# Seminararbeit:Ausgewählte Themen gewöhnlicher Differentialgleichungen und dynamischer Systeme

23. März 2026

## Inhaltsverzeichnis

# 1 Theorem 2

Ist $\lambda$ ein Dirichlet-Eigenwert von $q$ in $L^2 = L^2[0,1]$, so gilt

$$\dot{y}_2(1,\lambda)y_2'(1,\lambda) = \int_0^1 y_2^2(t,\lambda)\,dt$$
$$= \|y_2(\cdot,\lambda)\|^2 > 0.$$

Insbesondere ist $\dot{y}_2(1,\lambda) \neq 0$. Somit sind alle Nullstellen von $y_2(1,\lambda)$ einfach.

—

**Beweis.** Da $\lambda$ reell ist, ist insbesondere $y_2 = y_2(x,\lambda)$ reell. Differenzieren wir die Gleichung

$$-y_2'' + q(x)y_2 = \lambda y_2 \ (1)$$

nach $\lambda$ [3] und multiplizieren sie mit $y_2$, so erhalten wir mit der Produktregel

$$-y_2\dot{y}_2'' + q(x)\dot{y}_2y_2 = y_2^2 + \lambda\dot{y}_2y_2 \ (2)$$

Multiplizieren wir (1) mit $\dot{y}_2$, so erhalten wir

$$-\dot{y}_2y_2'' + q(x)y_2\dot{y}_2 = \lambda y_2\dot{y}_2 \ (3)$$

und für (3) - (2) mit der Wronskian Identity[2]

$$y_2^2 = y_2''\dot{y}_2 - y_2\dot{y}_2'' = [\dot{y}_2, y_2]'.$$

Also ist dann, da $y_2(0,\lambda) = 0 \ \forall\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \dot{y}_2(0,\lambda) = 0$ und $y_2(1,\lambda) = 0$

$$\|y_2(\cdot,\lambda)\|^2 =^4 \int_0^1 y_2^2(t,\lambda)\,dt = [\dot{y}_2, y_2]\Big|_0^1 = [\dot{y}_2, y_2](1) - [\dot{y}_2, y_2](0)$$

$$= \dot{y}_2(1,\lambda)y_2'(1,\lambda) - \dot{y}_2{}'(1,\lambda)y_2(1,\lambda) - [y_2'(0,\lambda)\dot{y}_2(0,\lambda) - \dot{y}_2{}'(0,\lambda)y_2(0,\lambda)] = y_2(1,\lambda)\dot{y}_2'(1,\lambda)$$

Da $y_2$ nicht die triviale Lösung ist, ist $\|y_2(\cdot,\lambda)\|^2 > 0$. Also ist auch insbesondere $\dot{y}_2(1,\lambda) \neq 0$ und somit alle Nullstellen von $y_2(1,\lambda)$ einfach. □

# 2 Konstruktion der $\mu_n(q)$ und der Eigenfunktion $g_n(x,q)$

Aus dem Counting Lemma folgt wegen $q \in L_{\mathbb{R}}[0,1]$ mit $n > N > 2\exp(\|q\|)$ und mit Theorem 1, dass $\mu_n$ eine reelle Folge der Art $\mu_1(q) < \mu_2(q) < \mu_3(q) < \ldots$ ist, die wegen $\left|\sqrt{\lambda} - n\pi\right| < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sqrt{\lambda} = n\pi + O(1) \Rightarrow \lambda = n^2\pi^2 + 2O(1)n\pi + O(1)^2$, $\mu_n = n^2\pi^2 + O(n)$ erfüllt. Zu jedem Eigenwert assoziieren wir eine eindeutige Eigenfunktion $g_n = g_n(x,q)$, die normiert ist durch

$$\|g_n\| = 1, \qquad g_n'(0) > 0.$$

[1] $\dot{y}_2 = \frac{\partial y_2}{\partial\lambda}$; $y_2' = \frac{\partial y_2}{\partial x}$

[2] Wronskian Indentity: $[f,g] = fg' - f'g \Rightarrow [f,g]' = f'g' + fg'' - (f''g + f'g') = fg'' - f''g$

[3] Wir nehmen an, dass q stetig ist, dann ist $y_j$ zweimal stetig differenzierbar in x. Damit ist das Vertauschen der Ableitung nach x und q erlaubt.

[4] Gilt da $y_2$ reell ist für reelle $\lambda$, $L^2$-Norm

Nach Theorem 2 gilt

$$\begin{aligned} g_n(x,q) &= \frac{y_2(x,\mu_n)}{\|y_2(\cdot,\mu_n)\|} \\ &= \frac{y_2(x,\mu_n)}{\sqrt{y_2'(1,\mu_n)\,\dot{y}_2(1,\mu_n)}}. \end{aligned}$$

Insbesondere gilt, wegen $\mu_n(0) = n^2\pi^2$ und $y_2(1,\lambda,0) = \frac{\sin(\sqrt{\lambda})}{\sqrt{\lambda}}$

$$g_n(x,0) = \sqrt{2}\sin(n\pi x).$$

Nun untersuchen wir die Dirichlet-Eigenwerte als Funktionen auf $L^2$.

# 3 Theorem 3

Für jedes $n \geq 1$ ist $\mu_n : L^2 \to \mathbb{R}$ eine kompakte, reell-analytische Funktion. Der Gradient ist gegeben durch

$$\frac{\partial \mu_n}{\partial q(t)} = g_n^2(t,q),$$

wobei $g_n$ auch eine reell-analytische Funktion von q ist.
**Herleitung des Gradienten:** Da $y_2(1,\mu_n(q),q) = 0\ \forall q$ nach Konstruktion der $\mu_n$ und $y_2$ ist, folgt mit der Kettenregel

$$0 = \frac{\partial}{\partial q} y_2(1,\mu_n(q),q) = \dot{y}_2(1,\mu_n)\frac{\partial \mu_n}{\partial q} + \frac{\partial}{\partial q}\, y_2(1,\lambda)\Big|_{\lambda=\mu_n}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \mu_n}{\partial q} = \frac{-\frac{\partial}{\partial q}\, y_2(1,\lambda)\Big|_{\lambda=\mu_n}}{\dot{y}_2(1,\mu_n)}$$

Nun leiten wir die Differentialgleichung aus (1) nach q in Richtung v ab, erhalten also

$$-\, d_q\, y_j''(v) + q(x)\, d_q\, y_j(v) + v y_j = \lambda\, d_q\, y_j(v)$$

Wenn q stetig ist, dann ist $y_j$ zweimal stetig differenzierbar in x, und die Vertauschung von Differentiation nach x und nach q ist erlaubt. Also gilt $d_q\, y_j''(v) = (\,d_q\, y_j)''$:

$$-(\,d_q\, y_j)''(v) + q(x)\, d_q\, y_j(v) = \lambda\, d_q\, y_j(v) - v y_j$$

Nach Theorem 2 aus Kapitel 1 mit $d_q\, y$ statt $y$ und mit $f(x) = -vy$ verschwinden die Anfangsbedingungen wegen der Richtungsableitung (a=b=0) und die eindeutige Lösung der inhomogenen Gleichung ist gegeben durch

$$d_q\, y_j(x) =^2 \int_0^x \big[y_1(t)y_2(x) - y_1(x)y_2(t)\big]\, v(t)y_j(t)\, dt$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 \big[y_1(t)y_2(x) - y_1(x)y_2(t)\big]\, v(t)y_j(t)\, \mathbf{1}_{[0,x]}(t)\, dt$$

$$\Leftrightarrow \left\langle y_j(t)\big[y_1(t)y_2(x) - y_1(x)y_2(t)\big]\mathbf{1}_{[0,x]}(t),\, v\right\rangle^1$$

$y_j$ ist insbesondere Fréchet-differenzierbar. Das Differential $d_q y_j$ ist eine stetige lineare Abbildung und $L^2$ ein Hilbertraum. Nach dem Riesz'schen Darstellungssatz gibt es daher ein eindeutiges Element in $L^2$, das wir mit $\frac{\partial y_j}{\partial q}$ bezeichnen, sodass

$$d_q y_j(v) = \left\langle \frac{\partial y_j}{\partial q}, v \right\rangle \quad \text{für alle } v \in L^2.$$

Also für $t \in [0,1]$

$$\frac{\partial}{\partial q(t)}\, y_2(1,\lambda)\Big|_{\lambda=\mu_n} = y_2(t)\big[y_1(t)y_2(1) - y_1(1)y_2(t)\big]\mathbf{1}_{[0,1]}(t)$$

Aus der Wronskian Identity und $y_2(1) = 0$ für $\lambda = \mu_n$erhalten wir

$$1 = [y_1, y_2](1) = y_1(1)y_2'(1) - y_1(1)y_2(1) \Rightarrow y_1(1) = \frac{1}{y_2'(1)}$$

und

$$\frac{\partial}{\partial q(t)}\, y_2(1,\lambda)\Big|_{\lambda=\mu_n} = y_2^2(t)\frac{(-1)}{y_2'(1)}$$

Daher ist

$$\frac{\partial \mu_n}{\partial q(t)} = \frac{y_2^2(t,\mu_n)}{\dot{y}_2(1,\mu_n)y_2'(1,\mu_n)} = \frac{y_2^2(t,\mu_n)}{\|y_2(\cdot,\mu_n)\|^2} = g_n^2(t,q)$$

und natürlich auch

$$d_q\mu_n(v) =^2 \left\langle v, g_n^2(t,q)\right\rangle \quad \text{für alle } v \in L^2.$$

# 4 Theorem 4 und $\ell_k^2$

Das Counting Lemma lieferte uns eine erste grobe Abschätzung der Lage der Dirichlet-Eigenwerte. Diese Abschätzung wird nun verfeinert.

Es bezeichne $\ell^2$ den Hilbertraum aller reellen Folgen $(\alpha_1, \alpha_2, \dots)$, für die $\sum \alpha_n^2$ endlich ist, d.h. $\ell^2 = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R} : \sum_{n\geq 1} a_n < \infty\}$. Allgemeiner bezeichnet für $k \geq 0$ der Raum $\ell_k^2$ den Hilbertraum aller reellen Folgen $(\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ mit

$$\sum_{n\geq 1}(n^k\alpha_n)^2 < \infty.$$

In Analogie zur Notation $O(1/n)$ wird die Notation $\ell_k^2(n)$ für eine beliebige Folge von Zahlen verwendet, die ein Element von $\ell_k^2$ ist. Zum Beispiel ist

$$\alpha_n = \beta_n + \ell^2(n)$$

[1]Skalarprodukt bezüglich $L^2$

[2]Jede Seite dieser Gleichung ist eine stetige Funktion von q in $L^2$, und die Gleichung gilt auf einer dichten Teilmenge von $L^2$, nämlich den stetigen Funktionen. Deshalb gilt sie auf ganz $L^2$.

äquivalent zu

$$\alpha_n = \beta_n + \lambda_n, \quad \sum_{n\geq 1} \lambda_n^2 < \infty.$$

**Theorem 4** Für $q$ in $L^2$ gilt

$$\begin{aligned}\mu_n(q) &= n^2\pi^2 + \int_0^1 q(t)\,dt - \langle \cos 2\pi n x, q\rangle + O\left(\frac{1}{n}\right)\\ &= n^2\pi^2 + \int_0^1 q(t)\,dt + \ell^2(n)\end{aligned}$$

und

$$g_n(x,q) = \sqrt{2}\sin \pi n x + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$g_n'(x,q) = \sqrt{2}\pi n \cos \pi n x + O(1).$$

Diese Abschätzungen gelten gleichmäßig auf beschränkten Teilmengen von $[0,1]\times L^2$.

**Beweis:** Sei $\mu_n(q) = \mu_n$. Aus dem Counting Lemma haben wir bereits

$\sqrt{\mu_n} = n\pi + O(1)$ und $\mu_n = n^2\pi^2 + O(n)$

Aus den basic estimates aus Theorem 3, Kapitel 1, erhalten wir

$$\left| y_2(x,\lambda,q) - \frac{\sin(\sqrt{\lambda}x)}{\sqrt{\lambda}} \right| \leq \frac{1}{|\lambda|}\exp(|Im(\sqrt{|\lambda|})|x + \|q\|\sqrt{x})$$

$$\Rightarrow y_2(x,\lambda,q) = \frac{\sin(\sqrt{\lambda}x)}{\sqrt{\lambda}} + O\Big(\frac{1}{|\lambda|}\exp(|Im(\sqrt{|\lambda|})|x + \|q\|\sqrt{x})\Big)$$

Also ist mit $\lambda = \mu_n, \mu_n \in \mathbb{R}$ und ,da $x \in [0,1]$, $\exp(\|q\|\sqrt{x})$ beschränkt

$$\begin{aligned}y_2(x,\lambda,q) &= \frac{\sin(\sqrt{\mu_n}x)}{\sqrt{\mu_n}} + O(\frac{1}{|\mu_n|})\\ &= \frac{\sin(\sqrt{\mu_n}x)}{\sqrt{\mu_n}} + O(\frac{1}{n^2})\end{aligned}$$

*Wir haben $\mu_n = n^2\pi^2 + b_n$ mit $b_n = O(n)$, d.h. es gibt Konstanten $C > 0$ und $N_0 \in \mathbb{N}$, so dass $|b_n| \leq Cn$ für alle $n \geq N_0$.

Dann gilt:

$$\frac{1}{\mu_n} = \frac{1}{n^2\pi^2 + b_n} = \frac{1}{n^2\pi^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{b_n}{n^2\pi^2}}.$$

Setze $a_n := \frac{b_n}{n^2\pi^2}$. Wegen $|b_n| \leq Cn$ folgt

$$|a_n| \leq \frac{Cn}{n^2\pi^2} = \frac{C}{\pi^2}\cdot\frac{1}{n} = O\Big(\frac{1}{n}\Big).$$

Da $a_n = O(1/n)$, gibt es $C' > 0$ und $N_1 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n| \leq \frac{C'}{n}$ für alle $n \geq N_1$. Wähle $n$ so groß, dass $\frac{C'}{n} \leq \frac{1}{2}$, also $n \geq 2C'$. Dann gilt für $n \geq \max(N_1, 2C')$ und wegen $|1 + a_n| \geq | |1| - |a_n| | = |1 - |a_n||$:

$$\left|\frac{1}{1+a_n} - 1\right| = \left|\frac{-a_n}{1+a_n}\right| \leq \frac{|a_n|}{1-|a_n|} \leq \frac{\frac{C'}{n}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{2C'}{n}.$$

Also ist $\frac{1}{1+a_n} - 1 = O(1/n)$, d.h. $\frac{1}{1+a_n} = 1 + O(1/n)$.

Also

$$\frac{1}{\mu_n} = \frac{1}{n^2\pi^2} \cdot \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{1}{n^2\pi^2} + \frac{1}{n^2\pi^2} \cdot O\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2\pi^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

**Nun zur Eigenfunktion $g_n$:**
Mit $2sin^2(ax) = 1 - cos(2ax)$ und da $\sqrt{\mu_n} = n\pi + O(1)$, ist

$$\int_0^1 y_2^2(t,\mu_n)dt = \int_0^1 \frac{\sin^2(\sqrt{\mu_n}t)}{\mu_n} + 2\frac{\sin(\sqrt{\mu_n}t)}{\sqrt{\mu_n}}O(\frac{1}{n^2}) + O(\frac{1}{n^2})^2 dt$$

$$= \int_0^1 \frac{\sin^2(\sqrt{\mu_n}t)}{\mu_n} + O(\frac{1}{n^3})dt = \int_0^1 \frac{1 - cos(2\sqrt{\mu_n}t)}{2\mu_n} + O(\frac{1}{n^3})dt$$

$$= \frac{1}{2\mu_n}(1 - \frac{sin(2\sqrt{\mu_n})}{2\sqrt{\mu_n}}) + O(\frac{1}{n^3}) = \frac{1}{2\mu_n}(1 - \frac{sin(2\sqrt{\mu_n})}{2\sqrt{\mu_n}} + O(\frac{1}{n}))$$

$$= \frac{1}{2\mu_n}(1 + O(\frac{1}{n}))$$

,da $\frac{-\sin(2\sqrt{\mu_n})}{2\sqrt{\mu_n}} \in O(\frac{1}{n})$ und $\mu_n = n^2\pi^2 + O(n)$ wie in * .Aus

$$\|y_2(\cdot,\mu_n)\|^2 = \frac{1}{2\mu_n}\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

folgt mit $\mu_n = n^2\pi^2 + O(n)$:

$$\|y_2(\cdot,\mu_n)\| = \frac{1}{\sqrt{2\mu_n}}\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{1/2}.$$

**Für $a_n = O(1/n)$ gilt $(1 + a_n)^{1/2} = 1 + O(1/n)$, denn:

$$\left|(1+a_n)^{1/2} - 1\right| = \left|\frac{((1+a_n)^{1/2})^2 - 1^2}{(1+a_n)^{1/2} + 1}\right| = \left|\frac{(1+a_n) - 1}{(1+a_n)^{1/2} + 1}\right| = \left|\frac{a_n}{(1+a_n)^{1/2} + 1}\right|.$$

Für genügend große $n$ gilt $|a_n| \leq \frac{1}{2}$ (da $a_n = O(1/n)$), insbesondere $a_n > -1$, sodass der Nenner $(1 + a_n)^{1/2} + 1 \geq 1$ ist. Daraus folgt:

$$\left|(1+a_n)^{1/2} - 1\right| \leq |a_n| = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Daraus folgt mit Theorem 2 und * mit $a_n = (1+b_n)^{\frac{1}{2}} - 1, b_n = O(\frac{1}{n})$ ,dass

$$\|y_2(\cdot,\mu_n)\|^{-1} = \sqrt{2\mu_n}(1+O(\frac{1}{n}))$$

$$\Rightarrow g_n(x) = \|y_2(\cdot,\mu_n)\|^{-1} y_2(x,\mu_n) = \sqrt{2\mu_n}(1+O(\frac{1}{n}))(\frac{\sin(\sqrt{\mu_n}x)}{\sqrt{\mu_n}} + O(\frac{1}{n^2}))$$

$$= \sqrt{2\mu_n}\frac{\sin(\sqrt{\mu_n}x)}{\sqrt{\mu_n}} + \sqrt{2\mu_n}O(\frac{1}{n^2})) + \sqrt{2\mu_n}O(\frac{1}{n})\frac{\sin(\sqrt{\mu_n}x)}{\sqrt{\mu_n}} + \sqrt{2\mu_n}O(\frac{1}{n})O(\frac{1}{n^2})$$

$$= \sqrt{2}\sin(\sqrt{\mu_n}x) + O(\frac{1}{n}) + O(\frac{1}{n}) + O(\frac{1}{n^2})$$

$$= \sqrt{2}\sin(\sqrt{\mu_n}x) + O(\frac{1}{n}) \quad (4)$$

, da $\sqrt{\mu_n}O(\frac{1}{n^2}) = n\pi O(\frac{1}{n^2}) + O(1)O(\frac{1}{n^2}) = O(\frac{1}{n}) + O(\frac{1}{n^2}) = O(\frac{1}{n})$ gilt.

**Verbesserung der Abschätzung für $\mu_n$:**

Nun möchten wir mit Hilfe der gerade gewonnenen Darstellung von $g_n$ unsere Abschätzung der $\mu_n$ verbessern. Nach Theorem 3 ist,

$$\mu_n - n^2\pi^2 = \mu_n(q) - \mu_n(0)$$

$$= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}\mu_n(tq)dt = \int_0^1 \frac{\partial \mu_n(tq)}{\partial q}\frac{\partial (tq)}{\partial t}dt$$

$$= \int_0^1 \frac{\partial \mu_n(tq)}{\partial q}(q)\ dt = \int_0^1 d_{tq}\mu_n(q)dt$$

$$= \int_0^1 \left\langle g_n^2(t,tq), q\right\rangle dt$$

Da (4) für $tq,\ 0 \leq t \leq 1$ gleichmäßig gilt und das Integral sich mit einer Konstanten nach oben abschätzen lässt, ist

$$\mu_n = n^2\pi^2(1+O(\frac{1}{n^2})) = n^2\pi^2 + O(1)$$

und wegen $(1+O(\frac{1}{n^2}))^{\frac{1}{2}} = 1 + O(\frac{1}{n^2})^{**}$

$$\sqrt{\mu_n} = n\pi(1+O(\frac{1}{n^2})) = n\pi + O(\frac{1}{n})$$

Im folgenden werden wir die Reihendarstellung des sin(x) und cos(x) benötigen,

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

Also ist

$$|\cos(y)-1| \leq \frac{y^2}{2} = O(y^2), \quad |\sin(y)| \leq |y| = O(y) \quad \text{für } y \to 0.$$

und damit

$$\cos\left(O\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad \sin\left(O\left(\frac{1}{n}\right)\right) = O\left(\frac{1}{n}\right),$$

**Verbesserung der Abschätzung für $g_n$ und Einsetzen in $\mu_n$:**
Mit $\sin(A+B) = \sin(A)\cos(B) + \cos(A)\sin(B)$ und $\sqrt{\mu_n} = n\pi + O(\frac{1}{n})$ ist

$$g_n(x) = \sqrt{2}\sin(n\pi x + xO(\frac{1}{n})) + O(\frac{1}{n}))$$

$$= \sqrt{2}\Big(\sin(n\pi x)\cos(O(\frac{1}{n})) + \cos(n\pi x)\sin(O(\frac{1}{n}))\Big) + O(\frac{1}{n})$$

$$= \sqrt{2}\Big(\sin(n\pi x)(1 + O(\frac{1}{n^2})) + \cos(n\pi x)O(\frac{1}{n})\Big) + O(\frac{1}{n})$$

$$= \sqrt{2}\Big(\sin(n\pi x) + O(\frac{1}{n^2}) + O(\frac{1}{n})\Big) + O(\frac{1}{n})$$

$$= \sqrt{2}\sin(n\pi x) + O(\frac{1}{n})$$

Damit auch

$$g_n^2(x) = 2\sin^2(n\pi x) + 2\sqrt{2}\sin(n\pi x)O(\frac{1}{n}) + O(\frac{1}{n})^2$$

$$= 2\sin^2(n\pi x) + O(\frac{1}{n}) = 1 - \cos(2n\pi x) + O(\frac{1}{n})$$

Daraus ergibt sich für die $\mu_n$:

$$\mu_n - n^2\pi^2 = \int_0^1 \left\langle 1 - \cos(2n\pi x) + O(\frac{1}{n}), q \right\rangle dt$$

$$= \int_0^1 q(t)dt - \langle\cos(2n\pi x), q\rangle + \left\langle O(\frac{1}{n}), q \right\rangle$$

$$= \int_0^1 q(t)dt - \langle\cos(2n\pi x), q\rangle + O(\frac{1}{n})$$

$$= \int_0^1 q(t)dt + \ell^2(n)$$

Für $\sqrt{\mu_n} = n\pi(1 + O(\frac{1}{n}))^{\frac{1}{2}}$ können wir wieder wie in ** argumentieren und erhalten $\sqrt{\mu_n} = n\pi + O(\frac{1}{n})$

**Zum Schluss $g_n'$:**
Aus den basic estimates erhalten wir für $y_2'$:

$$\left|y_2'(x,\lambda,q) - \cos(\sqrt{\lambda}x)\right| \leq \frac{\|q\|}{\sqrt{|\lambda|}} \exp(|Im(\sqrt{|\lambda|})|x + \|q\|\sqrt{x})$$

$$\Rightarrow y_2'(x,\mu_n,q) = \cos(\sqrt{\mu_n}x) + O\Big(\frac{\|q\|}{\sqrt{|\mu_n|}}\exp(|Im(\sqrt{|\mu_n|})|x + \|q\|\sqrt{x})\Big)$$

$$= \cos(\sqrt{\mu_n}x) + O(\frac{1}{\sqrt{\mu_n}})$$

Da wir für $\frac{1}{\sqrt{\mu_n}} = \frac{1}{n\pi + O(\frac{1}{n})} = \frac{1}{n\pi}(1 + O(\frac{1}{n}))^{-1}$ wieder wie in $*$ argumentieren können, ist

$$y_2'(x,\mu_n,q) = \cos(\sqrt{\mu_n}x) + O(\frac{1}{n})$$

und wegen $\cos(A+B) = \cos(A)\cos(B) - \sin(A)\sin(B)$ folgt wie oben

$$y_2'(x,\mu_n,q) = \cos(\pi n x) + O(\frac{1}{n})$$

Dividieren mit $\|y_2(\cdot,\mu_n)\|$ ergibt dann

$$g_n'(x) = \sqrt{2\mu_n}(1 + O(\frac{1}{n}))(\cos(\pi n x) + O(\frac{1}{n}))$$

$$= \sqrt{2\mu_n}\cos(\pi n x) + \sqrt{2\mu_n}O(\frac{1}{n}) + \sqrt{2\mu_n}O(\frac{1}{n})\cos(\pi n x) + \sqrt{2\mu_n}O(\frac{1}{n})O(\frac{1}{n})$$

$$= \sqrt{2\mu_n}\cos(\pi n x) + O(1) + O(1) + O(\frac{1}{n})$$

$$= \sqrt{2}(n\pi + O(\frac{1}{n}))\cos(\pi n x) + O(1)$$

$$= \sqrt{2}n\pi\cos(\pi n x) + O(1)$$

□

# 5 Wieso ist $\langle \cos(2n\pi x), q\rangle \in \ell^2$?

**Behauptung:** Das Funktionensystem

$$\mathcal{B} = \Big\{1,\ \sqrt{2}\sin(2\pi n x),\ \sqrt{2}\cos(2\pi n x)\Big\}_{n=1}^{\infty}$$

ist ein Orthonormalsystem:

## Norm der Funktionen

**Norm von 1:**

$$\|1\|^2 = \int_0^1 1^2\,dx = 1 \quad \Rightarrow \quad \|1\| = 1.$$

**Norm von $\sqrt{2}\sin(2\pi nx)$:**

$$\|\sqrt{2}\sin(2\pi nx)\|^2 = 2\int_0^1 \sin^2(2\pi nx)\,dx.$$

Mit der Identität $\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$:

$$= 2\int_0^1 \frac{1-\cos(4\pi nx)}{2}\,dt = \int_0^1 1\,dx - \int_0^1 \cos(4\pi nx)\,dx.$$

Das Integral von $\cos(4\pi nx)$ über eine volle Periode $[0,1]$ ist 0. Also:

$$= 1 - 0 = 1 \quad \Rightarrow \quad \|\sqrt{2}\sin(2\pi nx)\| = 1.$$

**Norm von $\sqrt{2}\cos(2\pi nx)$:** Analog mit $\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$:

$$\|\sqrt{2}\cos(2\pi nx)\|^2 = 2\int_0^1 \cos^2(2\pi nx)\,dx = 2\int_0^1 \frac{1+\cos(4\pi nx)}{2}\,dx = \int_0^1 1\,dx + \int_0^1 \cos(4\pi nx)\,dx.$$

Das Cosinus-Integral verschwindet wieder:

$$= 1 + 0 = 1 \quad \Rightarrow \quad \|\sqrt{2}\cos(2\pi nx)\| = 1.$$

**Orthogonalität zwischen 1 und Sinus:**

$$\langle 1, \sqrt{2}\sin(2\pi nx)\rangle = \sqrt{2}\int_0^1 \sin(2\pi nx)\,dx = 0,$$

da der Sinus über eine volle Periode integriert 0 ergibt.

**Orthogonalität zwischen 1 und Cosinus:**

$$\langle 1, \sqrt{2}\cos(2\pi nx)\rangle = \sqrt{2}\int_0^1 \cos(2\pi nx)\,dx = 0.$$

**Orthogonalität zwischen Sinus und Cosinus (gleiches $n$):**

$$\langle \sqrt{2}\sin(2\pi nx), \sqrt{2}\cos(2\pi nx)\rangle = 2\int_0^1 \sin(2\pi nx)\cos(2\pi nx)\,dx.$$

Mit $\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha$:

$$= \int_0^1 \sin(4\pi nx)\,dx = 0.$$

**Orthogonalität zwischen verschiedenen Frequenzen :** Für $n \neq m$ gilt die Orthogonalitätsrelation der trigonometrischen Funktionen:

$$\int_0^1 \sin(2\pi nx)\sin(2\pi mx)\,dx = 0,$$

$$\int_0^1 \cos(2\pi nx)\cos(2\pi mx)\,dx = 0,$$

$$\int_0^1 \sin(2\pi nx)\cos(2\pi mx)\,dx = 0.$$

Damit ist $\mathcal{B}$ eine Orthonormalbasis.

Jede Funktion $q \in L^2[0,1]$ lässt sich also als Fourier-Reihe entwickeln:

$$q(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\big(a_n\sqrt{2}\cos(2\pi nt) + b_n\sqrt{2}\sin(2\pi nt)\big),$$

wobei die Fourier-Koeffizienten gegeben sind durch

$$a_0 = 2\langle q, 1\rangle = 2\int_0^1 q(t)\,dt,$$

$$a_n = \langle q, \sqrt{2}\cos(2\pi nt)\rangle = \sqrt{2}\int_0^1 q(t)\cos(2\pi nt)\,dt,$$

$$b_n = \langle q, \sqrt{2}\sin(2\pi nt)\rangle = \sqrt{2}\int_0^1 q(t)\sin(2\pi nt)\,dt.$$

Die Parsevalsche Identität[1] besagt dann:

$$\|q\|^2 = \int_0^1 q(t)^2\,dt = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) < \infty.$$

Also müssen die einzelnen Summen der $a_n$ und $b_n$ auch konvergieren.Da

$$\langle \cos 2\pi nx, q\rangle = \int_0^1 q(t)\cos(2\pi nt)\,dt = \frac{a_n}{\sqrt{2}}.$$

und $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$, folgt:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\big(\langle \cos 2\pi nx, q\rangle\big)^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n^2}{2} < \infty.$$

[1] [Parsevalsche Identität] Sei $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine Orthonormalbasis eines Hilbertraums $H$. Dann gilt für jedes $f \in H$:

$$\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}|\langle f, e_n\rangle|^2.$$

# 6 Korollar 1

**Korollar.** *Für $q \in L^2$ gelten die folgenden Abschätzungen:*

$$g_n^2 = 1 - \cos 2\pi nx + O\Big(\frac{1}{n}\Big),$$

$$\frac{d}{dx} g_n^2 = 2\pi n \sin 2\pi nx + O(1),$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi n} \sin 2\pi nx + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big),$$

$$\frac{d}{dx} a_n = \cos 2\pi nx + O\Big(\frac{1}{n}\Big),$$

*wobei $a_n(x,q) = y_1(x,\mu_n) y_2(x,\mu_n)$.*
**Beweis:**

Die Abschätzungen für $g_n^2$ wurde bereits im Beweis von Theorem 4 gemacht. Aus Theorem 4 gilt

$$g_n(x,q) = \sqrt{2}\sin(n\pi x) + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$g_n'(x,q) = \sqrt{2} n\pi \cos(n\pi x) + O(1)$$

Mit der Kettenregel erhält man

$$\frac{d}{dx} g_n^2(x,q) = 2 g_n(x,q) g_n'(x,q).$$

Einsetzen liefert

$$= 2\left(\sqrt{2}\sin(n\pi x) + O\Big(\frac{1}{n}\Big)\right)\Big(\sqrt{2} n\pi \cos(n\pi x) + O(1)\Big).$$

$$= 2(\sqrt{2}\sin(n\pi x))(\sqrt{2} n\pi \cos(n\pi x)) + 2(\sqrt{2}\sin(n\pi x))O(1) + 2O\left(\frac{1}{n}\right)(\sqrt{2} n\pi \cos(n\pi x)) + 2O\left(\frac{1}{n}\right)O(1).$$

$$= 4n\pi \sin(n\pi x)\cos(n\pi x) + O(1) + O(1) + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

$$= 4n\pi \sin(n\pi x)\cos(n\pi x) + O(1).$$

Mit $\sin(A)\cos(A) = \frac{1}{2}\sin(2A)$ folgt schließlich

$$\frac{d}{dx} g_n^2(x,q) = 2n\pi \sin(2n\pi x) + O(1).$$

Aus Theorem 3 gilt

$$\Big| y_1(x,\lambda,q) - \cos(\sqrt{\lambda}\, x)\Big| \le \frac{1}{\sqrt{|\lambda|}} \exp\Big(|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}|\, x + \|q\| \sqrt{x}\Big).$$

Da $x \in [0,1]$ und $q$ fest ist, ist

$$y_1(x,\lambda,q) = \cos(\sqrt{\lambda}\,x) + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right).$$

Analog erhält man aus

$$|y_1'(x,\lambda,q) + \sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}x)| \leq \|q\| \exp\Big(|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}|x + \|q\|\sqrt{x}\Big)$$

$$y_1'(x,\lambda,q) = -\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}x) + O(1).$$

Und mit

$$\sqrt{\mu_n} = n\pi + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

liefern die basic Estimates für $y_1$ und $y_2$ also

$$y_1(x,\mu_n) = \cos(n\pi x) + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$y_2(x,\mu_n) = \frac{1}{n\pi}\sin(n\pi x) + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

sowie

$$y_1'(x,\mu_n) = -n\pi\sin(n\pi x) + O(1),$$

$$y_2'(x,\mu_n) = \cos(n\pi x) + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Dies gilt gleichmäßig auf beschränkten Teilmengen von $[0,1]\times L^2$.

Setzt man die Abschätzungen für $y_1$ und $y_2$ ein, erhält man

$$a_n(x) = \left(\cos(n\pi x) + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(\frac{1}{n\pi}\sin(n\pi x) + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right).$$

$$= \cos(n\pi x)\frac{1}{n\pi}\sin(n\pi x) + \cos(n\pi x)O\left(\frac{1}{n^2}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right)\frac{1}{n\pi}\sin(n\pi x) + O\left(\frac{1}{n}\right)O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Da sin und cos beschränkt sind, folgt

$$= \frac{1}{n\pi}\sin(n\pi x)\cos(n\pi x) + O\left(\frac{1}{n^2}\right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right) + O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

und mit $\sin(A)\cos(A) = \frac{1}{2}\sin(2A)$ folgt schließlich

$$a_n(x) = \frac{1}{2\pi n}\sin(2\pi n x) + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Mit der Produktregel folgt

$$\frac{d}{dx}a_n(x) = y_1'(x,\mu_n)y_2(x,\mu_n) + y_1(x,\mu_n)y_2'(x,\mu_n).$$

Also

$$\frac{d}{dx}a_n = (-n\pi\sin(n\pi x) + O(1))\left(\frac{1}{n\pi}\sin(n\pi x) + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$
$$+\left(\cos(n\pi x) + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(\cos(n\pi x) + O\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Nun multiplizieren wir beide Terme aus.
Erster Term:

$$(-n\pi\sin(n\pi x))\left(\frac{1}{n\pi}\sin(n\pi x)\right)+(-n\pi\sin(n\pi x))O\left(\frac{1}{n^2}\right)+O(1)\frac{1}{n\pi}\sin(n\pi x)+O(1)O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Dies ergibt

$$-\sin^2(n\pi x) + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Zweiter Term:

$$\cos(n\pi x)\cos(n\pi x) + \cos(n\pi x)O\left(\frac{1}{n}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right)\cos(n\pi x) + O\left(\frac{1}{n}\right)O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Damit folgt

$$\cos^2(n\pi x) + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Zusammen erhält man

$$\frac{d}{dx}a_n = \cos^2(n\pi x) - \sin^2(n\pi x) + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Und mit $\cos^2(A) - \sin^2(A) = \cos(2A)$ folgt schließlich

$$\frac{d}{dx}a_n = \cos(2\pi nx) + O\left(\frac{1}{n}\right).$$