

Seminararbeit: Ausgewählte Themen gewöhnlicher Differentialgleichungen und dynamischer Systeme

Nikola Schweizer

25.03.2026

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Theorem 5: Produktdarstellung	4
3	Korollar 2: Vorzeichen der Steigung	7
4	Lemma 3: Deformationsinvarianz	9
5	Theorem 6: Anzahl und Symmetrie der Nullstellen	11
5.1	Theorem 6(a): Anzahl der Nullstellen	11
5.2	Theorem 6(b): Symmetrieeigenschaft	12
6	Hilfsresultate	14

1 Einleitung

In der vorliegenden Seminararbeit beschäftigen wir uns mit der **Inversen Spektraltheorie**, speziell im Kontext des Dirichletproblems für Potentiale $q \in L^2$. Das Hauptaugenmerk liegt dabei auf der Untersuchung der Eigenfunktionen g_n und deren Nullstellenverhalten.

Zielsetzung der Arbeit

Das zentrale Ziel dieser Arbeit ist der Beweis und die Erläuterung von **Theorem 6**. Dieses Theorem macht zwei fundamentale Aussagen über die Eigenfunktionen g_n :

1. **Existenz und Anzahl:** Für jedes $q \in L^2$ besitzt die Eigenfunktion g_n (für $n \geq 1$) exakt $n + 1$ Nullstellen im Intervall $[0, 1]$. Zudem wird gezeigt, dass all diese Nullstellen einfach sind.
2. **Symmetrieeigenschaften:** Falls das Potential q symmetrisch ist, weist die Eigenfunktion g_n spezifische Symmetrien auf.

Um dieses Ziel zu erreichen, werden wir schrittweise die notwendigen Werkzeuge erarbeiten. Dazu gehören die Produktdarstellung der Funktion y_2 (Theorem 5), die Untersuchung der Vorzeichen der Steigung (Korollar 2) sowie das Prinzip der Deformationsinvarianz (Lemma 3).

2 Theorem 5: Produktdarstellung

Theorem 5: Für $q \in L^2$ gilt:

$$y_2(1, \lambda, q) = \prod_{m \geq 1} \frac{\mu_m(q) - \lambda}{m^2 \pi^2}$$

Um mit dem unendlichen Produkt $p(\lambda)$ mathematisch arbeiten zu können, muss zunächst dessen Konvergenz gesichert sein. Dies garantiert die Wohldefiniertheit von $p(\lambda)$ als stetige und differenzierbare Funktion, was eine notwendige Grundlage für die weitere Beweisführung darstellt.

Der folgende Satz führt die Konvergenz des Produkts auf eine handhabbare Bedingung für Reihen zurück:

Satz: Das unendliche Produkt $\prod_{m=1}^{\infty} (1 + a_m)$ konvergiert genau dann absolut, wenn die Reihe $\sum_{m=1}^{\infty} |a_m|$ konvergiert.

Beweis: Die absolute Konvergenz des unendlichen Produkts $\prod(1 + a_m)$ lässt sich über den Zusammenhang mit der Reihe seiner Logarithmen untersuchen. Da eine notwendige Bedingung für die Konvergenz des Produkts die Eigenschaft $\lim_{m \rightarrow \infty} a_m = 0$ ist, gilt für hinreichend große m die Abschätzung:

$$|a_m| < 1$$

In diesem Bereich ist der natürliche Logarithmus wohldefiniert, dadurch kann man statt des Produkts die Reihe $\sum \ln(1 + a_m)$ betrachten. Nach Definition konvergiert das Produkt genau dann absolut, wenn diese Reihe absolut konvergiert. Für $|a_m| < 1$ liefert die Taylor-Reihe des Logarithmus die Darstellung:

$$\ln(1 + a_m) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} a_m^k = a_m - \frac{a_m^2}{2} + \frac{a_m^3}{3} - \frac{a_m^4}{4} + \dots$$

Daraus lässt sich das asymptotische Verhalten der Glieder herleiten. Präzise ausgedrückt ergibt sich für den Grenzwert des Quotienten:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + a_m)}{a_m} = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{a_m}{2} + \frac{a_m^2}{3} - \dots \right) = 1$$

An dieser Stelle liefert das Grenzwert-Vergleichskriterium das gewünschte Resultat. Da der Grenzwert des Quotienten

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{|\ln(1 + a_m)|}{|a_m|} = 1$$

eine positive, endliche Zahl ist, zeigen beide Reihen dasselbe Konvergenzverhalten.

Somit konvergiert $\sum |\ln(1 + a_m)|$ genau dann, wenn $\sum |a_m|$ konvergiert.

Folglich ist die absolute Konvergenz der Summe $\sum a_m$ äquivalent zur absolute Konvergenz des Produktes $\prod_{m=1}^{\infty} (1 + a_m)$.

Beweis von Theorem 5: Unter Verwendung der in Theorem 4 hergeleiteten Asymptotik für die Eigenwerte $\mu_m = m^2 \pi^2 + O(1)$ lässt sich die Konvergenz von $p(\lambda)$ explizit nachweisen. Das unendliche Produkt ist definiert durch:

$$p(\lambda) = \prod_{m=1}^{\infty} \frac{\mu_m - \lambda}{m^2 \pi^2}$$

Um den zuvor bewiesenen Satz anzuwenden, wird das Produkt in die Form $\prod(1 + a_m(\lambda))$ überführt. Durch Einsetzen der asymptotischen Darstellung ergibt sich:

$$1 + a_m(\lambda) = \frac{\mu_m - \lambda}{m^2 \pi^2} = \frac{m^2 \pi^2 + O(1) - \lambda}{m^2 \pi^2} = 1 + \frac{O(1) - \lambda}{m^2 \pi^2}$$

Hieraus identifizieren wir die Glieder der Reihe als $a_m(\lambda) = \frac{O(1) - \lambda}{m^2 \pi^2}$. Für ein festes λ gilt:

$$\sum_{m=1}^{\infty} |a_m(\lambda)| = \sum_{m=1}^{\infty} \left| \frac{O(1) - \lambda}{m^2 \pi^2} \right| \leq C(\lambda) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2}$$

wobei $C(\lambda)$ eine von m unabhängige Konstante darstellt. Da die verallgemeinerte harmonische Reihe $\sum \frac{1}{m^2}$ konvergiert, folgt die absolute Konvergenz der Reihe $\sum |a_m(\lambda)|$. Nach dem zuvor gezeigten Äquivalenzsatz konvergiert somit auch das unendliche Produkt $p(\lambda)$ für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ absolut. Damit ist $p(\lambda)$ eine wohldefinierte ganze Funktion, was die Grundlage für den weiteren Vergleich mit der Lösung y_2 bildet.

Zum Vergleich der Lösung $y_2(1, \lambda, q)$ und der Produktdarstellung $p(\lambda)$ wird deren asymptotische Verhalten auf einer Folge komplexer Kreise mit den Radien

$$r_n = \left(n + \frac{1}{2} \right)^2 \pi^2, \quad n \in \mathbb{N}$$

betrachtet. Diese spezifischen Radien stellen sicher, dass die Kreisbahnen in maximalem Abstand zu den ungestörten Eigenwerten $m^2 \pi^2$ verlaufen, dies ermöglicht eine stabile Abschätzung der Produkte.

Basierend auf der Eigenwertasymptotik aus Theorem 4 lässt sich zeigen, dass $p(\lambda)$ auf den Kreisen dem asymptotischen Verhalten des Euler-Produktes des Sinus folgt.

Gemäß Lemma E.2 (siehe Hilfsresultate) gilt die Abschätzung:

$$p(\lambda) = \frac{\sin \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} \left(1 + O\left(\frac{\log n}{n} \right) \right) \quad \text{für } |\lambda| = r_n.$$

Dieser Fehlerterm zeigt, dass die Abweichung von der ungestörten Form $\frac{\sin\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}}$ mit wachsendem Radius r_n verschwindet.

Für die Lösung $y_2(1, \lambda)$ liefert das Basic Estimate:

$$y_2(1, \lambda) = \frac{\sin\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} + O\left(\frac{1}{|\sqrt{\lambda}|} e^{|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}|}\right).$$

Da die Radien r_n einen Mindestabstand zu den Nullstellen des Sinus einhalten, erlaubt Lemma 1 über die Abschätzung $e^{|\operatorname{Im}z|} \leq 4|\sin z|$ das Ausklammern des Hauptterms. Damit wird sichergestellt, dass der Fehlerterm trotz seines exponentiellen Charakters gegenüber dem Sinus vernachlässigbar bleibt, woraus die vereinfachte Asymptotik folgt:

$$y_2(1, \lambda) = \frac{\sin\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \quad \text{für } |\lambda| = r_n.$$

Zum Nachweis der Identität wird der Quotient

$$f(\lambda) := \frac{y_2(1, \lambda, q)}{p(\lambda)}$$

betrachtet. Da beide Funktionen ganz sind und dieselben Nullstellen $\mu_m(q)$ besitzen, ist $f(\lambda)$ eine holomorphe, nullstellenfreie Funktion. Unter Verwendung der hergeleiteten Asymptotiken ergibt sich auf den Kreisen $|\lambda| = r_n$:

$$f(\lambda) = \frac{\frac{\sin\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{\frac{\sin\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} \left(1 + O\left(\frac{\log n}{n}\right)\right)} = 1 + O\left(\frac{\log n}{n}\right).$$

Nach dem Maximumsprinzip nimmt eine holomorphe Funktion ihr Betragsmaximum auf einem kompakten Gebiet stets auf dem Rand an.

Da die Differenz $|f(\lambda) - 1|$ für $n \rightarrow \infty$ auf den Kreisrändern gleichmäßig gegen Null strebt, folgt:

$$\sup_{|\lambda| \leq r_n} |f(\lambda) - 1| = \sup_{|\lambda| = r_n} \left| \frac{y_2(1, \lambda, q)}{p(\lambda)} - 1 \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Dies impliziert $f(\lambda) \equiv 1$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$, woraus die Identität $y_2(1, \lambda, q) = p(\lambda)$ und damit die behauptete Produktdarstellung folgt. \square

3 Korollar 2: Vorzeichen der Steigung

Korollar 2:

(a)

$$\dot{y}_2(1, \mu_n) = -\frac{1}{n^2 \pi^2} \prod_{m \neq n} \frac{\mu_m - \mu_n}{m^2 \pi^2} = \frac{(-1)^n}{2n^2 \pi^2} \left(1 + O\left(\frac{\log n}{n}\right) \right)$$

(b)

$$\operatorname{sgn} \dot{y}_2(1, \mu_n) = (-1)^n = \operatorname{sgn} y_2'(1, \mu_n)$$

Beweis zu (a): Unter Verwendung der Produktdarstellung aus Theorem 5,

$$y_2(1, \lambda, q) = \prod_{m=1}^{\infty} \frac{\mu_m(q) - \lambda}{m^2 \pi^2},$$

erfolgt die Bestimmung von $\dot{y}_2(1, \mu_n)$ durch die partielle Ableitung nach λ unter Anwendung der Produktregel:

$$\dot{y}_2(1, \lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{\mu_k - \lambda}{k^2 \pi^2} \cdot \prod_{m \neq k} \frac{\mu_m - \lambda}{m^2 \pi^2} \right)$$

Bei der Auswertung an der Stelle $\lambda = \mu_n$ verschwinden aufgrund des Faktors $(\mu_m - \mu_n)$ alle Summanden der Reihe, bis auf den Term für $k = n$.

Für die partielle Ableitung dieses n -ten Terms gilt:

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{\mu_n - \lambda}{n^2 \pi^2} = \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{\mu_n}{n^2 \pi^2} - \frac{\lambda}{n^2 \pi^2} \right) = -\frac{1}{n^2 \pi^2}$$

Daraus reduziert sich die gesamte Summe auf den Ausdruck:

$$\dot{y}_2(1, \mu_n) = -\frac{1}{n^2 \pi^2} \prod_{m \neq n} \frac{\mu_m - \mu_n}{m^2 \pi^2}$$

Mithilfe der Eigenwertasymptotik $\mu_m = m^2 \pi^2 + O(1)$ (Theorem 4) und der Anwendung von Lemma E.3 (siehe Hilfsresultate) auf das verbleibende Produkt ergibt sich für große n :

$$\dot{y}_2(1, \mu_n) = -\frac{1}{n^2 \pi^2} \cdot \frac{1}{2} (-1)^{n+1} \left(1 + O\left(\frac{\log n}{n}\right) \right)$$

Zusammengefasst liefert dies die asymptotische Formel:

$$\dot{y}_2(1, \mu_n) = \frac{(-1)^n}{2n^2 \pi^2} \left(1 + O\left(\frac{\log n}{n}\right) \right)$$

□

Beweis zu (b): Das Vorzeichen von $\dot{y}_2(1, \mu_n)$ lässt sich unmittelbar aus der in Korollar 2(a) hergeleiteten Ableitung bestimmen. Für die Analyse des Produkts nutzen wir die strikte Ordnung der Eigenwerte:

$$\mu_1 < \mu_2 < \mu_3 < \dots$$

Daraus folgt für die Differenzen im Zähler:

$$\mu_m - \mu_n < 0 \iff \mu_m < \mu_n \iff m < n$$

Diese Bedingung trifft auf genau $n - 1$ Faktoren zu (für $m = 1, 2, \dots, n-1$), woraus sich für das unendliche Produkt das Vorzeichen $(-1)^{n-1}$ ergibt.

Für den Vorfaktor der Ableitung gilt:

$$\operatorname{sgn} \left(-\frac{1}{n^2 \pi^2} \right) = -1$$

Unter Berücksichtigung beider Komponenten resultiert für das Gesamtvorzeichen:

$$\operatorname{sgn} \dot{y}_2(1, \mu_n) = (-1) \cdot (-1)^{n-1} = (-1)^n$$

Die in Theorem 2 hergeleitete Identität

$$\dot{y}_2(1, \lambda) y_2'(1, \lambda) = \int_0^1 y_2^2(t, \lambda) dt > 0$$

gilt explizit auch für die Eigenwerte $\lambda = \mu_n$. Da das Integral über die quadratische Form stets positiv ist, müssen $\dot{y}_2(1, \mu_n)$ und $y_2'(1, \mu_n)$ notwendigerweise dasselbe Vorzeichen aufweisen. Infolgedessen überträgt sich die Vorzeichenvorschrift unmittelbar auf die Ableitung nach x :

$$\operatorname{sgn} \dot{y}_2(1, \mu_n) = (-1)^n = \operatorname{sgn} y_2'(1, \mu_n)$$

□

4 Lemma 3: Deformationsinvarianz

Lemma 3: Sei h_t mit $0 \leq t \leq 1$ eine Familie reellwertiger Funktionen auf dem Intervall $a \leq x \leq b$, welche gemeinsam stetig differenzierbar in t und x ist. Angenommen, für jedes t besitzt h_t eine endliche Anzahl an Nullstellen in $[a, b]$, die alle einfach sind, und die Randwerte von h_t sind unabhängig von t . Dann besitzen h_0 und h_1 dieselbe Anzahl an Nullstellen in $[a, b]$.

Anschaulich gesprochen bewegen sich die Nullstellen von h_t im Inneren von $[a, b]$, wenn t variiert. Da sie jedoch alle einfach sind, können sie weder kollidieren noch sich aufspalten. Folglich bleibt ihre Anzahl unabhängig von t .

Beweis: Wir betrachten die Abbildung $N : [0, 1] \rightarrow \mathbb{N}_0$, welche jedem Parameter t die Kardinalität der Nullstellenmenge von h_t im Intervall $[a, b]$ zuordnet:

$$N(t) := \#\{x \in [a, b] \mid h_t(x) = 0\}$$

Sei $t \in [0, 1]$ beliebig aber fest. Da h_t nach Voraussetzung nur einfache Nullstellen x_1, \dots, x_k besitzt, lassen sich disjunkte Umgebungen U_i um diese Punkte wählen. Auf dem restlichen Bereich

$$K = [a, b] \setminus \bigcup_{i=1}^k U_i$$

ist h_t nullstellenfrei. Aufgrund der Stetigkeit von h_t existiert auf dem Bereich K eine positive untere Schranke für $|h_t|$.

Die Funktion h_s wird für einen Parameter s in einer Umgebung von t betrachtet:

$$|s - t| < \delta \quad s \in [0, 1], \quad \delta > 0$$

Das Verhalten der Funktion h_s lässt sich auf den disjunkten Bereichen U_i und K charakterisieren. In U_i sichert die stetige Differenzierbarkeit ($h'_t(x_i) \neq 0$), dass h'_s für hinreichend nahe s bei t ungleich Null bleibt; diese lokale Monotonie garantiert die Eindeutigkeit der Nullstelle in U_i . Auf den Zwischenintervallen K hingegen erzwingt die positive untere Schranke von $|h_t|$ zusammen mit der gleichmäßigen Stetigkeit von h , dass h_s dort nullstellenfrei bleibt. Daraus folgt unmittelbar:

$$N(s) = N(t) \quad \forall s \in (t - \delta, t + \delta) \cap [0, 1]$$

Die Funktion N ist somit lokal konstant auf dem Intervall $[0, 1]$.

Da N lokal konstant ist, existiert für jedes $t \in [0, 1]$ eine offene Umgebung V_t , in der N den festen Wert $N(t)$ annimmt. Die Gesamtheit dieser Umgebungen $\{V_t\}_{t \in [0, 1]}$ bildet eine offene Überdeckung des kompakten Intervalls $[0, 1]$.

Nach dem Satz von Heine-Borel existiert eine endliche Teilüberdeckung $V_{t_1}, V_{t_2}, \dots, V_{t_k}$, wobei sich aufeinanderfolgende Umgebungen auf dem Intervall $[0, 1]$ überschneiden.

In jedem Überlappungsbereich $V_{t_j} \cap V_{t_{j+1}}$ muss N aufgrund der lokalen Konstanz die Werte beider Intervalle annehmen:

$$N(t_j) = N(s) = N(t_{j+1}) \quad \text{für } s \in V_{t_j} \cap V_{t_{j+1}}$$

Da sich der Wert von N in den Überschneidungen nicht ändern kann, folgt über die endliche Kette sukzessive:

$$N(0) = N(1)$$

h_0 und h_1 besitzen somit dieselbe Anzahl an Nullstellen auf dem Intervall $[a, b]$.

□

5 Theorem 6: Anzahl und Symmetrie der Nullstellen

5.1 Theorem 6(a): Anzahl der Nullstellen

Theorem 6(a): (a) Für jedes $q \in L^2$ besitzt die Eigenfunktion g_n mit $n \geq 1$ genau $n + 1$ Nullstellen im Intervall $[0, 1]$. Diese sind alle einfach.

Beweis: Wir zeigen als Erstes mithilfe von Widerspruchsbeweisen, dass die Nullstellen der Eigenfunktion g_n einfach sind und ihre Anzahl in $[0, 1]$ endlich ist.

Besäße die Eigenfunktion $g_n(x, q)$ eine doppelte Nullstelle in $[0, 1]$, so müsste sie nach Korollar 1 identisch verschwinden. Da Eigenfunktionen jedoch per Definition nichttrivial sind ($g_n \not\equiv 0$), folgt daraus unmittelbar, dass alle Nullstellen von g_n einfach sein müssen.

Nun nehmen wir an g_n hätte unendlich viele Nullstellen in $[0, 1]$. Da $[0, 1]$ kompakt ist, existiert nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß ein Häufungspunkt $x^* \in [0, 1]$ dieser Nullstellen. Wegen der Stetigkeit von g_n folgt dann

$$g_n(x^*) = 0.$$

Da die Nullstelle einfach ist (wie oben gezeigt), gilt

$$g'_n(x^*) \neq 0.$$

Agrund der Stetigkeit von g'_n existiert somit ein $\delta > 0$ mit

$$g'_n(x) \neq 0 \quad \forall x \in (x^* - \delta, x^* + \delta).$$

Folglich hat g'_n in dieser Umgebung ein konstantes Vorzeichen, und damit ist g_n dort streng monoton. Insbesondere ist g_n auf $(x^* - \delta, x^* + \delta)$ injektiv, sodass es in dieser Umgebung höchstens eine Nullstelle geben kann. Dies steht im Widerspruch dazu, dass x^* ein Häufungspunkt von Nullstellen ist, ansonsten müssten unendlich viele Nullstellen beliebig nahe bei x^* liegen. Also kann g_n nur endlich viele Nullstellen in $[0, 1]$ besitzen.

Wir definieren im nächsten Schritt die Deformation durch:

$$h_t(x) := g_n(x, tq), \quad t, x \in [0, 1]$$

Die Abbildung $(t, x) \mapsto h_t(x)$ ist stetig differenzierbar. Für alle $t \in [0, 1]$ gelten die Dirichlet-Randbedingungen

$$h_t(0) = h_t(1) = 0$$

und dass alle Nullstellen von h_t in $[0, 1]$ einfach und endlich sind (wie zuvor gezeigt).

Da somit alle Voraussetzungen für Lemma 3 erfüllt sind, liefert dessen Anwendung, dass die

Anzahl der Nullstellen $N(h_t)$ für alle $t \in [0, 1]$ konstant bleibt.

Für $t = 0$ (entspricht dem Fall $q = 0$) ist die Eigenfunktion explizit gegeben durch:

$$h_0(x) = \sqrt{2} \sin(n\pi x)$$

Die Anzahl der Nullstellen von h_0 im Intervall $[0, 1]$ entspricht genau $n + 1$.

Aufgrund der Deformationsinvarianz impliziert dies für die Eigenfunktion g_n :

$$N(g_n) = N(h_1) = N(h_0) = n + 1$$

Daraus ergibt sich, dass die Eigenfunktion g_n für ein beliebiges Potential $q \in L^2$ exakt $n + 1$ einfache Nullstellen auf dem Intervall $[0, 1]$ besitzt. \square

5.2 Theorem 6(b): Symmetrieeigenschaft

Theorem 6(b): Ist $q \in L^2$ symmetrisch bezüglich der Intervallmitte $x = \frac{1}{2}$, so ist die Eigenfunktion g_n achsensymmetrisch, wenn n ungerade ist und punktsymmetrisch, wenn n gerade ist.

Beweis: Wir betrachten die gespiegelte Funktion $g_n(1 - x)$. Aufgrund der Kettenregel bleibt das Vorzeichen der zweiten Ableitung wegen der zweifachen inneren Ableitung invariant, sodass gilt:

$$\frac{d^2}{dx^2} g_n(1 - x) = g_n''(1 - x).$$

Einsetzen in die Differentialgleichung unter Berücksichtigung der Symmetrie von q

$$q(x) = q(1 - x) \quad \forall x \in [0, 1]$$

liefert

$$-g_n''(1 - x) + q(1 - x)g_n(1 - x) = -g_n''(1 - x) + q(x)g_n(1 - x) = \mu_n g_n(1 - x),$$

womit $g_n(1 - x)$ ebenfalls eine Eigenfunktion zum Eigenwert μ_n darstellt.

Aufgrund der Eindimensionalität des Eigenraums der Differentialgleichung müssen $g_n(x)$ und $g_n(1 - x)$ linear abhängig sein. Es existiert folglich eine Konstante $C \in \mathbb{R}$ mit

$$g_n(x) = C \cdot g_n(1 - x).$$

Da sowohl $g_n(x)$ als auch die gespiegelte Funktion $g_n(1 - x)$ normiert sind, gilt:

$$\|g_n(x)\|_2 = 1 \quad \text{und} \quad \|g_n(1 - x)\|_2 = 1.$$

Setzt man die lineare Abhängigkeit $g_n(x) = C \cdot g_n(1-x)$ in die Norm ein, folgt unter Anwendung der Homogenität der Norm:

$$1 = \|g_n(x)\|_2 = \|C \cdot g_n(1-x)\|_2 = |C| \cdot \|g_n(1-x)\|_2 = |C| \cdot 1.$$

Daraus folgt $|C| = 1$.

Durch das Ableiten dieser Gleichung unter Anwendung der Kettenregel ergibt sich

$$g'_n(x) = -C \cdot g'_n(1-x).$$

An der Stelle $x = 1$ führt dies zu folgender Relation:

$$g'_n(1) = -C \cdot g'_n(0).$$

Die Konstante C ist somit durch das Verhältnis der Ableitungen an den Rändern bestimmt:

$$C = -\frac{g'_n(1)}{g'_n(0)}.$$

Mithilfe der Konvention $g'_n(0) > 0$ und unter Anwendung von Korollar 2 (b), welches die Voreichenvorschrift

$$\operatorname{sgn}(g'_n(1)) = (-1)^n$$

liefert, folgt unmittelbar

$$C = -(-1)^n = (-1)^{n+1}.$$

Daraus ergibt sich die Symmetrieeigenschaft der Eigenfunktion:

Ist n ungerade, so gilt $C = 1$ und g_n ist achsensymmetrisch. Ist n hingegen gerade, so gilt $C = -1$ und g_n ist punktsymmetrisch. \square

6 Hilfsresultate

Wir verwenden die folgenden Lemmata an dieser Stelle ohne Beweis, da sie Aspekte der Funktionentheorie beinhalten. Aufgrund ihrer Notwendigkeit für zwei zentrale Abschätzungen im Rahmen dieser Seminararbeit sollen sie hier dennoch vermerkt werden.

Lemma E.2: Angenommen, $z_m, m \geq 1$, ist eine Folge komplexer Zahlen, sodass

$$z_m = m^2 \pi^2 + O(1)$$

erfüllt.

Dann ist das unendliche Produkt

$$\prod_{m \geq 1} \frac{z_m - \lambda}{m^2 \pi^2}$$

eine ganze Funktion von λ , deren Nullstellen exakt mit den Werten z_m identisch sind.

Darüber hinaus gilt

$$\prod_{m \geq 1} \frac{z_m - \lambda}{m^2 \pi^2} = \frac{\sin \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} \left(1 + O\left(\frac{\log n}{n}\right) \right)$$

gleichmäßig auf den Kreisen $|\lambda| = (n + \frac{1}{2})^2 \pi^2$.

Lemma E.3: Angenommen $z_m, m \geq 1$, ist eine Folge komplexer Zahlen, sodass

$$z_m = m^2 \pi^2 + O(1)$$

erfüllt.

Dann ist für jedes $n \geq 1$ das Produkt

$$\prod_{\substack{m \geq 1 \\ m \neq n}} \frac{z_m - \lambda}{m^2 \pi^2}$$

eine ganze Funktion von λ , für die

$$\prod_{\substack{m \geq 1 \\ m \neq n}} \frac{z_m - \lambda}{m^2 \pi^2} = \frac{1}{2} (-1)^{n+1} \left(1 + O\left(\frac{\log n}{n}\right) \right)$$

gleichmäßig für $\lambda = n^2 \pi^2 + O(1)$ gilt.