

Das Inverse Dirichlet-Problem I
Seminar Ausgewählte Themen gewöhnlicher
Differentialgleichung

Universität Mannheim
Literatur: J. Pöschel, E. Trubowitz: Inverse Spectral Theory
Prof. Dr. Martin Schmidt

Quynh Huong Nguyen

24. Mai 2026

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
1.1	Wiederholung Kapitel 2	3
1.2	Vorbereitung	4
2	Theorem 1	4
3	Lemma 1	6
4	Theorem 2	6
4.1	Vorbereitung	6
5	Lemma 2	8
6	Theorem 3	9

1 Einleitung

In Kapitel 2 sind wir zu dem Resultat gekommen, dass zu jedem Potential q , ein Dirichlet-Spektrum gehört. In Kapitel 3 hingegen, stellen wir nun die umgekehrte Frage, ob man aus jedem Dirichlet-Spektrum wieder ein Potential q rekonstruieren kann.

Diese Fragestellung wird in Kapitel 3 in zwei Teilen behandelt. Zuerst die Beschreibung des isospektralen Paares $M(p)$ für alle p in L^2 . Zweitens, die Charakterisierung aller Folgen von reellen Zahlen, welche als Dirichlet-Spektrum für manche q in L^2 auftreten können. Die hier vorliegende Ausarbeitung gilt als Vorbereitung bevor diese im weiteren Verlauf von Kapitel 3 behandelt werden.

Um das inverse Dirichlet-Problem systematisch untersuchen zu können, betrachtet man das Spektrum nun nicht mehr nur als einzelne Eigenwerte, sondern als Punkt in einem Folgenraum. Dies ermöglicht, dass das inverse Problem als eine Analyse einer Abbildung zwischen Funktionenräumen verstanden werden kann.

1.1 Wiederholung Kapitel 2

In Kapitel 2 wurde das Dirichlet-Problem zu der Differentialgleichung

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad 0 \leq x \leq 1$$

mit den Randbedingungen

$$y(0) = 0, y(1) = 0$$

untersucht. Dabei beschreibt $q \in L^2$ das Potential und $\lambda \in \mathbb{C}$ den Spektral-Parameter. Ein Wert λ heißt Dirichlet-Eigenwert von q , falls das Dirichlet-Problem eine nichttriviale Lösung besitzt. Nichttrivial bedeutet $y \neq 0$, da die Nullfunktion die Differentialgleichung stets erfüllt. Die Menge aller Eigenwerte bildet das sogenannte Dirichlet-Spektrum von q . Die dazugehörigen Eigenwerte werden mit

$$\mu_n(q), n \geq 1$$

bezeichnet und bilden nach Kapitel 2 eine streng wachsende Folge reeller Zahlen mit der asymptotischen Darstellung

$$\mu_n = n^2\pi^2 + c + \ell^2(n),$$

wobei $c = \int_0^1 q(t)dt$

den Mittelwert des Potentials beschreibt. Die Notation ℓ^2 bezeichnet den Raum aller quadratsummierbaren Folgen, während $\ell^2(n)$ einen Fehlerterm beschreibt, dessen Folge in ℓ^2 liegt. Eine wichtige Rolle spielen zudem die Fundamentallösungen y_1 und y_2 der Gleichung

$$-y'' + q(x)y = \lambda y$$

mit den Anfangsbedingungen

$$y_1(0, \lambda, q) = 1, y_1'(0, \lambda, q) = 0$$

und

$$y_2(0, \lambda, q) = 0, y_2'(0, \lambda, q) = 1$$

Dabei entsprechen die Dirichlet-Eigenwerte genau den Nullstellen von

$$y_2(1, \lambda, q)$$

Des Weiteren werden in Kapitel 2 die normierten Eigenfunktionen

$$g_n(x, q)$$

eingeführt, welche zu den Eigenwerten $\mu_n(q)$ gehören. Im weiteren Verlauf wird außerdem häufig die Schreibweise

$$[q] := \int_0^1 q(t) dt$$

für den Mittelwert des Potentials verwendet.

1.2 Vorbereitung

Um die untersuchte Frage von Kapitel 3 systematisch zu formulieren, führt man den Raum S ein. Dabei werden die Potentiale q als Punkte im Raum L^2 und die Spektren im Raum S betrachtet. Anstatt also direkt mit Differentialgleichungen zu arbeiten, untersucht man die Struktur einer Abbildung $\mu : L^2 \rightarrow S$. Der Raum S besteht aus allen reellen, streng wachsenden Folgen $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots)$ die die Form

$$\sigma_n = n^2\pi^2 + s + \tilde{\sigma}_n$$

besitzen. Dabei ist $s \in \mathbb{R}$ eine Konstante und $\tilde{\sigma} = (\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2, \dots) \in \ell^2$ eine quadratsummierbare Folge. Der Raum S beschreibt also genau die Art von Folgen, die als mögliche Dirichlet-Spektren infrage kommen. Die Spektral-Abbildung wird dann geschrieben als

$$q \mapsto \mu(q) = (\mu_1(q), \mu_2(q), \dots)$$

Nach Theorem 2.4 geht die Abbildung genau von L^2 in den Raum S . Sie ordnet jedem Potential q seine Folge von Dirichlet-Eigenwerten zu. Für ein festes p ist die isospektrale Menge

$$M(p) = \mu^{-1}(\mu(p)) = \{q \in L^2 : \mu(q) = \mu(p)\}.$$

die Menge aller Potentiale q , die dasselbe Dirichlet-Spektrum wie p besitzen. Für die Analyse schreibt man das Spektrum in Standardkoordinaten von S . Betrachte die Zuordnung zwischen σ und $(s, \tilde{\sigma})$. Diese ist eine bijektive Abbildung zwischen S und der offenen Teilmenge von $\mathbb{R} \times \ell^2$. Sei S genau diese und betrachte $(s, \tilde{\sigma})$ als Standardkoordinatensystem auf S . Statt also direkt mit $\mu_n(q)$ zu arbeiten, trennt man Hauptterm und Mittelwert ab:

$$\tilde{\mu}_n(q) = \mu_n(q) - n^2\pi^2 - [q].$$

Dann wird die Spektral-Abbildung zu

$$q \mapsto ([q], \tilde{\mu}(q))$$

Diese Spektral-Zerlegung in den Mittelwert des Potentials und eine quadratsummierbare Restfolge, ermöglicht das Problem als Abbildung zwischen Funktionenräumen zu betrachten. Dadurch kann man Methoden der Analyse anwenden.

2 Theorem 1

Theorem 1:

Die Abbildung μ ist reel-analytisch von L^2 nach S . Die Ableitung an der Stelle q ist die lineare Abbildung von L^2 nach $\mathbb{R} \times \ell^2$. Gegeben als

$$d_q\mu(v) = ([v], \langle g_n^2 - 1, v \rangle, n \geq 1)$$

Beweis:

Wir fixieren ein p in L^2 , wobei N eine ganze Zahl ist. Nach Analytizität der Drichlet-Eigenwerte, existiert eine komplexe Umgebung $U_N \subset L^2_{\mathbb{C}}$ von p , so dass μ_1, \dots, μ_N sich zu analytischen Funktionen auf U_N fortsetzen lassen. Da wir die analytischen Methoden nur innerhalb einer komplexen Umgebung anwenden können.

Wobei die Eigenwerte als normale Nullstellen von $y_2(1, \lambda)$ verbleiben. Wir zeigen im Folgendem, dass eine solche Umgebung U_N unabhängig von N gewählt werden kann. Das heißt also, dass sich alle Eigenwerte analytisch auf eine komplexe Umgebung von p fortsetzen lassen.

Wähle ein $N > 2e^{\|p\|}$, was uns in des weiteren Schritten ermöglicht das Counting Lemma anzuwenden. Sei des $V \subset L^2_{\mathbb{C}}$ eine komplexe Umgebung von p . V ist in dieser Instanz nun der Raum in welcher wir arbeiten. So dass gilt:

$$2e^{\|p\|} < N, q \in V.$$

Nach dem Counting Lemma, welches mit $2e^{\|p\|} < N, q \in V$. die Lage der Nullstelle von $y_2(1, \lambda)$ kontrolliert, existiert genau eine einfache Nullstelle von $\hat{\mu}(q)$ von $y_2(1, \lambda, q)$ in der eiförmigen Umgebung $|\sqrt{\lambda} - n\pi| < \pi/2$ für alle $n > N$ und $q \in V$. Für große n liegt also genau ein Eigenwert im Gebiet $n^2\pi^2$. Des weiteren, für ein reelles q , gilt $\hat{\mu}(q) = \mu_n(q)$, $q \in V \cap L^2_{\mathbb{R}}$. Die neu konstruierte Nullstelle ist also genau der gewöhnliche Drichlet-Eigenwert.

Es folgt von dem Impliziten Funktionstheorem, dass $\hat{\mu}_n$ eine analytische Fortsetzung von μ_n in V ist. Deshalb gilt für alle Eigenwerte μ_1, μ_2, \dots , dass diese auf dem komplexen Raum $U = U_N \cap V$ von p , analytisch fortgesetzt werden, wobei diese als normale Nullstellen von $y_2(1, \lambda)$ verbleiben.

Es gibt eine ähnliche Fortsetzung von

$$g_n^2(x, q) = \frac{(y_2^2(x, \mu_n, q))}{(\dot{y}(1, \mu_n, q)y_2'(1, \mu_n, q))}, n \geq 1$$

in den Raum U , da $\dot{y}(1, \mu_n) \neq 0$ und $y_2'(1, \mu_n) \neq 0$ nach Konstruktion gilt. Die normierte Eigenfunktion g_n wird in Kapitel 2 mit

$$g_n = \frac{y_2(x, \mu_n)}{\sqrt{\dot{y}_2(1, \mu_n)y_2'(1, \mu_n)}},$$

ausgedrückt. Auch dieser Ausdruck hängt analytisch von q ab. Das gilt, da $y_2(x, \lambda, q)$ analytisch von (λ, q) abhängt, $\mu_n(q)$ analytisch von q und der Nenner nicht verschwindet Wie bereits im Beweis von Theorem 2.4 gezeigt wurde, hier aber in der komplexen Umgebung, kommt man zum Resultat, dass

$$\mu_n(q) = n^2\pi^2 + [q] - \langle \cos(2n\pi x), q \rangle + \mathcal{O}(1/n)$$

gleichmäßig auf U ist. Daraus folgend die Abbildung $\mu(q) = ([q], \tilde{\mu}(q))$ eine beschränkte Abbildung von U im komplexifizierten Raum $\mathbb{R} \times \ell^2$ ist, deren Koeffizienten analytisch sind. Hier wird ein allgemeiner Satz des Appendix A verwendet. Wenn nämlich eine Banachraum-wertige Abbildung komponentenweise analytisch und lokal beschränkt ist, so ist die gesamte Abbildung analytisch. Nach dem Theorem A.3, ist die Abbildung μ selbst analytisch auf U . Die Ableitung von μ ist gegeben der Ableitungen der Komponente. Sodass wir haben

$$\frac{\partial \tilde{\mu}_n(q)}{\partial q} = g_n^2 - 1$$

nach dem Theorem 2.3. Die vorherig vorgestellten Argumente gelten für alle p in L^2 . Weshalb also μ reel analytisch auf L^2 ist.

q.e.d

3 Lemma 1

Sei $q^* = q(1 - x)$, die Spiegelung von q .

Lemma 1:

$$\mu(q^*) = \mu(q).$$

Das Dirichlet-Problem kann nicht zwischen rechts und links unterscheiden.

Beweis:

Sei $g_n(x)$ die Eigenfunktion zu q mit Eigenwert $\mu_n(q)$

$\hookrightarrow g_n^*(x) = g_n(1 - x)$ ist die Eigenfunktion zu q^* mit gleichem Eigenwert $\mu_n(q^*) = \mu_n(q)$.

1) DGL bleibt gleich:

Setze $x \rightarrow 1 - x$, $q(x) \rightarrow q(1 - x) = q^*(x)$:

$$-y'' + q(x) = \lambda y, \quad -y'' + q^*(x) = \lambda y$$

Die Spiegelung $x \rightarrow 1 - x$ erhält die Form der Differentialgleichung.

2) Dirichlet-Randbedingungen bleiben erhalten:

Für $g_n^*(x) = g_n(1 - x)$:

$$g_n^*(0) = g_n(1 - 0) = g_n(1) = 0, \quad g_n^*(1) = g_n(1 - 1) = g_n(0) = 0$$

3) Die Anzahl der Nullstellen bleibt gleich. Nach dem Theorem 2.6, hat der n -te Eigenwert, $n+1$ Nullstellen, die Spiegelung ändert deren Anzahl nicht.

$$\implies \mu(q^*) = \mu(q)$$

q.e.d

Wir sind im Lemma 1 also nun zu dem Resultat gekommen, dass das inverse Problem nicht einfach eindeutig lösbar ist. Im Folgenden bauen wir ein detaillierteres Verständnis, warum ohne besondere Bedingungen, das Inverse Dirichlet-Problem nicht eindeutig lösbar ist. Wir bauen ebenfalls einige Bedingungen auf, die das Lösen des Problems teilweise ermöglichen.

4 Theorem 2

4.1 Vorbereitung

Ein kleiner, aber aufschlussreicher Schritt zum Verständnis des Verhalten von μ besteht darin, seine Ableitung bei $q = 0$ zu beobachten. Sie ist die lineare Abbildung von L^2 nach $\mathbb{R} \times \ell^2$, gegeben durch

$$v \mapsto ([v], -\langle \cos(2n\pi x), v \rangle, n \geq 1),$$

denn für $q = 0$ gilt

$$\frac{\partial \bar{\mu}_n}{\partial q} = g_n^2(x, 0) - 1$$

Eine kleine Änderung v des Potentials, verändert das Spektrum zuerst nur über $[v]$ und die Kosinus-Fourier-Koeffizienten von v .

$$= 2 \sin^2(\pi n x) - 1$$

$$= -\cos(2\pi n x).$$

Dadurch sieht man, dass das Dirichlet-Spektrum nahe $q=0$ nur den geraden Anteil von q erkennt. Der ungerade Anteil bleibt in erster Ordnung unsichtbar. Der Kern Ableitung besteht aus den ungeraden Funktionen. Aufgrund dessen, wird der Raum in gerade und ungerade Funktionen, bezüglich $x = \frac{1}{2}$, aufgespalten.

$U = \{q \in L^2 : q^* = -q\}$ Raum der ungeraden Funktionen

$E = \{q \in L^2 : q^* = q\}$ Raum der geraden Funktionen

Man definiert $\mu_E := \mu|_E$. Man beschränkt also die Spektral-Abbildung auf gerade Funktionen. Man macht dies, da auf ganz L^2 die Ableitung bei 0 nicht invertierbar ist, sie besitzt den gesamten Raum U im Kern. Aber auf E ist die Ableitung invertierbar.

$d_0\mu_E$ ist ein linearer Isomorphismus, genauer eine Isometrie zwischen E und $\mathbb{R} \times \ell^2$ nach Theorie der Fourier-Reihen. Um diese Beobachtung auszunutzen, sei μ_E die Einschränkung von μ auf E . Nach dem vorherigen Abschnitt gilt

$$d_0\mu_E = (d_0\mu)|_E$$

und dies ist eine beschränkt invertierbare Abbildung zwischen E und $\mathbb{R} \times \ell^2$. Aus dem Satz über die inverse Funktion folgt daher, dass μ_E ein reell-analytischer Isomorphismus zwischen einer Umgebung von 0 in E und einer Umgebung von $\mu(0) = (n^2\pi^2, n \geq 1)$ in S ist. Folglich ist jede kleine, aber beliebige Störung der Folge $n^2\pi^2, n \geq 1$, das Dirichlet-Spektrum einer geraden Funktion.

Der Hilbertraum L^2 zerfällt in die direkte Summe

$$L^2 = E \oplus U, q = e + u, \mu(q) = \mu(e, u)$$

Beispiel, warum das Spektrum im allgemeinen das Potential q nicht eindeutig auf dem gesamten L^2 bestimmt:

Für das Potential $q = 0$, Definiere $u \mapsto e(u)$, Zwischen der Umgebung von 0 in U und 0 in E . Das bedeutet, dass zu jedem ungeraden u , liefert $e(u)$ einen geraden Anteil. So dass man für jede Störung u , eine Korrektur $e(u)$ findet, damit diese das gleiche Spektrum wie $q = 0$ besitzt.

Da $u \in U$ beliebig gewählt werden kann und U unendlich dimensional ist, erhält man unendlich viele Potentiale mit demselben Spektrum.

$$\mu(e(u), u) = \mu(0) = \mu(q), e(0) = 0$$

Das Spektrum bestimmt somit das Potential nicht eindeutig.

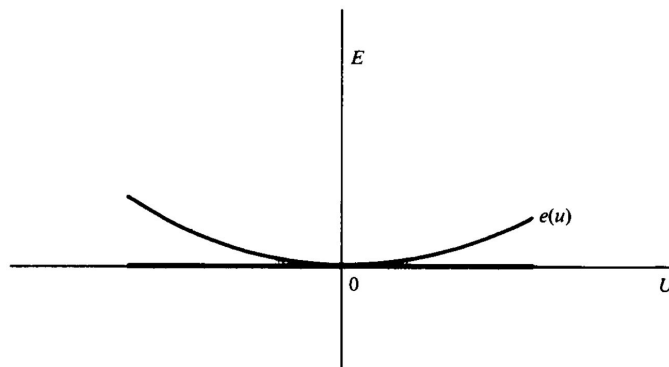


Abbildung 1

Theorem 2:

μ_E ist lokal analytisch umkehrbar auf jedem Punkt in E .

Beweis:

Für den Beweis, wird der implizite Funktionssatz verwendet. Dieser besagt, wenn eine analytische Abbildung an einem Punkt eine invertierbare Ableitung hat, dann ist sie in einer Umgebung dieses Punktes lokal invertierbar.

z.z. Die Ableitung von μ_E ist in jedem Punkt $q \in E$ beschränkt invertierbar.

In den Standardkoordinaten auf S , ist eine lineare Abbildung von E nach $\mathbb{R} \times \ell^2$ gegeben als

$$v \rightarrow ([v], \langle g_n^2 - 1, v \rangle, n \geq 1) = (\langle 1, v \rangle, \langle g_n^2 - 1, v \rangle, n \geq 1),$$

weil $[v] = \int_0^1 v(x) dx = \langle 1, v \rangle$.

An jedem Punkt in E , ist der Vektor $1, g_n^2 - 1, n \geq 1$ die Basis von E , laut Theorem 2.9. Dann kann jede Funktion $v \in E$ eindeutig durch diese Basis beschrieben werden. Daraus folgt also, dass $d_q \mu_E$ in jedem Punkt von E beschränkt invertierbar ist.

q.e.d.

Für den Beweis des Theorems 3 benötigen wir die Erkenntnisse des folgenden Lemmas, wobei wir einen Exkurs in die komplexe Analysis machen.

5 Lemma 2

Lemma 2:

Sei f eine meromorphe Funktion in der Ebene. Falls

$$\sup_{|\lambda|=r_n} |f(\lambda)| = o\left(\frac{1}{r_n}\right)$$

für eine unbeschränkte Folge positiver reeller Zahlen r_n gilt, dann ist die Summe der Residuen von f gleich 0. Insbesondere gilt: Wenn alle Residuen von f nicht negativ sind, dann sind sie alle gleich 0. Die Residuen müssen nicht absolut summierbar sein. Deshalb kann ihre Summe davon abhängen, in welcher Reihenfolge sie addiert werden.

Wir definieren die Summe alle Residuen mithilfe des Cauchyschen Residuensatzes als den Grenzwert der Partialsummen.

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r_n} f(\lambda) d\lambda$$

Beweis:

Die Summe der Residuen von f ist nach Definition

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r_n} f(\lambda) d\lambda$$

Aber

$$\left| \int_{|\lambda|=r_n} f(\lambda) d\lambda \right| \leq \int_{|\lambda|=r_n} |f(\lambda)| |d\lambda|$$

$$\begin{aligned}
&= o\left(\frac{1}{r_n}\right) \int_{|\lambda|=r_n} |d\lambda| \\
&= o\left(\frac{1}{r_n}\right) O(r_n) \\
&= o(1),
\end{aligned}$$

also ist die Summe gleich 0.

q.e.d

6 Theorem 3

Jeder Eigenwert μ_n , $n \geq 1$, ist nach Theorem 2.3 eine kompakte Funktion auf L^2 . Andererseits ist μ_E nach dem vorhergehenden Theorem offen und daher nicht kompakt.

Es stellt sich heraus, dass μ_E nicht nur lokal, sondern sogar global injektiv ist. Mit anderen Worten: Eine gerade Funktion wird eindeutig durch ihr Dirichlet-Spektrum bestimmt.

Theorem 3:

μ_E ist eindeutig auf E.

Beweis:

Angenommen q und p sind gerade Funktionen, mit $\mu(q) = \mu(p)$.

z.z. Es gilt $q = p$:

Wir konstruieren die meromorphe Funktion

$$-\frac{((y_2(x, \lambda, q) - y_2(x, \lambda, p))(y_2(1-x, \lambda, q) - y_2(1-x, \lambda, p)))}{y_2(1, \lambda, q)}.$$

Sie besitzt einfache Pole bei μ_n , $n \geq 1$, und ist sonst regulär. Als Konsequenz aus Theorem 2.6 gilt

$$y_2(x, \mu_n) = (-1)^{n+1} y_2(1-x, \mu_n), n \geq 1$$

sowohl für q als auch für p. Daraus folgt, dass das Residuum unserer Funktion bei μ_n gegeben ist durch

$$\frac{[y_2(x, \mu_n, q) - y_2(x, \mu_n, p)]^2}{(-1)^n y_2(1, \mu_n, q)} \geq 0$$

unter Verwendung von Teil (b) aus Korollar 2.2. Nun zeigen wir, dass unsere Funktion die Voraussetzungen von Lemma 2 für $r_n = (n + \frac{1}{2})^2 \pi^2$. erfüllt.

Wir schätzen zuerst den Zähler von oben ab. Aus dem Theorem 1.3 gilt für y_2 :

$$|y_2(x, \lambda, q)| \leq C \frac{e^{|Im \sqrt{\lambda}|x}}{|\sqrt{\lambda}|}.$$

Das gleiche gilt ebenfalls für p. Da der Ausdruck eine Differenz ist, benutzt man die Dreiecksungleichung:

$$|y_2(x, \lambda, q) - y_2(x, \lambda, p)| \leq |y_2(x, \lambda, q)| + |y_2(x, \lambda, p)|$$

Beide haben dieselbe Art von Abschätzung:

$$|y_2(x, \lambda, q) - y_2(x, \lambda, p)| \leq C \frac{e^{|Im\sqrt{\lambda}|x}}{|\sqrt{\lambda}|}$$

und

$$|y_2((1-x), \lambda, q) - y_2((1-x), \lambda, p)| \leq C \frac{e^{|Im\sqrt{\lambda}|(1-x)}}{|\sqrt{\lambda}|}$$

Nach Theorem 1.3 wird ihr Zähler also von oben durch ein konstantes Vielfaches von

$$\frac{e^{(|Im\sqrt{\lambda}|x)}}{|\lambda|} \frac{e^{|Im\sqrt{\lambda}|(1-x)}}{|\lambda|} = \frac{e^{|Im\sqrt{\lambda}|}}{|\lambda|^2}$$

abgeschätzt. Um den Nenner von unten abzuschätzen, beobachten wir:

$$|y_2(1, \lambda, q) - \frac{\sin\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}}| \leq \frac{e^{\|q\|}}{\sqrt{\lambda}} \frac{e^{|Im\sqrt{\lambda}|}}{\sqrt{\lambda}} \leq \frac{1}{8} \frac{e^{|Im\sqrt{\lambda}|}}{|\sqrt{\lambda}|}$$

für $|\sqrt{\lambda}| \geq 8e^{\|q\|}$. Dies ist eine direkte Abschätzung aus Theorem 1.3. Nach dem Lemma 2.1 gilt also:

$$\begin{aligned} |y_2(1, \lambda, q)| &= \left| \frac{\sin\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} + (y_2(1, \lambda, q) - \frac{\sin\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}}) \right| \\ &\geq \left| \frac{\sin\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} \right| - |y_2(1, \lambda, q) - \frac{\sin\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}}| \\ &\geq \frac{1}{4} \frac{e^{|Im\sqrt{\lambda}|}}{|\sqrt{\lambda}|} - \frac{1}{8} \frac{e^{|Im\sqrt{\lambda}|}}{|\sqrt{\lambda}|} \\ &\geq \frac{1}{8} \frac{e^{|Im\sqrt{\lambda}|}}{|\sqrt{\lambda}|} \end{aligned}$$

Der Quotient der beiden Abschätzungen ist $O(\frac{1}{r_n^{3/2}}) = o(\frac{1}{r_n})$ wie gefordert. Also ist Lemma 2 anwendbar, und daraus folgt dann $y_2(x, \mu_n, q) = y_2(x, \mu_n, p)$, $n \geq 1$. Damit besitzen q und p nicht nur dasselbe Dirichlet-Spektrum, sondern auch dieselben Eigenfunktionen. Dieses Resultat ist sogar stärker als notwendig. Wenn nämlich bereits $y_2(x, \mu_n, q) = y_2(x, \mu_n, p)$ gilt, dann folgt aus der Differentialgleichung

$$qy_2 = \mu_1(q)y_2 + y_2'' = \mu_1(p)y_2 + y_2'' = py_2$$

Daher gilt $q = p$ fast überall.

q.e.d.