestimmte glatte Funktion $\lambda = \varphi(\nu)$ mit $G(\varphi(\nu), \nu) = 0$. Die Umkehrabbildung von π_ν ist durch

$$\nu \longmapsto (\varphi(\nu), \nu)$$

gegeben und glatt. Folglich ist π_ν auf V_n^- beziehungsweise V_n^+ jeweils ein Diffeomorphismus.

Da die vier offenen Teilmengen U_n^+ , U_n^- , V_n^- und V_n^+ die Menge M_n vollständig überdecken und jeweils eine glatte Parametrisierung besitzen, ist M_n eine glatte eindimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$ [3, §9, Satz 2].

Als Nächstes beweisen wir, dass M_n kompakt ist.

Wir zeigen zunächst die Beschränktheit. Nach Definition von M_n gilt $\lambda \in [a_{2n-1}, a_{2n}]$, sodass die λ -Koordinate beschränkt ist. Da a auf diesem Intervall sein Minimum in m_n annimmt, gilt $a(m_n) \leq a(\lambda)$ für alle $\lambda \in [a_{2n-1}, a_{2n}]$.

Aus $\nu^2 = -a(\lambda) \leq -a(m_n)$ folgt

$$|\nu| \leq \sqrt{-a(m_n)},$$

somit ist auch die ν -Koordinate beschränkt.

Es bleibt zu zeigen, dass M_n abgeschlossen ist. Nach dem Obigen gilt

$$M_n = G^{-1}(\{0\}) \cap ([a_{2n-1}, a_{2n}] \times \mathbb{R}).$$

Da G stetig und $\{0\} \subset \mathbb{R}$ abgeschlossen ist, ist $G^{-1}(\{0\})$ abgeschlossen. Auch $[a_{2n-1}, a_{2n}] \times \mathbb{R}$ ist als Produkt abgeschlossener Mengen abgeschlossen. Folglich ist M_n als Schnitt zweier abgeschlossener Mengen abgeschlossen.

Zusammen mit der bereits gezeigten Beschränktheit folgt nach dem Satz von Heine–Borel, dass M_n kompakt ist. Es bleibt, den Zusammenhang von M_n nachzuweisen. Nach der ersten Aussage gilt $a(\lambda) \leq 0$ für alle $\lambda \in [a_{2n-1}, a_{2n}]$, sodass sich M_n als

Vereinigung der beiden Zweige

$$\left\{ \left(\lambda, \sqrt{-a(\lambda)} \right) \mid \lambda \in [a_{2n-1}, a_{2n}] \right\} \quad \text{und} \quad \left\{ \left(\lambda, -\sqrt{-a(\lambda)} \right) \mid \lambda \in [a_{2n-1}, a_{2n}] \right\}$$

schreiben lässt. Da die Abbildungen

$$\lambda \mapsto \left(\lambda, \pm \sqrt{-a(\lambda)} \right)$$

auf $[a_{2n-1}, a_{2n}]$ stetig sind, sind beide Zweige als stetige Bilder eines Intervalls zusammenhängend. Wegen $a(a_{2n-1}) = a(a_{2n}) = 0$ besitzen sie die gemeinsamen Punkte $(a_{2n-1}, 0)$ und $(a_{2n}, 0)$. Ihr Schnitt ist somit nichtleer und als Vereinigung zweier zusammenhängender Mengen mit nichtleerem Schnitt ist auch M_n zusammenhängend.

Damit ist jedes M_n eine kompakte, zusammenhängende eindimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$. Da endliche kartesische Produkte von Untermannigfaltigkeiten wieder Untermannigfaltigkeiten sind und dabei sowohl Kompaktheit als auch Zusammenhang erhalten bleiben, ist die Menge (4) als Produkt

$$M_1 \times \cdots \times M_N$$

eine kompakte, zusammenhängende N -dimensionale Untermannigfaltigkeit von $(\mathbb{R}^2)^N$.

Schritt 2: Glattheit von f . Im Folgenden zeigen wir die Glattheit der Abbildung

$$\begin{aligned} f: & \left\{ \left((\lambda_1, \nu_1), \dots, (\lambda_N, \nu_N) \right) \in (\mathbb{R}^2)^N \mid \right. \\ & \left. \lambda_n \in [a_{2n-1}, a_{2n}] \text{ und } \nu_n^2 = -a(\lambda_n) \text{ für } n = 1, \dots, N \right\} \\ \longrightarrow & \left\{ (\alpha, \beta, \gamma) \in (\mathbb{R}[\lambda])^3 \mid \right. \\ & \left. \deg \alpha < N, \deg \beta = N, \beta_N = 1, \alpha^2 + \beta\gamma = -a \right\}, \\ & \left((\lambda_1, \nu_1), \dots, (\lambda_N, \nu_N) \right) \mapsto (\alpha, \beta, \gamma). \end{aligned}$$

Wie im Beweis von Lemma 1 für die in (5) betrachteten Polynomtripel gezeigt wurde, gilt $\deg \gamma = N + 1$ und der Leitkoeffizient von γ ist -1 . Es genügt daher, die glatte Abhängigkeit der übrigen Koeffizienten von den Spektraldaten zu zeigen.

Aus

$$\beta(\lambda) = \prod_{n=1}^N (\lambda - \lambda_n)$$

folgt unmittelbar, dass sämtliche Koeffizienten von β Polynome in $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ sind und somit glatt von den Daten abhängen.

Für α verwenden wir die Interpolationsdarstellung (2)

$$\alpha(\lambda) = \sum_{n=1}^N \nu_n \frac{\beta(\lambda)}{(\lambda - \lambda_n)\beta'(\lambda_n)}.$$

Die λ_n liegen nach Definition von (4) in paarweise disjunkten Intervallen und sind deshalb paarweise verschieden, sodass $\beta'(\lambda_n) \neq 0$ gilt. Somit hängen auch die Koeffizienten von α glatt von den Spektraldaten ab.

Es bleibt zu zeigen, dass auch γ glatt von den Spektraldaten abhängt. Wir wählen hierzu $N + 2$ paarweise verschiedene Punkte

$$x_1, \dots, x_{N+2} \in (a_{2N}, \infty).$$

Da sämtliche Nullstellen von β in $\bigcup_{n=1}^N [a_{2n-1}, a_{2n}]$ liegen, gilt $\beta(x_i) \neq 0$ für $i = 1, \dots, N + 2$, unabhängig von der Wahl der Daten. Aus $\alpha^2 + \beta\gamma = -a$ folgt daher

$$\gamma(x_i) = -\frac{a(x_i) + \alpha(x_i)^2}{\beta(x_i)}, \quad i = 1, \dots, N + 2.$$

Die Stellen x_i und das Polynom a sind fest gewählt und α sowie β hängen bereits glatt von den Spektraldaten ab. Folglich gilt dies auch für die Werte $\gamma(x_i)$.

Ein Polynom vom Grad höchstens $N + 1$ ist eindeutig durch seine Werte an $N + 2$ paarweise verschiedenen Stellen bestimmt, daher gilt

$$\gamma(\lambda) = \sum_{i=1}^{N+2} \gamma(x_i) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{N+2} \frac{\lambda - x_k}{x_i - x_k}.$$

Die Interpolationsstellen $x_1, \dots, x_{N+2}$ sind fest gewählt, sodass die Basispolynome nicht von den Spektraldaten abhängen. Damit hängen auch die Koeffizienten von γ glatt von den Daten ab. Insgesamt sind somit die Koeffizienten von α , β und γ glatte Funktionen der Spektraldaten, sodass auch die Abbildung f glatt ist.

Schritt 3: Glattheit von f^{-1} . Nach Satz 1 ist f injektiv. Betrachtet man f als Abbildung auf ihr Bild $f((4)) \subseteq (5)$, so ist sie zudem surjektiv und damit bijektiv. Es existiert somit eine eindeutig bestimmte Umkehrabbildung

$$f^{-1}: f((4)) \longrightarrow (4).$$

Die Einschränkung des Zielraums auf das Bild ist hierbei wesentlich, da im Allgemeinen nicht jedes Element von (5) durch die Konstruktion aus Satz 1 erzeugt wird.

Zu zeigen bleibt, dass f^{-1} glatt ist. Hierzu untersuchen wir zunächst, wie sich die Spektraldaten lokal aus den Koeffizienten eines Polynomtripels zurückgewinnen lassen. Anschließend zeigen wir, dass $f((4))$ eine N -dimensionale Untermannigfaltigkeit bildet,

sodass die Glattheit der Umkehrabbildung auf diesem Bild betrachtet werden kann. Die Zahlen $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ sind die Nullstellen des normierten Polynoms

$$\beta(\lambda) = \prod_{n=1}^N (\lambda - \lambda_n) = \lambda^N + \beta_{N-1}\lambda^{N-1} + \dots + \beta_0.$$

Um diese lokal eindeutig und glatt aus den Koeffizienten von β zurückzugewinnen, betrachten wir die Abbildung

$$\Phi: \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N, \quad (\lambda_1, \dots, \lambda_N) \longmapsto (\beta_0, \dots, \beta_{N-1}),$$

die dem Nullstellenvektor den Koeffizientenvektor des zugehörigen normierten Polynoms zuordnet. Da sich die Koeffizienten $\beta_0, \dots, \beta_{N-1}$ beim Ausmultiplizieren als Polynome in $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ ergeben, ist Φ polynomial und damit glatt. Für die Anwendung des Satzes über die inverse Funktion bleibt somit zu zeigen, dass die Jacobi-Matrix $D\Phi$ invertierbar ist. Hierfür berechnen wir zunächst die partiellen Ableitungen von β bezüglich der Nullstellen.

Aus der Produktdarstellung folgt für $n = 1, \dots, N$

$$\frac{\partial \beta}{\partial \lambda_n} = - \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^N (\lambda - \lambda_m) = - \frac{\beta(\lambda)}{\lambda - \lambda_n}.$$

Andererseits gilt aufgrund der Koeffizientendarstellung

$$\frac{\partial \beta}{\partial \lambda_n} = \frac{\partial \beta_{N-1}}{\partial \lambda_n} \lambda^{N-1} + \dots + \frac{\partial \beta_0}{\partial \lambda_n}.$$

Da der Koeffizient von λ^N konstant und gleich 1 ist, liefert dieser keinen Beitrag. Der Vergleich beider Darstellungen von $\frac{\partial \beta}{\partial \lambda_n}$ zeigt, dass deren Koeffizienten bezüglich der Basis $1, \lambda, \dots, \lambda^{N-1}$ gerade die n -te Spalte der Jacobi-Matrix

$$D\Phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \beta_0}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial \beta_0}{\partial \lambda_2} & \dots & \frac{\partial \beta_0}{\partial \lambda_N} \\ \frac{\partial \beta_1}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial \beta_1}{\partial \lambda_2} & \dots & \frac{\partial \beta_1}{\partial \lambda_N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \beta_{N-1}}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial \beta_{N-1}}{\partial \lambda_2} & \dots & \frac{\partial \beta_{N-1}}{\partial \lambda_N} \end{pmatrix}$$

bilden. Zum Nachweis der Invertierbarkeit von $D\Phi$ zeigen wir zunächst, dass die Polynome

$$\frac{\beta(\lambda)}{\lambda - \lambda_1}, \dots, \frac{\beta(\lambda)}{\lambda - \lambda_N}$$

linear unabhängig sind.

Seien hierzu $c_1, \dots, c_N \in \mathbb{R}$ mit

$$\sum_{n=1}^N c_n \frac{\beta(\lambda)}{\lambda - \lambda_n} = 0,$$

und sei $k \in \{1, \dots, N\}$ beliebig. Setzt man $\lambda = \lambda_k$ ein, so verschwinden alle Summanden mit $n \neq k$, da sie den Faktor $(\lambda_k - \lambda_n)$ enthalten. Für den verbleibenden Summanden erhält man

$$c_k \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^N (\lambda_k - \lambda_m) = c_k \beta'(\lambda_k) = 0.$$

Da die Nullstellen paarweise verschieden sind, gilt $\beta'(\lambda_k) \neq 0$. Folglich ist $c_k = 0$.

Da k beliebig gewählt wurde, folgt

$$c_1 = \dots = c_N = 0.$$

Somit sind die Spalten der Jacobi-Matrix linear unabhängig. Daher besitzt $D\Phi$ den Rang N und ist als quadratische $N \times N$ -Matrix invertierbar. Da Φ glatt ist, ist sie nach dem Satz über die inverse Funktion in einer Umgebung jedes Punktes [3, §8, Satz 3] $(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ mit paarweise verschiedenen λ_n ein lokaler Diffeomorphismus. Insbesondere existiert eine glatte lokale Umkehrabbildung, durch die sich die Nullstellen $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ eindeutig und glatt aus den Koeffizienten von β zurückgewinnen lassen. Für die zugehörigen Werte gilt

$$\nu_n = \alpha(\lambda_n), \quad n = 1, \dots, N.$$

Da die λ_n nach dem Vorangegangenen lokal glatt von den Koeffizienten von β abhängen und die Auswertung $\alpha(\lambda_n)$ glatt in den Koeffizienten von α und in λ_n ist, hängen auch die ν_n lokal glatt von den Polynomkoeffizienten ab. Damit erhalten wir lokal eine glatte Rückgewinnung der Spektraldaten

$$(\alpha, \beta, \gamma) \longmapsto ((\lambda_1, \nu_1), \dots, (\lambda_N, \nu_N)),$$

die auf dem Bild von f mit der Umkehrabbildung von f übereinstimmt.

Wir betrachten nun die zugehörigen Richtungsvektoren. Sei an einem Punkt (α, β, γ) des Bildes von f eine infinitesimale Änderung $(\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma})$ der Polynomkoeffizienten gegeben. Nach dem Vorangegangenen ordnet das Differential der lokalen Umkehrabbildung von Φ dem Richtungsvektor $\dot{\beta}$ eindeutig die Richtungsvektoren

$$\dot{\lambda}_1, \dots, \dot{\lambda}_N$$

der Nullstellen zu.

Für die Werte $\nu_n = \alpha(\lambda_n)$ ergibt die Differentiation

$$\dot{\nu}_n = \dot{\alpha}(\lambda_n) + \alpha'(\lambda_n)\dot{\lambda}_n, \quad n = 1, \dots, N.$$

Damit lassen sich aus einer infinitesimalen Änderung der Polynomkoeffizienten die zugehörigen Richtungsvektoren der Spektraldaten eindeutig zurückgewinnen.

Nach Schritt 2 ist die Abbildung f glatt und ordnet daher über ihre Ableitung jedem Tangentialvektor an einem Punkt der Menge (4) einen entsprechenden Richtungsvektor der Polynomkoeffizienten zu. Wendet man auf diesen anschließend die oben beschriebene Rückgewinnung an, so erhält man wieder den ursprünglichen Tangentialvektor der Spektraldaten.

Sei nun $p \in (4)$ beliebig. Nach der Kettenregel ist die Verkettung der beiden Ableitungen daher die identische Abbildung auf dem Tangentialraum $T_p(4)$, sodass

$$Dg_{f(p)} \circ Df_p = \text{id}_{T_p(4)}$$

gilt, wobei g die lokal definierte Rückgewinnungsabbildung bezeichnet.

Damit bildet Df_p den Tangentialraum $T_p(4)$ isomorph auf sein Bild ab, wobei $Dg_{f(p)}$ auf diesem Bild die inverse Abbildung liefert. Insbesondere ist Df_p injektiv. Nach Schritt 1 ist die Menge (4) eine N -dimensionale Untermannigfaltigkeit, sodass

$$\dim T_p(4) = N$$

gilt. Folglich besitzt Df_p in jedem Punkt den Rang

$$\text{rang } Df_p = N.$$

Nach Satz 1 ist f injektiv und nach Schritt 2 stetig. Da die Menge (4) nach Schritt 1 kompakt ist, ist

$$f : (4) \longrightarrow f((4))$$

ein Homöomorphismus. Zusammen mit dem Rang N ergibt sich damit, dass f eine lokale Parametrisierung ihres Bildes liefert. Folglich ist

$$f((4))$$

eine N -dimensionale Untermannigfaltigkeit des umgebenden Koeffizientenraums. Insbesondere ist damit auf dem Bild von f ein Glattheitsbegriff erklärt. Die Umkehrabbildung

$$f^{-1} : f((4)) \longrightarrow (4)$$

stimmt lokal mit der zuvor konstruierten glatten Rückgewinnungsabbildung überein.

Somit ist f ein Diffeomorphismus von (4) auf ihr Bild.

Es bleibt zu zeigen, dass das Bild von f eine Zusammenhangskomponente von (5) ist. Als stetiges Bild der nach Schritt 1 kompakten und zusammenhängenden Menge (4) ist es zunächst selbst kompakt und zusammenhängend. Insbesondere ist es abgeschlossen in (5).

Nach Lemma 1 ist (5) in einer Umgebung jedes Punktes des Bildes von f eine N -dimensionale Untermannigfaltigkeit. Nach dem Vorangegangenen ist auch $f((4))$ eine N -dimensionale Untermannigfaltigkeit mit

$$f((4)) \subset (5).$$

An jedem Punkt aus $f((4))$ ist daher der Tangentialraum von $f((4))$ im Tangentialraum von (5) enthalten. Da beide die Dimension N besitzen, stimmen die Tangentialräume überein.

Somit besitzt die Abbildung

$$f((4)) \longrightarrow (5), \quad q \longmapsto q,$$

in jedem Punkt ein invertierbares Differential. Nach dem Satz über die inverse Funktion ist sie lokal ein Diffeomorphismus. Daher enthält $f((4))$ um jeden seiner Punkte eine in (5) offene Umgebung und ist folglich offen in (5).

Sei nun C die Zusammenhangskomponente von (5), die einen Punkt aus $f((4))$ enthält. Dann ist $f((4)) \cap C$ eine nichtleere, offene und abgeschlossene Teilmenge von C . Da C zusammenhängend ist, folgt

$$f((4)) \cap C = C.$$

Wegen des Zusammenhangs von $f((4))$ und der nichtleeren Schnittmenge mit C gilt zugleich $f((4)) \subseteq C$. Somit folgt

$$f((4)) = C.$$

Damit ist $f((4))$ eine kompakte Zusammenhangskomponente von (5), die eine N -dimensionale Untermannigfaltigkeit von $(\mathbb{R}[\lambda])^3$ bildet und f ist ein Diffeomorphismus von (4) auf $f((4))$. Damit ist die dritte Aussage vollständig bewiesen. $\square$

4 Satz 3: Globale Lösbarkeit des Anfangswertproblems

Satz 3. Für alle ξ wie in (1) sei $q(\xi) = \gamma_N + \beta_{N-1}$. Für solche ξ_0 besitzt das Anfangswertproblem

$$\frac{d}{dx}\xi = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q(\xi) - \lambda & 0 \end{pmatrix}, \xi \right], \quad \xi(0) = \xi_0 \quad (6)$$

eine maximale Lösung auf einem offenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ mit $0 \in I$. Für alle $x \in I$ sind $\xi(x)$ von der Form (1) mit $\det \xi(x) = \det \xi_0$. Wenn die Einträge von ξ_0 in $\mathbb{R}[\lambda]$ liegen, dann auch die Einträge von $\xi(x)$ bei allen $x \in I$. Wenn zusätzlich $\det \xi_0$ und das Polynom β des Anfangswerts ξ_0 reelle Nullstellen $a_0 < \dots < a_{2N}$ beziehungsweise $\lambda_1 < \dots < \lambda_N$ besitzen mit $\lambda_n \in [a_{2n-1}, a_{2n}]$ für $n = 1, \dots, N$, dann gilt $I = \mathbb{R}$.

Satz 3 beschreibt den durch die Differentialgleichung (6) erzeugten Fluss auf dem Raum der Matrixpolynome der Form (1). Für den Beweis identifizieren wir diesen Raum mit einem endlichdimensionalen Koeffizientenraum und erhalten daraus die Existenz einer maximalen Lösung.

Anschließend untersuchen wir, welche Eigenschaften des Anfangswerts entlang dieser Lösung erhalten bleiben und zeigen schließlich unter den zusätzlichen Voraussetzungen aus Satz 2, dass die Koeffizienten beschränkt bleiben. Dadurch kann die maximale Lösung global fortgesetzt werden, sodass $I = \mathbb{R}$ gilt. Der Beweis gliedert sich entsprechend in drei Schritte.

Beweis. Im Folgenden schreiben wir zur Abkürzung

$$A(\xi) := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q(\xi) - \lambda & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix $A(\xi)$ hat dabei dieselbe Form wie die durch Ordnungsreduktion des Schrödingerproblems erhaltene Matrix, wobei das Potential nun durch $q(\xi)$ bestimmt wird. Mit dieser Bezeichnung lässt sich die Differentialgleichung (6) kurz als

$$\frac{d}{dx}\xi = [A(\xi), \xi]$$

schreiben.

Schritt 1: Existenz der maximalen Lösung. Wir betrachten Matrizen ξ der Form (1) mit

$$\alpha(\lambda) = \sum_{n=0}^{N-1} \alpha_n \lambda^n, \quad \beta(\lambda) = \lambda^N + \sum_{n=0}^{N-1} \beta_n \lambda^n, \quad \gamma(\lambda) = -\lambda^{N+1} + \sum_{n=0}^N \gamma_n \lambda^n.$$

Ein solches Polynomtripel (α, β, γ) ist eindeutig durch seine freien Koeffizienten bestimmt. Wir identifizieren es daher mit dem Koeffizientenvektor

$$z = (\alpha_0, \dots, \alpha_{N-1}, \beta_0, \dots, \beta_{N-1}, \gamma_0, \dots, \gamma_N) \in \mathbb{C}^{3N+1},$$

wobei α insgesamt N , β ebenfalls N und γ genau $N + 1$ freie Koeffizienten besitzt. Der Raum der Matrizen ξ der Form (1) lässt sich somit mit dem endlichdimensionalen Koeffizientenraum $\mathbb{C}^{3N+1}$ identifizieren.

Dadurch kann die Matrixdifferentialgleichung

$$\frac{d}{dx} \xi = [A(\xi), \xi]$$

als gewöhnliches Differentialgleichungssystem für den Koeffizientenvektor z aufgefasst werden. Da die rechte Seite nicht explizit von x abhängt, handelt es sich um ein autonomes System.

Wie in Schritt 2 durch die direkte Berechnung des Kommutators gezeigt wird, besitzen die drei Polynomkomponenten von $[A(\xi), \xi]$ genau die Gradbeschränkungen, die den Ableitungen der freien Koeffizienten in (1) entsprechen. Der Kommutator ist daher wiederum durch $3N + 1$ Koeffizienten eindeutig bestimmt. Über die oben beschriebene Identifikation induziert er somit ein Vektorfeld

$$V : \mathbb{C}^{3N+1} \longrightarrow \mathbb{C}^{3N+1},$$

welches jedem Koeffizientenvektor den Koeffizientenvektor des Kommutators zuordnet. Da

$$q(\xi) = \gamma_N + \beta_{N-1}$$

linear von den Koeffizienten von ξ abhängt und der Kommutator lediglich Summen und Produkte dieser Koeffizienten enthält, ist das zugehörige Vektorfeld V polynomial und insbesondere glatt. Da hierbei auch Produkte der unbekannten Koeffizienten auftreten, ist das Differentialgleichungssystem im Allgemeinen nicht linear.

Zur Anwendung des Satzes von Picard-Lindelöf identifizieren wir

$$\mathbb{C}^{3N+1} \cong \mathbb{R}^{6N+2},$$

indem jeder komplexe Koeffizient in Real- und Imaginärteil zerlegt wird. Dadurch kann der Koeffizientenvektor z äquivalent als Element von $\mathbb{R}^{6N+2}$ aufgefasst werden.

Entsprechend betrachten wir auch das zuvor definierte Vektorfeld als Abbildung

$$V : \mathbb{R}^{6N+2} \longrightarrow \mathbb{R}^{6N+2}.$$

Da V glatt und damit insbesondere lokal Lipschitz-stetig ist, sind die Voraussetzungen des Satzes von Picard-Lindelöf erfüllt [8, Theorem 2.2]. Folglich besitzt das Anfangswertproblem

$$\frac{d}{dx}z = V(z), \quad z(0) = z_0,$$

zu jedem Anfangswert $z_0 \in \mathbb{R}^{6N+2}$ eine lokal eindeutig bestimmte Lösung.

Diese lässt sich eindeutig zu einer maximalen Lösung

$$z : I \longrightarrow \mathbb{R}^{6N+2}, \quad I = (x_-, x_+) \text{ mit } x_- < 0 < x_+,$$

auf einem offenen Intervall fortsetzen [8, Theorem 2.13].

Da das Vektorfeld V auf ganz $\mathbb{R}^{6N+2}$ definiert ist, besitzt sein Definitionsbereich keinen Rand. Nach dem Fortsetzungssatz [1, Satz 3.17] kann daher ein endlicher Randpunkt des maximalen Existenzintervalls nicht dadurch entstehen, dass die Lösung den Definitionsbereich des Vektorfeldes verlässt. Somit bleibt als einzige Möglichkeit, dass der Koeffizientenvektor $z(x)$ beim Annähern an einen endlichen Randpunkt unbeschränkt wird.

Ist der rechte Randpunkt x_+ endlich, so gilt

$$\|z(x)\| \longrightarrow \infty \quad \text{für } x \rightarrow x_+,$$

und analog für den linken Randpunkt.

Da $z(x)$ gerade die freien Koeffizienten der Matrix $\xi(x)$ beschreibt, muss in diesem Fall mindestens einer dieser Koeffizienten unbeschränkt werden. Zur globalen Fortsetzbarkeit der Lösung genügt es daher zu zeigen, dass der Koeffizientenvektor auf dem maximalen Existenzintervall beschränkt bleibt.

Schritt 2: Invariante Eigenschaften der Lösung. Nachdem die lokale Existenz und Eindeutigkeit der Lösung gezeigt wurde, arbeiten wir im Folgenden wieder direkt mit der Matrixdifferentialgleichung (6).

Wir zeigen zunächst, dass die Determinante entlang der Lösung konstant bleibt.

Für differenzierbare Matrixfunktionen gilt die Jacobi-Formel

$$\frac{d}{dx} \det \xi = \text{Spur} \left(\xi^{-1} \det(\xi) \frac{d}{dx} \xi \right).$$

Dabei ist zu beachten, dass der Ausdruck $\xi^{-1} \det(\xi)$ im Fall invertierbarer ξ mit der adjungierten Matrix $\text{adj}(\xi)$ übereinstimmt [5, Abschnitt 0.8.2]. Da $\text{adj}(\xi)$ auch für nichtinvertierbare ξ wohldefiniert ist, wird der Ausdruck im Folgenden in diesem Sinne verstanden.

Mit der Matrixdifferentialgleichung $\frac{d}{dx} \xi = [A(\xi), \xi] = A(\xi)\xi - \xi A(\xi)$ folgt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \det \xi &= \text{Spur} \left(\xi^{-1} \det(\xi) (A(\xi)\xi - \xi A(\xi)) \right) \\ &= \text{Spur} \left(\xi^{-1} \det(\xi) A(\xi) \xi \right) - \text{Spur} \left(\xi^{-1} \det(\xi) \xi A(\xi) \right). \end{aligned}$$

Für den ersten Term liefert die Zyklizität der Spur

$$\text{Spur} \left(\xi^{-1} \det(\xi) A(\xi) \xi \right) = \text{Spur} \left(\xi \left(\xi^{-1} \det(\xi) \right) A(\xi) \right) = \text{Spur} \left(\det(\xi) A(\xi) \right),$$

und für den zweiten Term gilt ebenso

$$\text{Spur} \left(\xi^{-1} \det(\xi) \xi A(\xi) \right) = \text{Spur} \left(\det(\xi) A(\xi) \right).$$

Beide Terme stimmen somit überein und es folgt

$$\frac{d}{dx} \det \xi = 0.$$

Dabei wird keine besondere Eigenschaft von $A(\xi)$ verwendet; entscheidend ist allein die Kommutatorform der rechten Seite. Folglich bleibt die Determinante entlang der Lösung konstant und es gilt

$$\det \xi(x) = \det \xi_0 \quad \text{für alle } x \in I.$$

Um zu zeigen, dass die Differentialgleichung (6) den Raum der Matrizen der Form (1) nicht verlässt, bestimmen wir zunächst das zugehörige Vektorfeld explizit und untersuchen anschließend die Grade der auftretenden Ableitungen.

Mit

$$\xi = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix}, \quad A(\xi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q(\xi) - \lambda & 0 \end{pmatrix}$$

ergibt sich durch Ausmultiplizieren des Kommutators

$$\begin{aligned} [A(\xi), \xi] &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q(\xi) - \lambda & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q(\xi) - \lambda & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \gamma & -\alpha \\ (q(\xi) - \lambda)\alpha & (q(\xi) - \lambda)\beta \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} (q(\xi) - \lambda)\beta & \alpha \\ -(q(\xi) - \lambda)\alpha & \gamma \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \gamma - (q(\xi) - \lambda)\beta & -2\alpha \\ 2(q(\xi) - \lambda)\alpha & (q(\xi) - \lambda)\beta - \gamma \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ein Vergleich der Matrixeinträge mit

$$\frac{d}{dx}\xi = \begin{pmatrix} \alpha_x & \beta_x \\ \gamma_x & -\alpha_x \end{pmatrix}$$

ergibt das Differentialgleichungssystem

$$\alpha_x = \gamma - (q(\xi) - \lambda)\beta, \quad \beta_x = -2\alpha, \quad \gamma_x = 2(q(\xi) - \lambda)\alpha.$$

Der rechte untere Matrixeintrag ist dabei das Negative des linken Oberen und liefert daher keine weitere unabhängige Gleichung. Nun betrachten wir die Grade der auftretenden Ableitungen.

Aus $\beta_x = -2\alpha$ und der Voraussetzung $\deg \alpha < N$ folgt unmittelbar

$$\deg \beta_x < N.$$

Weiter gilt $\gamma_x = 2(q(\xi) - \lambda)\alpha$. Da $q(\xi) = \gamma_N + \beta_{N-1}$ bezüglich der Spektralvariablen λ konstant ist, besitzt $q(\xi) - \lambda$ den Grad 1. Somit erhält man

$$\deg \gamma_x \leq 1 + \deg \alpha \leq N.$$

Für $\alpha_x = \gamma - (q(\xi) - \lambda)\beta$ betrachten wir die höchsten Terme von β und γ . Es gilt

$$\beta(\lambda) = \lambda^N + \beta_{N-1}\lambda^{N-1} + \dots \quad \text{und} \quad \gamma(\lambda) = -\lambda^{N+1} + \gamma_N\lambda^N + \dots$$

Damit ergibt sich

$$(q(\xi) - \lambda)\beta = (q(\xi) - \lambda)(\lambda^N + \beta_{N-1}\lambda^{N-1} + \dots) = -\lambda^{N+1} + (q(\xi) - \beta_{N-1})\lambda^N + \dots$$

Wegen der Definition $q(\xi) = \gamma_N + \beta_{N-1}$ folgt

$$q(\xi) - \beta_{N-1} = \gamma_N,$$

sodass $(q(\xi) - \lambda)\beta$ die Form $-\lambda^{N+1} + \gamma_N \lambda^N + \dots$ besitzt. Die beiden höchsten Terme stimmen somit exakt mit denen von γ überein. In $\alpha_x = \gamma - (q(\xi) - \lambda)\beta$ heben sich daher sowohl der Term vom Grad $N + 1$ als auch der Term vom Grad N auf.

Folglich gilt

$$\deg \alpha_x < N.$$

Damit erfüllen die Ableitungen genau die Gradbedingungen, die mit den in (1) festgelegten Graden und Leitkoeffizienten vereinbar sind. Somit definiert die rechte Seite von (6) tatsächlich ein Vektorfeld auf dem Raum der Matrizen ξ der Form (1) und die nach dem Satz von Picard-Lindelöf eindeutig bestimmte maximale Lösung verbleibt in diesem Raum.

Für den verbleibenden Teil des Beweises betrachten wir reelle Anfangsdaten, also $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}[\lambda]$. Insbesondere ist

$$q(\xi) = \gamma_N + \beta_{N-1} \in \mathbb{R}.$$

Damit liegen auch die rechten Seiten der Differentialgleichungen

$$\alpha_x = \gamma - (q(\xi) - \lambda)\beta, \quad \beta_x = -2\alpha, \quad \gamma_x = 2(q(\xi) - \lambda)\alpha$$

in $\mathbb{R}[\lambda]$. Folglich gilt

$$\alpha_x, \beta_x, \gamma_x \in \mathbb{R}[\lambda],$$

sodass der Raum der Matrizen mit reellen Koeffizienten unter der Differentialgleichung erhalten bleibt.

Die in Schritt 1 konstruierte maximale Lösung wurde zunächst im komplexen Koeffizientenraum betrachtet. Für reelle Anfangsdaten kann dasselbe Anfangswertproblem jedoch auch im reellen Koeffizientenraum formuliert werden. Nach dem Satz von Picard-Lindelöf besitzt es dort ebenfalls eine lokal eindeutig bestimmte Lösung. Diese ist zugleich eine Lösung des komplexen Anfangswertproblems mit demselben Anfangswert. Aufgrund der Eindeutigkeit stimmen beide Lösungen auf ihrem gemeinsamen Existenzintervall überein.

Da der reelle Koeffizientenraum unter der Differentialgleichung erhalten bleibt, kann dieses Argument entlang der maximalen Lösung fortgesetzt werden.

Somit bleiben Lösungen mit reellen Anfangsdaten auf ihrem gesamten maximalen Existenzintervall reell.

Schritt 3: Globale Existenz. Es seien nun zusätzlich die Voraussetzungen aus Satz 2 erfüllt. Insbesondere besitzt das Polynom $a := \det \xi_0$ die reellen Nullstellen

$$a_0 < \dots < a_{2N},$$

und das Polynom β des Anfangswerts ξ_0 die reellen Nullstellen

$$\lambda_1 < \dots < \lambda_N, \quad \lambda_n \in [a_{2n-1}, a_{2n}] \quad \text{für } n = 1, \dots, N.$$

Im Folgenden zeigen wir zunächst, dass der Anfangswert ξ_0 in der in Satz 2 beschriebenen Zusammenhangskomponente $f((4))$ liegt. Sei dazu

$$\xi_0 = (\alpha, \beta, \gamma).$$

Sind $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ die Nullstellen von β , so folgt aus $\alpha^2 + \beta\gamma = -a$ und $\beta(\lambda_n) = 0$, dass

$$\alpha(\lambda_n)^2 = -a(\lambda_n), \quad n = 1, \dots, N.$$

Mit

$$\nu_n := \alpha(\lambda_n)$$

erhalten wir somit Spektraldaten

$$((\lambda_1, \nu_1), \dots, (\lambda_N, \nu_N)),$$

die wegen $\lambda_n \in [a_{2n-1}, a_{2n}]$ in der Menge (4) liegen. Nach Satz 1 wird aus diesen Daten eindeutig wieder ξ_0 rekonstruiert. Daher gilt

$$\xi_0 \in f((4)).$$

Nach Schritt 2 bleiben entlang der Lösung sowohl die Gradbedingungen und Leitkoeffizienten als auch die Realität der Koeffizienten erhalten. Zudem gilt

$$\det \xi(x) = \det \xi_0 = a \quad \text{für alle } x \in I.$$

Damit gehört $\xi(x)$ für alle $x \in I$ zur Menge (5). Da I zusammenhängend und die Abbildung $x \mapsto \xi(x)$ stetig ist, ist ihr gesamtes Bild in einer einzigen Zusammenhangskomponente von (5) enthalten. Nach Satz 2 ist $f((4))$ diejenige Zusammenhangskomponente von (5), die den Anfangswert ξ_0 enthält. Folglich gilt

$$\xi(x) \in f((4)) \quad \text{für alle } x \in I.$$

Da $f((4))$ nach Satz 2 kompakt ist, ist diese Zusammenhangskomponente im endlich-dimensionalen Koeffizientenraum beschränkt. Somit bleiben sämtliche freien Koeffizienten von $\xi(x)$ auf dem gesamten Existenzintervall beschränkt.

Nach Schritt 1 kann ein endlicher Randpunkt des maximalen Existenzintervalls nur auftreten, wenn mindestens einer dieser Koeffizienten unbeschränkt wird.

Dies ist aufgrund der Kompaktheit von $f((4))$ ausgeschlossen. Daher hat das maximale Existenzintervall keine endlichen Randpunkte und es folgt

$$I = \mathbb{R}.$$

Damit besitzt das Anfangswertproblem (6) unter den zusätzlichen reellen Voraussetzungen aus Satz 2 eine eindeutig bestimmte globale Lösung. Insbesondere induziert das autonome Vektorfeld auf der beschriebenen kompakten Zusammenhangskomponente einen globalen Fluss. Somit ist Satz 3 bewiesen. $\square$

5 Zusammenfassung

Im Mittelpunkt dieser Arbeit stand die Konstruktion matrixwertiger Polynome ξ mit fest vorgegebenem Determinantenpolynom

$$\det \xi = a.$$

Aus endlich vielen Spektraldaten wurden zunächst die zugehörigen Polynomtripel eindeutig rekonstruiert. Im reellen Fall wurde anschließend die Struktur der entsprechenden Datenmenge untersucht und gezeigt, dass sie über die Rekonstruktionsabbildung diffeomorph auf eine kompakte Zusammenhangskomponente der reellen Polynomtripel abgebildet wird. Abschließend wurde die zugehörige Laxgleichung betrachtet und bewiesen, dass der dadurch erzeugte Fluss für alle $x \in \mathbb{R}$ existiert.

Der entscheidende Punkt für die globale Lösbarkeit liegt dabei im Übergang zum reellen Fall. Unter diesen Voraussetzungen bilden die relevanten Polynomtripel eine kompakte Zusammenhangskomponente. Deren Kompaktheit gewährleistet die erforderliche Beschränktheit der Koeffizienten und ermöglicht damit die Fortsetzung der Lösung auf ganz $\mathbb{R}$.

Entlang dieser globalen Lösung wird durch

$$q(x) = \gamma_N(x) + \beta_{N-1}(x)$$

ein reelles algebraisch-geometrisches Potential bestimmt. Damit zeigt sich, dass die algebraisch-geometrische Struktur nicht nur die zulässigen Polynomtripel beschreibt, sondern zugleich zur Konstruktion eines global definierten reellen Potentials führt.

Literaturverzeichnis

- [1] L. Chen, *Dynamische Systeme und Stabilität*. Vorlesungsskript, Universität Mannheim, Frühjahrssemester 2022.
- [2] B. A. Dubrovin, V. B. Matveev und S. P. Novikov, *Non-linear equations of Korteweg-de Vries type, finite-zone linear operators, and Abelian varieties*. Russian Mathematical Surveys, Band 31, Nr. 1, 59–146, 1976.
- [3] O. Forster, *Analysis 2. Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$, gewöhnliche Differentialgleichungen*. 11. Auflage, Springer Spektrum, Wiesbaden, 2017.
- [4] F. Gesztesy und H. Holden, *Soliton Equations and Their Algebro-Geometric Solutions. Volume I: $(1 + 1)$ -Dimensional Continuous Models*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Band 79, Cambridge University Press, Cambridge, 2003.
- [5] R. A. Horn und C. R. Johnson, *Matrix Analysis*. 2. Auflage, Cambridge University Press, Cambridge, 2013.
- [6] M. U. Schmidt, *Reelle algebraisch geometrische Potentiale*. Themenstellung zur Bachelorarbeit, Universität Mannheim, 2026.
- [7] J. H. Silverman, *The Arithmetic of Elliptic Curves*. 2. Auflage, Graduate Texts in Mathematics, Band 106, Springer, New York, 2009.
- [8] G. Teschl, *Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems*. Graduate Studies in Mathematics, Band 140, American Mathematical Society, Providence, RI, 2012.