Seminar ausgewählte Themen gewöhnlicher Differentialgleichungen

Isospektralmengen II

Schriftliche Ausarbeitung

David Podgorac
Universität Mannheim
20. Mai 2026

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

Sei $p \in L^2[0,1]$ fest gewählt. Die isospektrale Menge zu p ist definiert durch

$$M(p) = \{q \in L^2[0,1] \colon \mu_n(q) = \mu_n(p) \text{ für alle } n \geq 1\}.$$

Das bedeutet: $M(p)$ besteht aus allen Potentialen q, die dasselbe Dirichlet-Spektrum wie das feste Potential p besitzen. Zusätzlich existiert ein reell-analytisches Koordinatensystem auf $M(p)$

$$\kappa = (\kappa_1, \kappa_2, \dots)$$

mit $\kappa(M(p)) \subset \ell_1^2$. Die grundlegenden Tangentialrichtungen auf $M(p)$ sind durch

$$V_n(q) = 2\frac{d}{dx}g_n^2$$

gegeben, wobei g_n die normierte Dirichlet-Eigenfunktion zum Eigenwert $\mu_n(q)$ ist. Die Stärke der Bewegung in Richtung der V_n wird beschrieben durch die Folge

$$\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in \ell_1^2.$$

Jedes isospektrale Set ist eine reell-analytische Untermannigfaltigkeit von L^2, die isomorph zu einer offenen Teilmenge von ℓ_1^2 ist. Sei $M(p)$ eine isospektrale Untermannigfaltigkeit und sei $q \in M(p)$. Jeder Tangentialvektor an $M(p)$ im Punkt q hat die Form

$$V_\xi = \sum_{n \geq 1} \xi_n V_n.$$

Da die V_n global auf $M(p)$ definiert sind, bestimmt die Folge ξ an jedem Punkt von $M(p)$ einen Tangentialvektor. Wir wissen aus Kapitel 2, dass gilt

$$\frac{\partial \mu_n}{\partial q} = g_n^2 \quad \Longrightarrow \quad V_n = 2\frac{d}{dx}\frac{\partial \mu_n}{\partial q}.$$

Mit Lemma 3 folgt also

$$\begin{aligned} d_q\mu_m(V_n) &= \left\langle \frac{\partial \mu_m}{\partial q}, V_n \right\rangle \\ &= 2\left\langle \frac{\partial \mu_m}{\partial q}, \frac{d}{dx}\frac{\partial \mu_n}{\partial q} \right\rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

Also ändert V_n die Eigenwerte μ_m nicht.Damit ist V_n eine Richtung innerhalb von $M(p)$, also gilt

$$V_n(q) \in T_qM(p).$$

Da jedes V_n tangential an $M(p)$ ist, ist auch die Linearkombination V_ξ tangential an $M(p)$. Also gilt

$$V_\xi(q) \in T_qM(p).$$

Das heißt V_ξ ist ein Vektorfeld auf $M(p)$. Somit entsteht ein global definiertes Vektorfeld auf $M(p)$, das wieder mit V_ξ bezeichnet wird und es gilt:

$$V_\xi \cong T_q M(p) \cong \ell_1^2.$$

Wir betrachten nun die Lösungskurven des Vektorfeldes V_ξ. Eine Kurve

$$\phi^t(q) = \phi^t(q, V_\xi), \qquad a < t < b,$$

auf $M(p)$ heißt Lösungskurve von V_ξ mit Anfangswert q, falls gilt

$$\frac{d}{dt}\phi^t(q) = V_\xi(\phi^t(q)), \qquad a < t < b, \qquad \phi^0(q) = q$$

Die Geschwindigkeit der Kurve zum Zeitpunkt t ist der Wert des Vektorfeldes V_ξ am Punkt $\phi^t(q)$. Die Bahn, die dadurch entsteht, ist die Lösungskurve. Da V_ξ tangential an $M(p)$ ist, bleibt die Lösungskurve auf $M(p)$. Wir betrachten nun die Geradendarstellung in den κ-Koordinaten. Mit Lemma 3 und Theorem 1* folgt:

$$\begin{aligned} d_q\kappa_m(V_n) &= \left\langle \frac{\partial \kappa_m}{\partial q}, V_n \right\rangle \\ &= 2\left\langle \frac{\partial \kappa_m}{\partial q}, \frac{d}{dx}\frac{\partial \mu_n}{\partial q} \right\rangle \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2}\delta_{mn} \\ &= \delta_{mn}. \end{aligned}$$

Wegen

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 1, & m = n, \\ 0, & m \neq n. \end{cases}$$

ändert das Vektorfeld V_n nur die n-te κ_m-Koordinate mit Geschwindigkeit 1; alle anderen κ_m-Koordinaten bleiben unverändert. Damit folgt für $V_\xi = \sum_{n\geq 1} \xi_n V_n$:

$$\begin{aligned} d_q\kappa_m(V_\xi) &= d_q\kappa_m\left(\sum_{n\geq 1} \xi_n V_n\right) \\ &= \sum_{n\geq 1} \xi_n d_q\kappa_m(V_n) \\ &= \sum_{n\geq 1} \xi_n \delta_{mn} \\ &= \xi_m \quad \Longrightarrow \quad d_q\kappa(V_\xi) = \xi \end{aligned}$$

Nach Theorem 1* wird somit das Vektorfeld V_ξ im κ-Koordinatensystem auf $M(p)$ zu dem konstanten Vektorfeld ξ. Daher ist jede Lösungskurve in diesen Koordinaten eine Gerade. Für die Lösungskurve gilt daher

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\kappa(\phi^t(q)) &= d_{\phi^t(q)}\kappa\left(\frac{d}{dt}\phi^t(q)\right) \\ &= d_{\phi^t(q)}\kappa\left(V_\xi(\phi^t(q))\right) \\ &= \xi. \end{aligned}$$

Durch Integration nach t erhält man

$$\begin{aligned}
\kappa(\phi^t(q)) &= \kappa(\phi^0(q)) + \int_0^t \frac{d}{ds}\kappa(\phi^s(q))\,ds \\
&= \kappa(\phi^0(q)) + \int_0^t \xi\,ds \\
&= \kappa(q) + t\xi.
\end{aligned}$$

Somit ist die Lösungskurve in diesen Koordinaten die Gerade

$$\kappa(\phi^t(q, V_\xi)) = \kappa(q) + t\xi.$$

Die Gleichung $\kappa(\phi^t(q, V_\xi)) = \kappa(q) + t\xi$ beschreibt die Lösungskurve zunächst nur in Koordinaten. Um daraus wieder ein Potential auf $M(p)$ zu erhalten, verwendet man die Umkehrabbildung

$$\kappa^{-1} \colon \kappa(M(p)) \to M(p).$$

Daraus folgt außerdem, dass

$$\phi^t(q, V_\xi) = \kappa^{-1}\big(\kappa(q) + t\xi\big)$$

eine analytische Funktion von t, ξ und q ist, solange gilt:

$$\kappa(q) + t\xi \in \kappa(M(p))$$

Das Ziel ist es jetzt zu zeigen, dass wir $M(p)$ global durch die κ-Koordinaten parametrisieren können. Genauer soll gezeigt werden:

$$\phi^t(q, V_\xi) \qquad \text{existiert für alle Zeiten t.}$$

In den κ-Koordinaten bedeutet das, dass $\kappa(q) + t\xi$ niemals das Koordinatenbild $\kappa(M(p))$ verlässt.

2 Lemma 1

Lemma 1. *Für $n \geq 1$ gilt*

$$\langle q, V_n \rangle = 4\delta_n(q) \sinh \kappa_n(q),$$

wobei

$$\delta_n(q) = \frac{(-1)^n}{\dot{y}_2(1, \mu_n)}.$$

Beweis. Nach Definition gilt

$$V_n = 2\frac{d}{dx}g_n^2.$$

Wir berechnen zunächst den Hilfsausdruck

$$\left\langle q, \frac{d}{dx}g_n^2 \right\rangle.$$

Also folgt

$$\left\langle q, \frac{d}{dx} g_n^2 \right\rangle = \int_0^1 2 q g_n g_n' \, dx.$$

Die Dirichlet-Eigenfunktion g_n erfüllt die Differentialgleichung

$$-g_n'' + q g_n = \mu_n g_n.$$

Daraus folgt

$$q g_n = g_n'' + \mu_n g_n.$$

Einsetzen liefert

$$\begin{aligned} \left\langle q, \frac{d}{dx} g_n^2 \right\rangle &= \int_0^1 2(g_n'' + \mu_n g_n) g_n' \, dx \\ &= \int_0^1 \left(2 g_n'' g_n' + 2\mu_n g_n g_n'\right) \, dx. \end{aligned}$$

Nun gilt

$$2 g_n'' g_n' = \frac{d}{dx} (g_n')^2$$

und da μ_n nicht von x abhängt,

$$2\mu_n g_n g_n' = \frac{d}{dx} (\mu_n g_n^2).$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \left\langle q, \frac{d}{dx} g_n^2 \right\rangle &= \int_0^1 \frac{d}{dx} \left((g_n')^2 + \mu_n g_n^2\right) \, dx \\ &= \left[(g_n')^2 + \mu_n g_n^2\right]_0^1 = \left(g_n'(1))^2 + \mu_n g_n(1)^2 - ((g_n'(0))^2 + \mu_n g_n(0)^2\right). \end{aligned}$$

Da g_n eine Dirichlet-Eigenfunktion ist, gilt

$$g_n(0) = 0, \qquad g_n(1) = 0.$$

Also folgt

$$\left[(g_n')^2 + \mu_n g_n^2\right]_0^1 = (g_n'(1))^2 - (g_n'(0))^2.$$

Nach Theorem 2.2 gilt für die normierte Dirichlet-Eigenfunktion

$$g_n(x) = \frac{y_2(x, \mu_n)}{\sqrt{\dot{y}_2(1, \mu_n) y_2'(1, \mu_n)}}.$$

Daher ist

$$g_n'(x) = \frac{y_2'(x, \mu_n)}{\sqrt{\dot{y}_2(1, \mu_n) y_2'(1, \mu_n)}}.$$

Somit erhält man

$$\begin{aligned}(g_n'(1))^2 - (g_n'(0))^2 &= \left.\frac{\big(y_2'(x,\mu_n)\big)^2}{\dot y_2(1,\mu_n)y_2'(1,\mu_n)}\right|_0^1 \\ &= \frac{\big(y_2'(1,\mu_n)\big)^2}{\dot y_2(1,\mu_n)y_2'(1,\mu_n)} - \frac{\big(y_2'(0,\mu_n)\big)^2}{\dot y_2(1,\mu_n)y_2'(1,\mu_n)}.\end{aligned}$$

Daher folgt

$$\begin{aligned}(g_n'(1))^2 - (g_n'(0))^2 &= \frac{y_2'(1,\mu_n)}{\dot y_2(1,\mu_n)} - \frac{1}{\dot y_2(1,\mu_n)y_2'(1,\mu_n)} \\ &= \frac{1}{\dot y_2(1,\mu_n)}\left(y_2'(1,\mu_n) - \frac{1}{y_2'(1,\mu_n)}\right).\end{aligned}$$

Also folgt

$$\begin{aligned}\langle q, V_n\rangle &= 2\left\langle q, \frac{d}{dx}g_n^2\right\rangle \\ &= \frac{2}{\dot y_2(1,\mu_n)}\left(y_2'(1,\mu_n) - \frac{1}{y_2'(1,\mu_n)}\right).\end{aligned}$$

Nach Definition von κ_n gilt

$$\kappa_n(q) = \log\left((-1)^n y_2'(1,\mu_n)\right).$$

Also ist

$$e^{\kappa_n(q)} = (-1)^n y_2'(1,\mu_n),$$

und damit

$$y_2'(1,\mu_n) = (-1)^n e^{\kappa_n(q)}.$$

Außerdem folgt

$$\frac{1}{y_2'(1,\mu_n)} = (-1)^n e^{-\kappa_n(q)}.$$

Einsetzen liefert

$$\begin{aligned}\langle q, V_n\rangle &= \frac{2}{\dot y_2(1,\mu_n)}\left((-1)^n e^{\kappa_n} - (-1)^n e^{-\kappa_n}\right) \\ &= \frac{2(-1)^n}{\dot y_2(1,\mu_n)}\left(e^{\kappa_n} - e^{-\kappa_n}\right).\end{aligned}$$

Mit

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

ergibt sich

$$\begin{aligned}\langle q, V_n\rangle &= \frac{2(-1)^n}{\dot y_2(1,\mu_n)}\cdot 2\sinh\kappa_n \\ &= 4\frac{(-1)^n}{\dot y_2(1,\mu_n)}\sinh\kappa_n.\end{aligned}$$

Mit

$$\delta_n(q) = \frac{(-1)^n}{\dot{y}_2(1,\mu_n)}$$

folgt schließlich

$$\langle q, V_n \rangle = 4\delta_n \sinh \kappa_n.$$

□

3 Lemma 2

Die Funktionen δ_n sind auf L^2 positiv und haben nach Korollar 2.2 das asymptotische Verhalten

$$\delta_n = 2n^2\pi^2 \left(1 + O\left(\frac{\log n}{n}\right)\right).$$

Diese asymptotische Formel passt zur Gewichtung in ℓ_1^2, da δ_n wie $2n^2\pi^2$ wächst. Das ist später für die Konvergenz der Reihen auf beschränkten Zeitintervallen wichtig. Außerdem gilt nach demselben Korollar

$$\dot{y}_2(1,\mu_n) = -\frac{1}{n^2\pi^2} \prod_{m\neq n} \frac{\mu_m - \mu_n}{m^2\pi^2}.$$

Dieser Ausdruck hängt nur von den Eigenwerten μ_n ab. Somit hängt δ_n nur von den μ_n ab. Auf $M(p)$ sind die Eigenwerte μ_n fest. Daher ist δ_n auf $M(p)$ konstant.

Lemma 2.

$$\|\phi^t(q, V_\xi)\|^2 = \|q\|^2 + 8\sum_{n\geq 1} \delta_n \left(\cosh(\kappa_n + t\xi_n) - \cosh \kappa_n\right),$$

wobei δ_n und κ_n bei q ausgewertet werden.

Beweis. Für

$$\phi^t(q) = \phi^t(q, V_\xi)$$

gilt

$$\phi^0(q) = q.$$

Es gilt

$$\|\phi^s(q)\|^2 = \langle \phi^s(q), \phi^s(q) \rangle.$$

Daher folgt

$$\frac{d}{ds}\|\phi^s(q)\|^2 = \frac{d}{ds}\langle \phi^s(q), \phi^s(q) \rangle = 2\left\langle \phi^s(q), \frac{d}{ds}\phi^s(q) \right\rangle.$$

Da

$$\left.\frac{d}{ds}\phi^s(q)\right|_{s=0} = V_\xi(q)$$

gilt, erhalten wir

$$\left.\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\|\phi^s(q)\|^2\right|_{s=0} = \langle q, V_\xi(q) \rangle.$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\|\phi^s(q)\|^2\Big|_{s=0} &= \langle q, V_\xi(q)\rangle \\
&= \left\langle q, \sum_{n\geq 1}\xi_n V_n(q)\right\rangle \\
&= \sum_{n\geq 1}\xi_n \langle q, V_n(q)\rangle = 4\sum_{n\geq 1}\xi_n\delta_n(q)\sinh\kappa_n(q).
\end{aligned}$$

Um die Ableitung zu einer beliebigen Zeit $t \neq 0$ zu erhalten, ersetzen wir in der obigen Formel q durch $\phi^t(q)$. Außerdem benutzen wir die Flusseigenschaft

$$\phi^{s+t}(q) = \phi^s(\phi^t(q)).$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\phi^t(q)\|^2 &= \frac{1}{2}\frac{d}{ds}\|\phi^{s+t}(q)\|^2\Big|_{s=0} \\
&= \frac{1}{2}\frac{d}{ds}\|\phi^s(\phi^t(q))\|^2\Big|_{s=0}.
\end{aligned}$$

Wegen Formel oben gilt

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\phi^t(q)\|^2 = 4\sum_{n\geq 1}\xi_n\delta_n(\phi^t(q))\sinh\big(\kappa_n(\phi^t(q))\big).$$

Da δ_n auf $M(p)$ konstant ist, gilt

$$\delta_n(\phi^t(q)) = \delta_n(q).$$

Außerdem gilt in den κ-Koordinaten

$$\kappa_n(\phi^t(q)) = \kappa_n(q) + t\xi_n.$$

Damit erhalten wir

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\phi^t(q)\|^2 = 4\sum_{n\geq 1}\xi_n\delta_n(q)\sinh\big(\kappa_n(q) + t\xi_n\big).$$

Die rechte Seite konvergiert gleichmäßig auf beschränkten Zeitintervallen. Für beschränktes t gilt

$$\xi_n\delta_n\sinh(\kappa_n + t\xi_n) = O\left(\xi_n\delta_n(\kappa_n + t\xi_n)\right) = O(n^2\xi_n^2).$$

Dabei wird für die erste Gleichheit benutzt, dass nach Taylor für kleine x gilt

$$\sinh x = O(x)$$

Da $\xi \in \ell_1^2$ gilt,

$$\sum_{n\geq 1} n^2\xi_n^2 < \infty.$$

Außerdem gilt $\kappa_n(q) = \ell_1^2(n)$ nach Theorem 3.4, also

$$\sum_{n\geq 1} n^2 \kappa_n^2 < \infty.$$

Somit geht $\kappa_n + t\xi_n$ für große n gegen 0 geht. Für die zweite Gleichheit erhält man wegen $\delta_n = O(n^2)$

$$O\left(\xi_n \delta_n(\kappa_n + t\xi_n)\right) = O(n^2 \xi_n \kappa_n + t n^2 \xi_n^2)$$

Wir wissen $\sum_{n\geq 1} n^2 \xi_n^2 < \infty$ und weil $n^2 \xi_n \kappa_n = (n\xi_n)(n\kappa_n)$ beides quadratsummierbare Folgen und $\kappa_n, \xi_n \in \ell_1^2$, ist das punktweise Produkt summierbar. Mit Cauchy-Schwarz bekommen wir, dass beide Summen endlich sind und $\sum_{n\geq 1} n^2 \xi_n \kappa_n < \infty$ gilt. Also

$$\xi_n \delta_n \sinh(\kappa_n + t\xi_n) = O\left(\xi_n \delta_n(\kappa_n + t\xi_n)\right) = O(n^2 \xi_n^2).$$

Deshalb darf man Summe und Integral vertauschen. Es folgt

$$\begin{aligned}
\|\phi^t(q)\|^2 - \|q\|^2 &= \int_0^t \frac{d}{ds} \|\phi^s(q)\|^2 \, ds \\
&= 8 \sum_{n\geq 1} \delta_n \int_0^t \xi_n \sinh(\kappa_n + s\xi_n) \, ds \\
&= 8 \sum_{n\geq 1} \delta_n \left[\cosh(\kappa_n + s\xi_n)\right]_{s=0}^{s=t} \\
&= 8 \sum_{n\geq 1} \delta_n \left(\cosh(\kappa_n + t\xi_n) - \cosh \kappa_n\right).
\end{aligned}$$

Damit erhält man

$$\|\phi^t(q, V_\xi)\|^2 = \|q\|^2 + 8 \sum_{n\geq 1} \delta_n \left(\cosh(\kappa_n + t\xi_n) - \cosh \kappa_n\right).$$

□

4 Theorem 2

Theorem 2. Für jedes $q \in M(p)$ und jedes $\xi \in \ell_1^2$ existiert die Lösungskurve

$$\phi^t(q, V_\xi)$$

für alle Zeiten.

Beweis. Sei $M := M(p)$ und seien $q \in M$ sowie $\xi \in \ell_1^2$ fest gewählt. Nach Theorem 1* ist

$$\kappa \colon M \to \kappa(M) \subset \ell_1^2$$

ein globales reell-analytisches Koordinatensystem auf M. In diesen Koordinaten ist das Vektorfeld V_ξ das konstante Vektorfeld ξ. Daher gilt für die Lösungskurve

$$\kappa(\phi^t(q, V_\xi)) = \kappa(q) + t\xi.$$

Theorem 2 ist somit äquivalent zu der Aussage, dass die Gerade

$$\kappa(q) + t\xi$$

die offene Menge $\kappa(M)$ niemals verlässt. Angenommen, diese Gerade verlässt die offene Menge $\kappa(M)$ für ein positives t. Dann existiert ein $t^* > 0$, sodass $\kappa(q) + t^*\xi$ auf dem Rand von $\kappa(M)$ liegt, während $\kappa(q) + t\xi \in \kappa(M)$ für alle $0 < t < t^*$. Nach Lemma 2 gilt auf dem Intervall $0 < t < t^*$

$$\|\phi^t(q)\|^2 = \|q\|^2 + 8 \sum_{n \geq 1} \delta_n \left(\cosh(\kappa_n + t\xi_n) - \cosh \kappa_n\right).$$

Diese Identität kontrolliert die Norm auf beschränkten Zeitintervallen. Daher gilt

$$\sup_{0<t<t^*} \|\phi^t(q)\| < \infty.$$

Die Lösungskurve bleibt also bis zum Zeitpunkt t^* in einer beschränkten Teilmenge von $L^2[0,1]$. Da $L^2[0,1]$ ein Hilbertraum ist, ist $L^2[0,1]$ reflexiv. Daher besitzt jede beschränkte Folge in $L^2[0,1]$ eine schwach konvergente Teilfolge. Wegen der Beschränktheit $\sup_{0<t<t^*} \|\phi^t(q)\| < \infty$ kann man eine Folge

$$t_j \to t^*, \qquad t_j < t^*$$

wählen, sodass für $q_j := \phi^{t_j}(q)$ gilt

$$q_j \rightharpoonup q^* \quad \text{schwach in } L^2.$$

Für jedes j gilt $q_j = \phi^{t_j}(q) \in M$ weil $0 < t_j < t^*$ ist. Also gilt für jedes $n \geq 1$

$$\mu_n(q_j) = \mu_n(p).$$

Da $q_j \rightharpoonup q^*$ und die Funktionen μ_n kompakt auf L^2 sind, folgt für jedes $n \geq 1$

$$\mu_n(q_j) \to \mu_n(q^*).$$

Damit erhält man

$$\mu_n(q^*) = \lim_{j\to\infty} \mu_n(q_j) = \mu_n(p).$$

Also gilt

$$q^* \in M.$$

Nun wird die κ-Koordinate von q^* bestimmt. Für jedes j gilt

$$\kappa(q_j) = \kappa(\phi^{t_j}(q)) = \kappa(q) + t_j\xi.$$

Da $t_j \to t^*$ folgt

$$\kappa(q_j) \to \kappa(q) + t^*\xi.$$

Da außerdem die Funktionen κ_n kompakt auf L^2 sind und $q_j \rightharpoonup q^*$ gilt, folgt für jedes $n \geq 1$

$$\kappa_n(q_j) \to \kappa_n(q^*).$$

Somit erhält man

$$\kappa(q^*) = \kappa(q) + t^*\xi.$$

Wir haben also gezeigt:

$$q^* \in M$$

und

$$\kappa(q^*) = \kappa(q) + t^*\xi.$$

Da $q^* \in M$, folgt

$$\kappa(q) + t^*\xi = \kappa(q^*) \in \kappa(M).$$

Damit liegt

$$\kappa(q) + t^*\xi$$

im Inneren von $\kappa(M)$, weil $\kappa(M)$ eine offene Teilmenge von ℓ_1^2 ist. Das widerspricht der Annahme, dass

$$\kappa(q) + t^*\xi$$

auf dem Rand von $\kappa(M)$ liegt. $\square$

Zusammen mit der Identität aus Lemma 2 folgt außerdem, dass $M(p)$ unbeschränkt ist.

5 Theorem 3

Wir können jetzt die Exponentialabbildung $\exp_q$ an einem Punkt $q \in M(p)$ definieren. Sie ordnet der Richtung $V_\xi \in T_qM(p)$ den Punkt auf $M(p)$ zu, den man nach Zeit $t = 1$ entlang der Lösungskurve erreicht und ist gegeben durch:

$$\exp_q(V_\xi) = \phi^t(q, V_\xi)\big|_{t=1}.$$

Theorem 3. Für jedes $q \in M(p)$ ist die Exponentialabbildung ein reell-analytischer Isomorphismus zwischen $T_qM(p) \cong \ell_1^2$ und $M(p)$. Es gilt

$$\kappa(\exp_q(V_\xi)) = \kappa(q) + \xi.$$

Daraus folgt, dass $M(p)$ zusammenhängend und einfach zusammenhängend ist.

Beweis. Aus der Definition der Exponentialabbildung folgt

$$\exp_q(V_\xi) = \phi^1(q, V_\xi).$$

Da V_ξ in den κ-Koordinaten das konstante Vektorfeld ξ ist, gilt für alle Zeiten

$$\kappa(\phi^t(q, V_\xi)) = \kappa(q) + t\xi.$$

Für $t = 1$ erhält man daher direkt

$$\kappa(\exp_q(V_\xi)) = \kappa(\phi^1(q, V_\xi)) = \kappa(q) + \xi.$$

Aus Theorem 2 wissen wir, dass die Flusskurven für alle Zeiten existieren. Also verlässt für jedes $\xi \in \ell_1^2$ die Gerade $\kappa(q) + t\xi$ das Bild $\kappa(M(p))$ nicht. Insbesondere gilt für $t = 1$

$$\kappa(q) + \xi \in \kappa(M(p)).$$

Da $\xi \in \ell_1^2$ beliebig war, folgt

$$\kappa(M(p)) = \ell_1^2.$$

Nun definiert man die Abbildung

$$F_q \colon M(p) \to \ell_1^2, \qquad F_q(r) = \kappa(r) - \kappa(q).$$

Für ein gegebenes $\xi \in \ell_1^2$ sucht man also den Punkt $r \in M(p)$ mit

$$F_q(r) = \xi.$$

Also folgt

$$\kappa(r) - \kappa(q) = \xi \qquad \Longleftrightarrow \qquad \kappa(r) = \kappa(q) + \xi.$$

Da κ injektiv ist, folgt aus den κ-Koordinaten

$$r = \exp_q(V_\xi)$$

Also ist $\exp_q = F_q^{-1}$. Nach Theorem 1* ist κ ein reell-analytischer Isomorphismus zwischen $M(p)$ und $\kappa(M(p))$. Da $\kappa(M(p)) = \ell_1^2$ ist auch $F_q(r) = \kappa(r) - \kappa(q)$ ein reell-analytischer Isomorphismus zwischen $M(p)$ und ℓ_1^2. Daher ist die Umkehrabbildung $F_q^{-1} = \exp_q$ ebenfalls ein reell-analytischer Isomorphismus. Damit ist $\exp_q$ ein reell-analytischer Isomorphismus zwischen $T_qM(p) \cong \ell_1^2$ und $M(p)$. Da $M(p)$ reell-analytisch isomorph zu ℓ_1^2 ist und ℓ_1^2 ein linearer Hilbertraum ist, besitzt $M(p)$ dieselbe topologische Struktur wie ℓ_1^2. Folglich ist $M(p)$ zusammenhängend und einfach zusammenhängend. $\square$