

UNIVERSITÄT MANNHEIM

Fakultät für Mathematik und Informatik

Bachelorarbeit

Isospektralmengen von Hill's Gleichung

vorgelegt von

Lisa Sophie Mostowoj

Matrikelnummer: 1986727

Semester: 6. Fachsemester

Betreuer: Professor Martin Schmidt

Abgabedatum: 18.05.2026

Eidesstattliche Versicherung

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und ohne fremde Hilfe angefertigt habe. Alle Stellen, die wörtlich oder sinngemäß aus veröffentlichten oder unveröffentlichten Quellen entnommen wurden, sind als solche kenntlich gemacht.

Ich versichere außerdem, dass die Arbeit weder vollständig noch in wesentlichen Teilen bereits zu einem früheren Zeitpunkt oder an anderer Stelle als Prüfungsleistung vorgelegt wurde. Alle verwendeten Quellen, einschließlich der Sekundärliteratur, elektronischer Ressourcen, graphischer Darstellungen und Bilder, sind vollständig und korrekt in der Bibliographie angegeben.

Ich bin ferner damit einverstanden, dass meine Arbeit zum Zwecke eines Plagiatsabgleichs in elektronischer Form anonymisiert gespeichert und übermittelt wird.

Mir ist bekannt, dass bei fehlender oder unrichtiger Abgabe dieser Erklärung die Prüfungsleistung mit „nicht ausreichend“ bewertet werden kann.

Mannheim, 18.05.2026
Ort, Datum


Unterschrift

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	4
2	Spektraltheorie des Schrödingeroperators	6
2.1	Fundamentallösung	6
2.2	Monodromie und Diskriminante	11
2.3	Das Dirichlet-Prolem	21
2.4	Die Isospektralmenge und die Abbildung $\kappa \times \mu$	24
3	Vorbereitende Lemmata	26
4	Hauptsatz	49
5	Zusammenfassung	56
	Literaturverzeichnis	57

1 Einleitung

Im Zentrum dieser Arbeit steht die *Hill-Differentialgleichung*

$$-y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

mit einem reellen, 1-periodischen Potential $q \in L^2([0, 1], \mathbb{R})$ und dem Spektralparameter $\lambda \in \mathbb{C}$. Diese lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung ist ein zentrales Modell der Spektraltheorie eindimensionaler Schrödingeroperatoren mit periodischem Potential.

Die Lösungstheorie der Hill-Gleichung wird wesentlich von der zugehörigen *Monodromiematrix* und ihrer Spur, der *Diskriminante* getragen. Sie enthält zentrale Informationen über die Bandstruktur des Spektrums des Operators $-d^2/dx^2 + q$ auf $\mathbb{R}$. Da ein Potential durch seine Diskriminante im Allgemeinen nicht eindeutig festgelegt ist, können verschiedene Potentiale dieselben spektralen Eigenschaften besitzen. Daher definieren wir, motiviert durch die Arbeit *Hill's operator and hyperelliptic function theory in the presence of infinitely many branch points* [2], die sogenannte Isospektralmenge

$$\text{Iso}(q) := \left\{ \tilde{q} \in L^2([0, 1], \mathbb{R}) : \Delta(\lambda, \tilde{q}) = \Delta(\lambda, q) \text{ für alle } \lambda \in \mathbb{C} \right\}$$

als die Menge aller Potentiale mit derselben Diskriminante. Eine zentrale Fragestellung der inversen Spektraltheorie der Hill-Gleichung besteht darin, die Struktur dieser Menge zu verstehen und sie durch geeignete Parameter zu beschreiben.

In der Arbeit *Hill's operator and hyperelliptic function theory in the presence of infinitely many branch points* [2] parametrisieren McKean und Trubowitz die Menge $\text{Iso}(q)$ für glatte Potentiale durch geeignete Folgen

$$(\kappa_n, \mu_n)_{n \in \mathbb{N}},$$

wobei μ_n die Dirichlet-Eigenwerte und κ_n die zugehörigen Floquet-Exponenten darstellen. Im Buch *Inverse Spectral Theory* von Pöschel und Trubowitz [1] wird

demgegenüber ein elementarerer, rein analytischer Rahmen entwickelt, der die inverse Spektraltheorie systematisch auf den Raum $L^2([0, 1], \mathbb{R})$ ausdehnt.

Das Ziel dieser Bachelorarbeit ist es nun, die zentrale Charakterisierung der Isospektralmenge aus [2] im Rahmen der allgemeineren L^2 -Theorie von [1] zu beweisen. Präziser formuliert zeigen wir den folgenden Satz:

Für jedes $q \in L^2([0, 1], \mathbb{R})$ bildet die Abbildung $\kappa \times \mu$ die Isospektralmenge $\text{Iso}(q)$ bijektiv auf die Menge aller Folgen $(\kappa_n, \mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ab, für die μ_n in der n -ten Spektrallücke liegt und $\Delta(\mu_n) = (-1)^n 2 \cosh(\kappa_n)$ erfüllt ist.

Der Beweis dieses Satzes basiert wesentlich auf den analytischen Methoden von Pöschel und Trubowitz. Die für den Beweis benötigten Resultate werden wir im Verlauf der Arbeit schrittweise entwickeln.

Zunächst stellen wir in Kapitel 2 die hierfür benötigten Grundlagen der periodischen Spektraltheorie zusammen und führen insbesondere die Diskriminante, das Dirichlet-Spektrum sowie die Abbildung $\kappa \times \mu$ ein. Anschließend entwickeln wir in Kapitel 3 vorbereitenden Lemmata, die den technischen Kern des Hauptsatzbeweises bilden. Schließlich zeigen wir in Kapitel 4 den Hauptsatz.

Anmerkung

Bei der Erstellung dieser Arbeit wurden KI-basierte Werkzeuge unterstützend für sprachliche Überarbeitungen sowie vereinzelt zur Diskussion mathematischer Formulierungen und Argumentationsansätze verwendet.

2 Spektraltheorie des Schrödingeroperators

In diesem Kapitel fassen wir die für den weiteren Verlauf der Arbeit benötigten Grundlagen zur Spektraltheorie des eindimensionalen Schrödingeroperators

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x)$$

zusammen. Ausgehend von der Eigenwertgleichung $Ly = \lambda y$ und den zugehörigen Fundamentallösungen y_1 und y_2 wird insbesondere die Hill-Diskriminante eingeführt.

2.1 Fundamentallösung

Wir betrachten die Hill-Differentialgleichung

$$-y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x), \tag{2.1}$$

wobei $\lambda \in \mathbb{C}$ ein komplexer Spektralparameter und q ein reellwertiges, quadratintegrierbares Potential mit Periode 1 ist. Genauer betrachten wir q als 1-periodische Funktion, die eindeutig als lokale L^2 -Funktion auf $\mathbb{R}$ fortgesetzt wird, also $q(x+n) = q(x)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ und $x \in \mathbb{R}$ erfüllt. Den Raum der reellwertigen, quadratintegrierbaren Funktionen auf $[0,1]$ bezeichnen wir mit $L^2([0,1], \mathbb{R})$. Auf diesem Raum betrachten wir das Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) dt$$

sowie die dadurch induzierte Norm

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}.$$

Da Gleichung (2.1) eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung ist, ist der Lösungsraum für jedes feste $\lambda \in \mathbb{C}$ zweidimensional. Eine nützliche Basis dieses Lösungsraums liefern die beiden Lösungen y_1 und y_2 , die durch die

Anfangsbedingungen

$$y_1(0, \lambda, q) = y_2'(0, \lambda, q) = 1, \quad y_1'(0, \lambda, q) = y_2(0, \lambda, q) = 0$$

eindeutig festgelegt sind. Die Funktionen y_1 und y_2 heißen *Fundamentallösungen* der Hill-Gleichung. Eine detaillierte Behandlung ihrer grundlegenden Eigenschaften findet sich in [1, Kapitel 1]. Die für den weiteren Verlauf dieser Arbeit zentralen Resultate stellen wir nun im Folgenden zusammen.

Theorem 2.1 ([1, Kapitel 1, Theorem 1]). *Seien $q \in L^2_{\mathbb{C}}([0, 1])$ und $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann existieren eindeutige Lösungen $y_1(\cdot, \lambda, q)$ und $y_2(\cdot, \lambda, q)$ der Hill-Differentialgleichung (2.1) mit den obigen Anfangsbedingungen. Sie lassen sich als Potenzreihen*

$$y_1(x, \lambda, q) = \cos \sqrt{\lambda} x + \sum_{n \geq 1} C_n(x, \lambda, q)$$

mit

$$C_n(x, \lambda, q) = \int_{0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{n+1} = x} c_{\lambda}(t_1) \prod_{i=1}^n [s_{\lambda}(t_{i+1} - t_i) q(t_i)] dt_1 \cdots dt_n$$

und

$$y_2(x, \lambda, q) = \frac{\sin(\sqrt{\lambda} x)}{\sqrt{\lambda}} + \sum_{n \geq 1} S_n(x, \lambda, q)$$

mit

$$S_n(x, \lambda, q) = \int_{0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{n+1} = x} s_{\lambda}(t_1) \prod_{i=1}^n [s_{\lambda}(t_{i+1} - t_i) q(t_i)] dt_1 \cdots dt_n$$

darstellen. Diese Reihen konvergieren gleichmäßig auf beschränkten Teilmengen von $[0, 1] \times \mathbb{C} \times L^2_{\mathbb{C}}$ und erfüllen die Integralgleichungen

$$y_1(x, \lambda, q) = \cos(\sqrt{\lambda} x) + \int_0^x \frac{\sin(\sqrt{\lambda}(x-t))}{\sqrt{\lambda}} q(t) y_1(t, \lambda, q) dt \quad (2.2)$$

$$y_2(x, \lambda, q) = \frac{\sin(\sqrt{\lambda} x)}{\sqrt{\lambda}} + \int_0^x \frac{\sin(\sqrt{\lambda}(x-t))}{\sqrt{\lambda}} q(t) y_2(t, \lambda, q) dt. \quad (2.3)$$

Zudem gilt die Abschätzung

$$|y_1(x, \lambda, q)|, |y_2(x, \lambda, q)| \leq \exp(|\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}| x + \|q\| \sqrt{x}).$$

Die Integraldarstellungen zeigen, dass die Fundamentallösungen aus den freien Lösungen $\cos \sqrt{\lambda} x$ beziehungsweise $\sin(\sqrt{\lambda} x)/\sqrt{\lambda}$ durch einen zusätzlichen, vom Potential q abhängigen Integralterm hervorgehen. Wir bezeichnen die freien Lösungen

abgekürzt durch

$$c_\lambda(x) = \cos(\sqrt{\lambda}x), \quad s_\lambda(x) = \frac{\sin(\sqrt{\lambda}x)}{\sqrt{\lambda}}.$$

Lemma 2.2 (Elementare Abschätzungen für $s_\lambda(x)$ und $c_\lambda(x)$). *Für alle $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$ und alle $x \in [0, 1]$ gilt*

(i)

$$|c_\lambda(x)| \leq e^{|\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}|x}.$$

(ii)

$$|s_\lambda(x)| \leq \frac{1}{|\sqrt{\lambda}|} e^{|\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}|x}.$$

Beweis. Sei $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$ und $\sqrt{\lambda} = a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

Mit den Darstellungen

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

erhalten wir für $z = \sqrt{\lambda}x = (a + ib)x$

$$iz = -bx + iax \quad \text{und} \quad -iz = bx - iax$$

Wegen $|e^{\pm iax}| = 1$ erhalten wir für die Beträge

$$|e^{iz}| = e^{-bx} \quad \text{und} \quad |e^{-iz}| = e^{bx}.$$

Daher gilt für $x \in [0, 1]$ und $b \in \mathbb{R}$

$$|e^{\pm iz}| = e^{\pm bx} \leq e^{|b|x}.$$

Damit folgt für (i)

$$\begin{aligned} |c_\lambda(x)| &= |\cos(\sqrt{\lambda}x)| = \frac{1}{2} |e^{i\sqrt{\lambda}x} + e^{-i\sqrt{\lambda}x}| \\ &\leq \frac{1}{2} (|e^{i\sqrt{\lambda}x}| + |e^{-i\sqrt{\lambda}x}|) \\ &\leq \frac{1}{2} (e^{|\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}|x} + e^{|\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}|x}) = e^{|\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}|x}. \end{aligned}$$

Für (ii) ergibt sich analog

$$\begin{aligned}
 |s_\lambda(x)| &= \left| \frac{\sin(\sqrt{\lambda}x)}{\sqrt{\lambda}} \right| = \frac{1}{|\sqrt{\lambda}|} \left| \frac{1}{2i} (e^{i\sqrt{\lambda}x} - e^{-i\sqrt{\lambda}x}) \right| \\
 &\leq \frac{1}{|\sqrt{\lambda}|} \cdot \frac{1}{2} (|e^{i\sqrt{\lambda}x}| + |e^{-i\sqrt{\lambda}x}|) \\
 &\leq \frac{1}{|\sqrt{\lambda}|} \cdot \frac{1}{2} (e^{|\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}|x} + e^{|\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}|x}) \\
 &= \frac{1}{|\sqrt{\lambda}|} e^{|\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}|x}.
 \end{aligned}$$

Damit folgen die behaupteten Abschätzungen. □

Aus den Anfangsbedingungen von y_1 und y_2 folgt unmittelbar die folgende Darstellungsformel.

Korollar 2.3 ([1, Kapitel 1, Korollar 1]). *Jede Lösung $y(x)$ der Hill-Gleichung (2.1) ist eindeutig gegeben durch*

$$y(x) = y(0) y_1(x) + y'(0) y_2(x).$$

Besitzt eine Lösung $y(x)$ eine doppelte Nullstelle in $[0, 1]$, so verschwindet $y(x)$ identisch.

Für die weitere Analyse benötigen wir verfeinerte Abschätzungen der Fundamentallösungen, die im folgenden Theorem zusammengefasst sind.

Theorem 2.4 (Basic Estimates, [1, Kapitel 1, Theorem 3]). *Auf $[0, 1] \times \mathbb{C} \times L_{\mathbb{C}}^2$ gelten die folgenden Abschätzungen:*

$$\begin{aligned}
 |y_1(x, \lambda, q) - \cos \sqrt{\lambda} x| &\leq \frac{1}{|\sqrt{\lambda}|} \exp(|\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}| x + \|q\| \sqrt{x}), \\
 |y_2(x, \lambda, q) - \frac{\sin \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda}}| &\leq \frac{1}{|\lambda|} \exp(|\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}| x + \|q\| \sqrt{x}),
 \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
 |y'_1(x, \lambda, q) + \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} x| &\leq \|q\| \exp(|\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}| x + \|q\| \sqrt{x}), \\
 |y'_2(x, \lambda, q) - \cos \sqrt{\lambda} x| &\leq \frac{\|q\|}{|\sqrt{\lambda}|} \exp(|\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}| x + \|q\| \sqrt{x}).
 \end{aligned}$$

Theorem 2.5 (Analytizitätseigenschaften, [1, Kapitel 1, Analytic Properties]).

(i) Für jedes $x \in [0, 1]$ sind

$$y_j(x, \lambda, q), \quad y'_j(x, \lambda, q), \quad j = 1, 2,$$

ganze Funktionen auf $\mathbb{C} \times L^2_{\mathbb{C}}$, die auf $\mathbb{R} \times L^2_{\mathbb{R}}$ reellwertig sind.

(ii) Die Lösung

$$y_j(\cdot, \lambda, q), \quad j = 1, 2,$$

ist analytisch als Abbildung von $\mathbb{C} \times L^2_{\mathbb{C}}$ nach $H^2_{\mathbb{C}}$, wobei $H^k_{\mathbb{C}} = H^k_{\mathbb{C}}[0, 1]$ den Hilbertraum der auf $[0, 1]$ definierten komplexwertigen Funktionen mit k Ableitungen in L^2 bezeichnet.

Theorem 2.6 ([1, Kapitel 1, Theorem 6]). Für $j = 1, 2$ lassen sich die Ableitungen der Fundamentallösungen y_j sowie ihre ersten Ableitungen sowohl nach dem Potential q als auch nach dem Spektralparameter λ explizit beschreiben.

(i) Für die Ableitungen nach dem Potential gilt

$$\frac{\partial y_j}{\partial q(t)}(x) = y_j(t) [y_1(t)y_2(x) - y_1(x)y_2(t)] \mathbf{1}_{[0,x]}(t),$$

sowie

$$\frac{\partial y'_j}{\partial q(t)}(x) = y_j(t) [y_1(t)y'_2(x) - y'_1(x)y_2(t)] \mathbf{1}_{[0,x]}(t).$$

(ii) Die so definierten Gradienten sind gemeinsam stetig in x , λ und q . Darüber hinaus erhält man die Ableitungen nach λ durch

$$\frac{\partial y_j}{\partial \lambda} = - \int_0^1 \frac{\partial y_j}{\partial q(t)} dt, \quad \frac{\partial y'_j}{\partial \lambda} = - \int_0^1 \frac{\partial y'_j}{\partial q(t)} dt.$$

Aus den Fundamentallösungen konstruieren wir nun zwei zentrale Objekte der periodischen Spektraltheorie, die Monodromiematrix und ihre Spur, die Diskriminante.

2.2 Monodromie und Diskriminante

Der vorherige Abschnitt liefert uns nun ein Fundamentalsystem der Hill-Gleichung. Auf dieser Grundlage führen wir die folgende Definition ein.

Definition 2.7 (Fundamentalmatrix und Monodromie, [1, Kapitel 1]). *Wir fassen die Fundamentallösungen y_1 und y_2 in Matrixschreibweise zur Fundamentalmatrix*

$$Y(x, \lambda, q) = \begin{pmatrix} y_1(x, \lambda, q) & y_2(x, \lambda, q) \\ y_1'(x, \lambda, q) & y_2'(x, \lambda, q) \end{pmatrix}$$

zusammen. Die Matrix

$$M(\lambda, q) := Y(1, \lambda, q)$$

heißt Monodromiematrix.

Die Monodromiematrix beschreibt somit, wie sich Anfangsdaten einer Lösung nach Durchlaufen einer Periode verändern. Für die weitere Analyse ist wesentlich, dass diese Matrix Determinante 1 besitzt. Das liefert uns die sogenannten Wronski-Identität. Zu ihrer Formulierung führen wir zunächst den allgemeinen Begriff der Wronski-Determinante ein.

Definition 2.8 (Wronski-Determinante, [1, Kapitel 1]). *Für zwei differenzierbare Funktionen $f, g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ ist*

$$[f, g](x) := \det \begin{pmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{pmatrix} = f(x) g'(x) - f'(x) g(x)$$

die Wronski-Determinante von f und g .

Lemma 2.9 (Wronski-Identität, [1, Kapitel 1]). *Für alle $x \in [0, 1]$, $\lambda \in \mathbb{C}$ und $q \in L^2_{\mathbb{C}}([0, 1])$ gilt*

$$[y_1, y_2](x) = 1.$$

Insbesondere gilt damit für die Monodromiematrix

$$\det M(\lambda, q) = 1 \quad \text{für alle } \lambda \in \mathbb{C}.$$

Letztere Bedingung impliziert für die Eigenwerte $\alpha_1(\lambda)$ und $\alpha_2(\lambda)$ der Monodromiematrix

$$\alpha_1(\lambda) \alpha_2(\lambda) = 1.$$

Demnach sind die beiden Eigenwerte Kehrwerte voneinander. Da für eine 2×2 -Matrix die Eigenwerte durch Spur und Determinante bestimmt sind und die Determinante in dem Fall fest ist, hängen die Eigenwerte von $M(\lambda, q)$ nur noch von der Spur ab. Genauer sind sie die Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$\alpha^2 - \text{Spur } M(\lambda, q) \alpha + 1 = 0. \quad (2.4)$$

Damit enthält die Spur der Monodromiematrix die wesentliche Spektralinformation und motiviert die folgende Definition.

Definition 2.10 (Diskriminante, [3, Kapitel 1]). *Die Diskriminante der Hill-Gleichung ist die Funktion*

$$\Delta(\lambda, q) := \text{Spur } M(\lambda, q) = y_1(1, \lambda, q) + y_2'(1, \lambda, q), \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Ist q aus dem Kontext klar, so schreiben wir kurz $\Delta(\lambda)$.

Bemerkung 2.11 (Bandstruktur des Spektrums). Die Diskriminante ist also das zentrale Objekt der gesamten weiteren Spektralanalyse. Nach Theorem 2.5 ist sie als Summe zweier ganzer Funktionen selbst ganz in λ und bestimmt durch Auflösen von (2.4) über

$$\alpha_{1,2}(\lambda) = \frac{1}{2} \left(\Delta(\lambda) \pm \sqrt{\Delta(\lambda)^2 - 4} \right) \quad (2.5)$$

die Eigenwerte der Monodromiematrix. Diese Eigenwerte heißen *Floquet-Multiplikatoren*. Sie beschreiben das Verhalten von Lösungen der Hill-Gleichung unter Translation um die Periode 1. Ist φ eine Eigenfunktion der Monodromie zum Eigenwert α , so erfüllt φ die Floquet-Bedingung $\varphi(x+1) = \alpha \varphi(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Insbesondere entsprechen die Spezialfälle $\alpha = 1$ und $\alpha = -1$ periodischen beziehungsweise antiperiodischen Lösungen. Die zugehörigen λ -Werte heißen periodische beziehungsweise antiperiodische Eigenwerte. Im asymptotischen Bereich liegen jeweils zwei periodische Eigenwerte nahe beieinander, wobei sie auch zusammenfallen können. Dasselbe gilt für die antiperiodischen Eigenwerte. (2.5) stellt eine Beziehung zwischen λ und α her, aus der sich die Bandstruktur des Spektrums ergibt. Für reelle periodische Potentiale gehört ein Wert λ genau dann zum Spektrum auf $\mathbb{R}$, wenn die zugehörigen Floquet-Multiplikatoren Betrag 1 besitzen. Mit (2.5) ist dies äquivalent zur Bedingung $|\Delta(\lambda)| \leq 2$. Die Randfälle $|\Delta(\lambda)| = 2$ entsprechen genau den periodischen beziehungsweise antiperiodischen Eigenwerten. Dadurch zerfällt das Spektrum in abgeschlossene Intervalle, die sogenannten *Spektralbänder*. Die offenen Intervalle

le zwischen zwei benachbarten Bandrändern heißen *Bandlücken*. Dabei liegen die Bandränder stets bei periodischen oder antiperiodischen Eigenwerten, sodass die Bandstruktur des Spektrums vollständig durch diese Werte und damit äquivalent durch die Diskriminante beschrieben wird.

Lemma 2.12 (Ableitung der Diskriminante). *Für die Ableitung der Diskriminante gilt*

$$\Delta'(\lambda) = -y_2(1)\|y_1\|_2^2 + [y_1(1) - y_2'(1)] \int_0^1 y_1(t) y_2(t) dt + y_1'(1) \|y_2\|_2^2.$$

Beweis. Aus der Definition der Diskriminante folgt zunächst

$$\Delta'(\lambda) = \frac{\partial}{\partial \lambda} y_1(1, \lambda, q) + \frac{\partial}{\partial \lambda} y_2'(1, \lambda, q).$$

Mit Theorem 2.6 (b) erhalten wir die Ableitungen nach λ durch

$$\frac{\partial y_1}{\partial \lambda}(1, \lambda, q) = - \int_0^1 \frac{\partial y_1}{\partial q(t)}(1, \lambda, q) dt, \quad \frac{\partial y_2'}{\partial \lambda}(1, \lambda, q) = - \int_0^1 \frac{\partial y_2'}{\partial q(t)}(1, \lambda, q) dt.$$

ausdrücken. Für die Ableitungen nach $q(t)$ liefert Theorem 2.6 (a) bei $x = 1$ für $t \in [0, 1]$

$$\frac{\partial y_1}{\partial q(t)}(1) = y_1(t) [y_1(t)y_2(1) - y_1(1)y_2(t)]$$

und

$$\frac{\partial y_2'}{\partial q(t)}(1) = y_2(t) [y_1(t)y_2'(1) - y_1'(1)y_2(t)]$$

da $\mathbf{1}_{[0,1]}(t) = 1$.

Setzen wir diese Darstellungen in die obigen Integrale ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{\partial y_1}{\partial \lambda}(1) &= - \int_0^1 y_1(t) [y_1(t)y_2(1) - y_1(1)y_2(t)] dt \\ &= -y_2(1) \int_0^1 y_1(t)^2 dt + y_1(1) \int_0^1 y_1(t)y_2(t) dt. \end{aligned} \quad (2.6)$$

sowie

$$\begin{aligned} \frac{\partial y_2'}{\partial \lambda}(1) &= - \int_0^1 y_2(t) [y_1(t)y_2'(1) - y_1'(1)y_2(t)] dt \\ &= -y_2'(1) \int_0^1 y_1(t)y_2(t) dt + y_1'(1) \int_0^1 y_2(t)^2 dt. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Aus (2.6) und (2.7) folgt

$$\begin{aligned}
 \Delta'(\lambda) &= \frac{\partial y_1}{\partial \lambda}(1) + \frac{\partial y_2'}{\partial \lambda}(1) \\
 &= -y_2(1) \int_0^1 y_1(t)^2 dt + y_1(1) \int_0^1 y_1(t) y_2(t) dt \\
 &\quad - y_2'(1) \int_0^1 y_1(t) y_2(t) dt + y_1'(1) \int_0^1 y_2(t)^2 dt \\
 &= -y_2(1) \|y_1\|_{L^2}^2 + [y_1(1) - y_2'(1)] \int_0^1 y_1(t) y_2(t) dt + y_1'(1) \|y_2\|_{L^2}^2.
 \end{aligned}$$

Damit haben wir die gewünschte Diskriminantenableitung bestimmt. $\square$

Die in der Bemerkung 2.11 beschriebene Bandstruktur wird durch ein klassisches Resultat von Magnus und Winkler [3] weiter verfeinert. Es beschreibt in [Kapitel 2, Theorem 2.5.] die Vielfachheit von den Nullstellen der Funktion $\Delta^2 - 4$ und damit das Verhalten der Diskriminante am Rand. Da Magnus-Winkler diese Aussage nur für glatte Potentiale beweist, zeigen wir im folgenden, dass dieses Resultat auch auf den L^2 -Rahmen übertragbar ist.

Lemma 2.13 (Vielfachheit der Eigenwerte im L^2 -Rahmen). *Für jedes Potential $q \in L^2([0, 1], \mathbb{R})$ sind die Nullstellen der Gleichung $\Delta^2(\lambda) - 4 = 0$ (also die periodischen und antiperiodischen Eigenwerte) stets entweder einfach oder doppelt. Genauer gelten die folgenden äquivalenten Aussagen:*

(i) $\hat{\lambda}$ ist eine doppelte Nullstelle von $\Delta^2 - 4$

$$\iff \Delta^2(\hat{\lambda}) = 4 \quad \text{und} \quad \Delta'(\hat{\lambda}) = 0.$$

(ii) $\hat{\lambda}$ ist eine einfache Nullstelle von $\Delta^2 - 4$

$$\iff \Delta^2(\hat{\lambda}) = 4 \quad \text{und} \quad \Delta'(\hat{\lambda}) \neq 0.$$

Beweis. Für den Beweis nutzen wir die Kurzschreibweisen

$$\eta_1 := y_1(1, \lambda, q), \quad \eta_2 := y_2(1, \lambda, q), \quad \eta_1' := y_1'(1, \lambda, q), \quad \eta_2' := y_2'(1, \lambda, q).$$

für die Auswertungen an der Stelle $x = 1$.

Mit der in Lemma 2.12 hergeleiteten Darstellung für die Ableitung der Diskriminante

erhalten wir

$$\Delta'(\lambda) = (\eta_1 - \eta_2') \int_0^1 y_1 y_2 dt - \eta_2 \int_0^1 y_1^2 dt + \eta_1' \int_0^1 y_2^2 dt. \quad (2.8)$$

Des Weiteren folgt mit der Wronski-Identität $\eta_1 \eta_2' - \eta_2 \eta_1' = 1$

$$\Delta^2 - 4 = (\eta_1 + \eta_2')^2 - 4(\eta_1 \eta_2' - \eta_2 \eta_1') = (\eta_1 - \eta_2')^2 - 4\eta_2 \eta_1'. \quad (2.9)$$

Unter der Voraussetzung $\eta_1' \neq 0$ können wir damit (2.8) durch Einsetzen der Darstellung für η_2 aus (2.9) sowie durch quadratische Ergänzung in die Form

$$\Delta'(\lambda) = \operatorname{sgn}(\eta_1') \left(\int_0^1 \left(\sqrt{|\eta_1'|} y_2 + \operatorname{sgn}(\eta_1') \frac{\eta_1 - \eta_2'}{2\sqrt{|\eta_1'|}} y_1 \right)^2 dt - \frac{\Delta(\lambda)^2 - 4}{4|\eta_1'|} \int_0^1 y_1^2 dt \right)$$

bringen.

Wir definieren nun $f(\lambda) := \Delta^2(\lambda) - 4$. Dann gilt

$$f'(\lambda) = 2\Delta(\lambda)\Delta'(\lambda), \quad f''(\lambda) = 2(\Delta'(\lambda))^2 + 2\Delta(\lambda)\Delta''(\lambda).$$

Eine Nullstelle $\hat{\lambda}$ von f ist genau dann einfach, wenn $f'(\hat{\lambda}) \neq 0$ gilt. Sie besitzt genau dann Vielfachheit 2, wenn $f'(\hat{\lambda}) = 0$ und zugleich $f''(\hat{\lambda}) \neq 0$ gilt. Wir werden im Folgenden zunächst zeigen, dass eine höhere Vielfachheit nicht auftreten kann.

Sei nun also $\hat{\lambda}$ eine Nullstelle von f . Dann gilt $\Delta^2(\hat{\lambda}) = 4$, also insbesondere

$$\Delta(\hat{\lambda}) = \pm 2 \neq 0.$$

Damit verschwindet $\Delta(\hat{\lambda})$ an keiner Nullstelle von f . Folglich erhält man

$$f'(\hat{\lambda}) = 0 \iff \Delta'(\hat{\lambda}) = 0.$$

Die Vielfachheit der Nullstelle $\hat{\lambda}$ von f wird daher vollständig durch das Verhalten von $\Delta'(\hat{\lambda})$ bestimmt. Im Folgenden untersuchen wir daher genau den Fall $\Delta'(\hat{\lambda}) = 0$.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit betrachten wir den Fall $\Delta(\hat{\lambda}) = 2$. Der Fall $\Delta(\hat{\lambda}) = -2$ verläuft analog. Unser Ziel ist es nun zu zeigen, dass aus $\Delta'(\hat{\lambda}) = 0$ gerade $M(\hat{\lambda}) = I$ folgt.

Angenommen, es gelte $\eta'_1 \neq 0$. Dann liefert die Signum-Formel an der Stelle $\hat{\lambda}$ mit $\Delta^2(\hat{\lambda}) - 4 = 0$

$$\Delta'(\hat{\lambda}) = \operatorname{sgn}(\eta'_1) \int_0^1 \left(\sqrt{|\eta'_1|} y_2 + \operatorname{sgn}(\eta'_1) \frac{\eta_1 - \eta'_2}{2\sqrt{|\eta'_1|}} y_1 \right)^2 dt.$$

Der Integrand ist als Quadrat nichtnegativ. Wäre das Integral gleich 0, so müsste der Integrand fast überall verschwinden. Das würde bedeuten, dass eine nichttriviale Linearkombination von y_1 und y_2 fast überall verschwindet. Da y_1 und y_2 stetig sind, verschwindet die Linearkombination folglich auf ganz $[0, 1]$. Wegen der Anfangsbedingungen $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = 0$ widerspricht dies jedoch der linearen Unabhängigkeit von y_1, y_2 . Folglich ist das Integral strikt positiv. Zusammen mit $\operatorname{sgn}(\eta'_1) \neq 0$ folgt im Fall $\Delta(\hat{\lambda}) = 2$

$$\Delta'(\hat{\lambda}) \neq 0,$$

was unserer Voraussetzung $\Delta'(\hat{\lambda}) = 0$ widerspricht. Also muss $\eta'_1 = 0$ gelten. Zusammen mit (2.9) folgt daraus für $\Delta(\hat{\lambda}) = 2$

$$0 = (\eta_1 - \eta'_2)^2 + 4\eta'_1\eta_2 = (\eta_1 - \eta'_2)^2$$

und damit $\eta_1 = \eta'_2$. Zusammen mit $\Delta(\hat{\lambda}) = \eta_1 + \eta'_2 = 2$ ergibt sich also

$$\eta_1 = \eta'_2 = 1.$$

Durch Einsetzen in (2.8) erhalten wir schließlich

$$0 = \Delta'(\mu) = (\eta_1 - \eta'_2) \int_0^1 y_1 y_2 dt - \eta_2 \int_0^1 y_1^2 dt + \eta'_1 \int_0^1 y_2^2 dt = -\eta_2 \int_0^1 y_1^2 dt.$$

Da $y_1(\cdot, \hat{\lambda})$ wegen $y_1(0, \hat{\lambda}) = 1$ eine nichttriviale Lösung ist, gilt $\int_0^1 y_1^2 dt > 0$, und damit insbesondere $\eta_2 = 0$.

Damit haben wir gezeigt, dass im Fall $\Delta(\hat{\lambda}) = 2$ und $\Delta'(\hat{\lambda}) = 0$ die Monodromiematrix der Einheitsmatrix entspricht, das heißt $M(\hat{\lambda}) = I$. Für den Fall $\Delta(\hat{\lambda}) = -2$ ergibt sich analog $M(\hat{\lambda}) = -I$. Damit sind alle Lösungen der Hill-gleichung periodisch beziehungsweise antiperiodisch, und der zugehörige Eigenraum ist zweidimensional. Dies entspricht geometrisch genau einer doppelten Nullstelle. Im nächsten Schritt zeigen wir nun, dass die Vielfachheit tatsächlich genau 2 beträgt.

Es gilt

$$f''(\lambda) = 2(\Delta'(\lambda))^2 + 2\Delta(\lambda)\Delta''(\lambda).$$

Da an der Stelle $\hat{\lambda}$ bereits $\Delta'(\hat{\lambda}) = 0$ gilt, vereinfacht sich dies zu

$$f''(\hat{\lambda}) = 2\Delta(\hat{\lambda})\Delta''(\hat{\lambda}).$$

Aus $\Delta(\hat{\lambda}) = \pm 2 \neq 0$ folgt daraus unmittelbar

$$f''(\hat{\lambda}) \neq 0 \iff \Delta''(\hat{\lambda}) \neq 0.$$

Es genügt daher, $\Delta''(\hat{\lambda}) \neq 0$ nachzuweisen.

Hierfür differenzieren wir (2.8) und erhalten

$$\begin{aligned} \Delta''(\lambda) &= (\dot{\eta}_1 - \dot{\eta}'_2) \int_0^1 y_1 y_2 dt + (\eta_1 - \eta'_2) \frac{d}{d\lambda} \int_0^1 y_1 y_2 dt \\ &\quad - \dot{\eta}_2 \int_0^1 y_1^2 dt - \eta_2 \frac{d}{d\lambda} \int_0^1 y_1^2 dt \\ &\quad + \dot{\eta}'_1 \int_0^1 y_2^2 dt + \eta'_1 \frac{d}{d\lambda} \int_0^1 y_2^2 dt. \end{aligned}$$

An der Stelle $\hat{\lambda}$ gilt nun

$$\eta_1 - \eta'_2 = 0, \quad \eta_2 = 0, \quad \eta'_1 = 0.$$

Damit verschwinden alle Terme, die Ableitungen der Integrale enthalten, und es bleibt

$$\Delta''(\mu) = (\dot{\eta}_1 - \dot{\eta}'_2) \int_0^1 y_1 y_2 dt - \dot{\eta}_2 \int_0^1 y_1^2 dt + \dot{\eta}'_1 \int_0^1 y_2^2 dt. \quad (2.10)$$

Wir werten nun die λ -Ableitungen mit Theorem 2.6. an der Stelle $x = 1$ aus, wobei wir zur besseren Lesbarkeit die Abkürzung $y_j := y_j(t)$ verwenden

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_1 &= - \int_0^1 y_1 [y_1 y_2(1) - y_1(1) y_2] dt = -\eta_2 \int_0^1 y_1^2 dt + \eta_1 \int_0^1 y_1 y_2 dt = \int_0^1 y_1 y_2 dt \\ \dot{\eta}_2 &= - \int_0^1 y_2 [y_1 y_2(1) - y_1(1) y_2] dt = -\eta_2 \int_0^1 y_2 y_1 dt + \eta_1 \int_0^1 y_2^2 dt = \int_0^1 y_2^2 dt \\ \dot{\eta}'_1 &= - \int_0^1 y_1 [y_1 y'_2(1) - y'_1(1) y_2] dt = -\eta'_2 \int_0^1 y_1^2 dt + \eta'_1 \int_0^1 y_1 y_2 dt = - \int_0^1 y_1^2 dt \\ \dot{\eta}'_2 &= - \int_0^1 y_2 [y_1 y'_2(1) - y'_1(1) y_2] dt = -\eta'_2 \int_0^1 y_2 y_1 dt + \eta'_1 \int_0^1 y_2^2 dt = - \int_0^1 y_2 y_1 dt \end{aligned}$$

Setzen wir diese berechneten Werte in (2.10) ein, so erhalten wir

$$\Delta''(\mu) = 2 \left[\left(\int_0^1 y_1 y_2 dt \right)^2 - \int_0^1 y_1^2 dt \cdot \int_0^1 y_2^2 dt \right].$$

Da das Fundamentalsystem y_1, y_2 per Definition aus zwei linear unabhängigen Funktionen besteht, ist die Cauchy-Schwartz-Ungleichung für die linear unabhängigen Funktionen $y_1, y_2 \in L^2([0, 1], \mathbb{R})$

$$\left(\int_0^1 y_1 y_2 dt \right)^2 < \left(\int_0^1 y_1^2 dt \right) \left(\int_0^1 y_2^2 dt \right).$$

hier strikt erfüllt. Im Fall $\Delta(\hat{\lambda}) = 2$ folgt aus der zuvor hergeleiteten Darstellung von $\Delta''(\hat{\lambda})$ unmittelbar $\Delta''(\hat{\lambda}) < 0$. Analog erhält man im Fall $\Delta(\hat{\lambda}) = -2$, dass $\Delta''(\hat{\lambda}) > 0$. Insbesondere gilt in beiden Fällen

$$\Delta''(\hat{\lambda}) \neq 0.$$

Damit folgt schließlich

$$f''(\hat{\lambda}) = 2\Delta(\hat{\lambda})\Delta''(\hat{\lambda}) \neq 0.$$

Also kann jede Nullstelle $\hat{\lambda}$ von f höchstens Ordnung 2 besitzen. Gilt $f'(\hat{\lambda}) \neq 0$, so ist $\hat{\lambda}$ eine einfache Nullstelle. Im Fall $f'(\hat{\lambda}) = 0$ gilt zusätzlich $f''(\hat{\lambda}) \neq 0$, sodass $\hat{\lambda}$ genau Ordnung 2 besitzt.

Für (i) sei zunächst $\Delta(\hat{\lambda})^2 = 4$ und $\Delta'(\hat{\lambda}) = 0$. Dann gilt wegen $f(\lambda) = \Delta(\lambda)^2 - 4$ insbesondere $f(\hat{\lambda}) = 0$ sowie $f'(\hat{\lambda}) = 2\Delta(\hat{\lambda})\Delta'(\hat{\lambda}) = 0$. Folglich ist $\hat{\lambda}$ mindestens eine doppelte Nullstelle von f . Nun wissen wir, dass $f''(\hat{\lambda}) \neq 0$ gilt. Daher besitzt $\hat{\lambda}$ tatsächlich genau Ordnung 2. Sei umgekehrt $\hat{\lambda}$ eine doppelte Nullstelle von f . Dann folgt zunächst $f(\hat{\lambda}) = \Delta(\hat{\lambda})^2 - 4 = 0$, also $\Delta(\hat{\lambda})^2 = 4$ sowie $f'(\hat{\lambda}) = 0$. Mit $f'(\hat{\lambda}) = 2\Delta(\hat{\lambda})\Delta'(\hat{\lambda})$ erhält man also $2\Delta(\hat{\lambda})\Delta'(\hat{\lambda}) = 0$. Wegen $\Delta(\hat{\lambda})^2 = 4$ gilt insbesondere $\Delta(\hat{\lambda}) = \pm 2 \neq 0$, sodass unmittelbar $\Delta'(\hat{\lambda}) = 0$ folgt.

Für (ii) sei zunächst $\Delta(\hat{\lambda})^2 = 4$ und $\Delta'(\hat{\lambda}) \neq 0$. Dann gilt wegen $f(\lambda) = \Delta(\lambda)^2 - 4$ insbesondere $f(\hat{\lambda}) = 0$. Außerdem folgt $f'(\hat{\lambda}) = 2\Delta(\hat{\lambda})\Delta'(\hat{\lambda}) \neq 0$ da wegen $\Delta(\hat{\lambda})^2 = 4$ insbesondere $\Delta(\hat{\lambda}) = \pm 2 \neq 0$ gilt. Somit ist $\hat{\lambda}$ eine einfache Nullstelle von f . Sei umgekehrt $\hat{\lambda}$ eine einfache Nullstelle von f , dann gilt zunächst $f(\hat{\lambda}) = \Delta(\hat{\lambda})^2 - 4 = 0$, also $\Delta(\hat{\lambda})^2 = 4$. Da $\hat{\lambda}$ einfache Nullstelle ist, gilt außerdem $f'(\hat{\lambda}) \neq 0$. Mit $f'(\hat{\lambda}) = 2\Delta(\hat{\lambda})\Delta'(\hat{\lambda})$ folgt daher $2\Delta(\hat{\lambda})\Delta'(\hat{\lambda}) \neq 0$. Wegen $\Delta(\hat{\lambda}) = \pm 2 \neq 0$ erhält man unmittelbar $\Delta'(\hat{\lambda}) \neq 0$. $\square$

Bemerkung 2.14. Der Beweis von [3, Kapitel 2, Theorem 2.5] setzt die Regularität des Potentials voraus. Im L^2 -Rahmen reicht die klassische Theorie daher im Allgemeinen nicht mehr aus. Die wesentlichen Schwierigkeiten treten insbesondere bei der Darstellung von $\Delta'(\lambda)$ sowie bei der Berechnung von $\Delta''(\lambda)$ auf. Die hierfür benötigten Identitäten erhalten wir aus Theorem 2.6, welches die λ -Ableitungen der Fundamentallösungen durch Integraldarstellungen über die Gradienten $\frac{\partial y_j}{\partial q}(t)$ charakterisiert. Diese Darstellungen werden bei Pöschel und Trubowitz auch für Potentiale $q \in L^2$ hergeleitet und liefern Δ' sowie Δ'' unmittelbar als Bilinearformen in den Fundamentallösungen y_1 und y_2 .

Abschließend formulieren wir ein Lemma zur Invarianz der Diskriminante unter Translation des Potentials, was für die weitere Analyse von zentraler Bedeutung ist.

Lemma 2.15 (Konjugationslemma). *Sei q ein 1-periodisches Potential und für $\tau \in \mathbb{R}$ sei $q_\tau(x) := q(x + \tau)$. Dann sind für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ die Monodromiematrizen $M(\lambda, q_\tau)$ und $M(\lambda, q)$ konjugiert. Insbesondere gilt*

$$\Delta(\lambda, q_\tau) = \Delta(\lambda, q) \quad \text{für alle } \lambda \in \mathbb{C}, \tau \in \mathbb{R}.$$

Beweis. Für den Beweis setzen wir die Monodromiematrizen $M(\lambda, q_\tau)$ und $M(\lambda, q)$ zueinander in Beziehung. Sei dazu u eine Lösung der verschobenen Gleichung

$$-u''(x) + q_\tau(x)u(x) = \lambda u(x).$$

Wir definieren

$$v(s) := u(s - \tau).$$

Dann löst $v(s)$ aufgrund von $q_\tau(x) = q(x + \tau)$ die ursprüngliche Gleichung

$$-v''(s) + q(s)v(s) = \lambda v(s). \tag{2.11}$$

Betrachten wir die zugehörigen Zustandsvektoren

$$w(x) := \begin{pmatrix} u(x) \\ u'(x) \end{pmatrix}, \quad z(s) := \begin{pmatrix} v(s) \\ v'(s) \end{pmatrix},$$

so folgt aus $v(s) = u(s - \tau)$ unmittelbar

$$z(s) = w(s - \tau)$$

und damit insbesondere

$$z(\tau) = w(0), \quad z(\tau + 1) = w(1).$$

Da $v(s)$ eine Lösung von (2.11), gilt mit der Fundamentalmatrix Y

$$z(\tau) = Y(\tau, \lambda, q) z(0). \quad (2.12)$$

sowie

$$z(\tau + 1) = Y(\tau + 1, \lambda, q) z(0). \quad (2.13)$$

Wir lösen nun (2.12) nach $z(0)$ auf und setzen das Ergebnis in (2.13) ein. Dann erhalten wir

$$z(\tau + 1) = Y(\tau + 1, \lambda, q) Y(\tau, \lambda, q)^{-1} z(\tau).$$

Mit $z(\tau) = w(0)$ und $z(\tau + 1) = w(1)$ folgt daraus dann

$$w(1) = Y(\tau + 1, \lambda, q) Y(\tau, \lambda, q)^{-1} w(0).$$

folgt. Nach Definition der Monodromiematrix gilt zugleich

$$w(1) = M(\lambda, q_\tau) w(0)$$

Durch Vergleich mit der obigen Darstellung erhalten wir

$$M(\lambda, q_\tau) = Y(\tau + 1, \lambda, q) Y(\tau, \lambda, q)^{-1}. \quad (2.14)$$

Mit der Flusseigenschaft der Fundamentalmatrix $Y(\tau + 1, \lambda, q) = Y(\tau, \lambda, q) M(\lambda, q)$ erhalten wir letztlich durch Einsetzen in (2.14)

$$M(\lambda, q_\tau) = Y(\tau, \lambda, q) M(\lambda, q) Y(\tau, \lambda, q)^{-1}.$$

Also sind $M(\lambda, q_\tau)$ und $M(\lambda, q)$ tatsächlich zueinander konjugiert. Insbesondere besitzen damit $M(\lambda, q_\tau)$ und $M(\lambda, q)$ dieselbe Spur. Wegen $\Delta(\lambda, q) = \text{Spur } M(\lambda, q)$ folgt daraus dann sofort die behauptete Identität

$$\Delta(\lambda, q_\tau) = \Delta(\lambda, q).$$

Damit ist die Aussage gezeigt. □

2.3 Das Dirichlet-Problem

In diesem Abschnitt betrachten wir das einfachste Randwertproblem der Hill-Gleichung und untersuchen die Lage der zugehörigen Eigenwerte.

Definition 2.16 (Dirichlet-Problem). *Das **Dirichlet-Problem** zur Hill-Gleichung besteht aus der Differentialgleichung*

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

zusammen mit den Randbedingungen

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0.$$

*Ein Wert $\lambda \in \mathbb{C}$ heißt **Dirichlet-Eigenwert**, wenn dieses Randwertproblem eine nichttriviale Lösung besitzt. Die Gesamtheit aller Dirichlet-Eigenwerte bezeichnen wir als **Dirichlet-Spektrum**.*

Im Folgenden betrachten wir nur noch reellwertige Potentiale $q \in L^2 := L^2_{\mathbb{R}}([0, 1])$. Für das Dirichlet-Problem sind nur nichttriviale Lösungen von Interesse. Nach Korollar 2.3 hat jede Lösung wegen der Randbedingung $y(0) = 0$ die Form

$$y(x) = y'(0) y_2(x, \lambda, q).$$

Die zweite Randbedingung $y(1) = 0$ ist daher genau dann erfüllt, wenn

$$y_2(1, \lambda, q) = 0$$

gilt. Ist μ also eine Nullstelle von $y_2(1, \lambda, q)$, so löst $y_2(x, \mu, q)$ das Dirichlet-Problem nichttrivial. Daher ist μ ein Dirichlet-Eigenwert. Umgekehrt gilt für jeden Dirichlet-Eigenwert μ mit zugehöriger Eigenfunktion y

$$y(x) = y'(0) y_2(x, \mu, q),$$

und aus $y(1) = 0$ folgt dann $y_2(1, \mu, q) = 0$. Das Dirichlet-Spektrum stimmt also genau mit der Nullstellenmenge von $y_2(1, \lambda, q)$ überein.

Lemma 2.17 ([1, Kapitel 2, Lemma 1]). *Sei $z \in \mathbb{C}$ so, dass der Abstand von z zu jedem ganzzahligen Vielfachen von π mindestens $\pi/4$ beträgt, also*

$$|z - n\pi| \geq \frac{\pi}{4} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{Z}.$$

Dann gilt die Abschätzung

$$e^{|\operatorname{Im} z|} < 4 |\sin z|.$$

Lemma 2.18 (Counting Lemma, [1, Kapitel 2, Lemma 2]). *Für ein Potential $q \in L^2_{\mathbb{C}}$ und eine ganze Zahl $N > 2e^{\|q\|}$ besitzt die Funktion $y_2(1, \lambda, q)$, unter Berücksichtigung der Vielfachheiten, genau N Nullstellen in der offenen Halbebene*

$$\operatorname{Re} \lambda < \left(N + \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2.$$

Außerdem gibt es für jedes $n > N$ genau eine einfache Nullstelle in dem Gebiet

$$|\sqrt{\lambda} - n\pi| < \frac{\pi}{2}.$$

Außer diesen treten keine weiteren Nullstellen auf.

Theorem 2.19 ([1, Kapitel 2, Theorem 2]). *Ist μ ein Dirichlet-Eigenwert von $q \in L^2([0, 1], \mathbb{R})$, so gilt*

$$\dot{y}_2(1, \mu) y'_2(1, \mu) = \int_0^1 y_2^2(t, \mu) dt = \|y_2(\cdot, \mu)\|^2 > 0.$$

Insbesondere ist $\dot{y}_2(1, \mu) \neq 0$. Demnach sind alle Nullstellen der Funktion $\lambda \mapsto y_2(1, \lambda, q)$ einfach.

Hier bezeichnet $\dot{y}_2 = \partial y_2 / \partial \lambda$ die Ableitung nach dem Spektralparameter.

Das folgende Korollar liefert die Vorzeichen der in Theorem 2.19 betrachteten Größen.

Korollar 2.20 ([1, Kap. 2, Korollar 2]). *Für jeden Dirichlet-Eigenwert $\mu_n(q)$ gilt*

$$\operatorname{sgn} \dot{y}_2(1, \mu_n) = (-1)^n = \operatorname{sgn} y'_1(1, \mu_n).$$

Aufgrund der Einfachheit der Nullstellen können wir jedem Dirichlet-Eigenwert $\mu_n(q)$ eine eindeutige L^2 -normierte Eigenfunktion zuordnen. In [1, Kapitel 2] wird sie als

$$g_n(x, q) = \frac{y_2(x, \mu_n(q), q)}{\|y_2(\cdot, \mu_n(q), q)\|_{L^2}} = \frac{y_2(x, \mu_n(q), q)}{\sqrt{\dot{y}_2(1, \mu_n(q), q) y'_2(1, \mu_n(q), q)}} \quad (2.15)$$

mit der Normierung $\|g_n\|_{L^2} = 1$ und $g'_n(0) > 0$ definiert. Die Darstellung (2.15) ergibt sich aus der Eindimensionalität des zu $\mu_n(q)$ gehörigen Eigenraums. Jede normierte Eigenfunktion ist demnach ein skalar Vielfaches von $y_2(x, \mu_n(q), q)$. Die Normierung $\|g_n\|_{L^2} = 1$ bestimmt mithilfe von Theorem 2.19 diesen Faktor

eindeutig. Insbesondere ist nach Theorem 2.19 der Nenner strikt positiv, sodass (2.15) wohldefiniert ist.

Eine zentrale analytische Eigenschaft ist die Abhängigkeit der Eigenwerte vom Potential, die wir im folgenden Theorem beschreiben.

Theorem 2.21 ([1, Kapitel 2, Theorem 3]). *Für jedes $n \geq 1$ ist der n -te Dirichlet-Eigenwert $\mu_n : L^2([0, 1], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ eine reell-analytische Funktion des Potentials q . Ihr Gradient ist gegeben durch*

$$\frac{\partial \mu_n}{\partial q(t)} = g_n^2(t, q).$$

Insbesondere hängt auch g_n reell-analytisch von q ab.

Abschließend beschreiben wir die präzise Lage der Dirichlet-Eigenwerte. Die folgende Asymptotik liefert neben dem führenden Term $\mu_n \sim n^2\pi^2$ auch die erste Korrektur.

Theorem 2.22 ([1, Kapitel 2, Theorem 4]). *Für $q \in L^2([0, 1], \mathbb{R})$ gilt gleichmäßig auf beschränkten Teilmengen von $[0, 1] \times L^2([0, 1], \mathbb{R})$*

$$\begin{aligned} \mu_n(q) &= n^2\pi^2 + \int_0^1 q(t) dt - \langle \cos(2\pi nx), q \rangle + O\left(\frac{1}{n}\right) \\ &= n^2\pi^2 + \int_0^1 q(t) dt + \ell^2(n). \end{aligned}$$

Damit definieren die Dirichlet-Eigenwerte eine Abbildung

$$\mu : L^2([0, 1], \mathbb{R}) \rightarrow S, \quad q \mapsto \mu(q) = (\mu_1(q), \mu_2(q), \dots),$$

die jedem Potential q seine Folge von Dirichlet-Eigenwerten zuordnet. Insbesondere ordnet μ jedem Potential $q \in L^2([0, 1], \mathbb{R})$ ein Dirichlet-Spektrum aus S zu. Der Spektralraum S besteht dabei aus allen reellen, streng monoton wachsenden Folgen $\sigma = (\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$, deren Einträge sich asymptotisch wie $n^2\pi^2$ verhalten und sich in der Form

$$\sigma_n = n^2\pi^2 + s + \tilde{\sigma}_n, \quad n \geq 1,$$

darstellen lassen, wobei $s \in \mathbb{R}$ eine Konstante ist und die Störfolge $(\tilde{\sigma}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in ℓ^2 liegt.

Das folgende Oszillationstheorem beschreibt das Zusammenspiel zwischen den Dirichlet-Eigenwerten und der in Bemerkung 2.11 eingeführten Bandstruktur. Jeder Dirichlet-Eigenwert μ_n liegt in genau einer abgeschlossenen Spektrallücke, deren Randpunkte durch die periodischen und antiperiodischen Eigenwerte festgelegt wird.

Satz 2.23 (Oszillationstheorem). *Für jedes $q \in L^2([0, 1], \mathbb{R})$ sind die periodischen, antiperiodischen sowie Dirichlet-Eigenwerte reelle Folgen*

$$(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}_0}, \quad (\lambda'_n)_{n \in \mathbb{N}}, \quad (\mu_n)_{n \in \mathbb{N}},$$

die

$$\lambda_0 < \lambda'_1 \leq \lambda'_2 < \lambda_1 \leq \lambda_2 < \lambda'_3 \leq \lambda'_4 < \lambda_3 \leq \lambda_4 < \dots$$

erfüllen. Definieren wir für $n \in \mathbb{N}$

$$I_n := \begin{cases} [\lambda'_n, \lambda'_{n+1}], & n \text{ ungerade,} \\ [\lambda_{n-1}, \lambda_n], & n \text{ gerade,} \end{cases}$$

so gilt $\mu_n \in I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

2.4 Die Isospektralmenge und die Abbildung $\kappa \times \mu$

Wie in Bemerkung 2.11 beschrieben, wird die Bandstruktur des Spektrums vollständig durch die Diskriminante beschrieben, da $\Delta(\lambda) = \pm 2$ gerade die periodischen und antiperiodischen Eigenwerte und damit die Bandränder liefert. Motiviert durch diese Äquivalenz von Diskriminante und periodischem Spektrum (vgl. [2, S. 145]) definieren wir:

Definition 2.24 (Isospektralmenge). *Für $q \in L^2([0, 1], \mathbb{R})$ ist die Isospektralmenge*

$$\text{Iso}(q) := \left\{ \tilde{q} \in L^2([0, 1], \mathbb{R}) : \Delta(\lambda, \tilde{q}) = \Delta(\lambda, q) \text{ für alle } \lambda \in \mathbb{C} \right\}.$$

Ziel ist es, die Struktur von $\text{Iso}(q)$ zu beschreiben, also alle Potentiale zu charakterisieren, die spektral nicht von q unterschieden werden können. Dafür benötigen wir neben den Dirichlet-Eigenwerten und der Diskriminante zusätzliche spektrale Daten. Diese werden durch die in [1, Kapitel 3] eingeführten Floquet-Exponenten κ_n beschrieben.

Definition 2.25 (Endgeschwindigkeit, [1, Kapitel 3]). *Sei $q \in L^2([0, 1], \mathbb{R})$ und $\mu_n(q)$ der n -te Dirichlet Eigenwert. Dann definiert man*

$$\kappa_n(q) := \log \left| \frac{g'_n(1, q)}{g'_n(0, q)} \right|, \quad n \geq 1.$$

Sie beschreiben das Verhältnis der Ableitungen der normierten Eigenfunktionen an

den Rändern. Äquivalent gilt wegen Korollar 2.20

$$\kappa_n(q) = \log|y'_2(1, \mu_n, q)| = \log((-1)^n y'_2(1, \mu_n, q)).$$

Die Zahlen $\kappa_1, \kappa_2, \dots$ beschreiben die in [1, Kapitel 2] eingeführten Endgeschwindigkeiten. Das folgende Theorem beschreibt ihre asymptotischen Eigenschaften.

Theorem 2.26 ([1, Kapitel 3, Theorem 4]). *Für jedes $n \geq 1$ ist $\kappa_n : L^2([0, 1], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ eine kompakte, reell-analytische Funktion mit asymptotischen Verhalten*

$$\kappa_n(q) = \frac{1}{2\pi n} \langle \sin(2\pi n x), q \rangle + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = \ell_1^2(n).$$

Die Abbildung

$$q \mapsto \kappa(q) = (\kappa_1(q), \kappa_2(q), \dots)$$

ordnet jedem Potential $q \in L^2([0, 1], \mathbb{R})$ seine Folge von κ -Werten zu und bildet den Raum $L^2([0, 1], \mathbb{R})$ in den gewichteten Hilbertraum

$$\ell_1^2 := \left\{ \xi = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{n \geq 1} n^2 \xi_n^2 < \infty \right\}$$

ab.

Kombinieren wir die Abbildungen κ und μ , so erhalten wir die folgende Abbildung:

Definition 2.27 (Die Abbildung $\kappa \times \mu$, [1, Kapitel 3]). *Für $q \in L^2([0, 1], \mathbb{R})$ sei*

$$\kappa \times \mu : L^2([0, 1], \mathbb{R}) \rightarrow \ell_1^2 \times S, \quad q \mapsto (\kappa_n(q), \mu_n(q))_{n \in \mathbb{N}}.$$

Insbesondere ist jedes Potential durch seine spektralen Daten (κ_n, μ_n) eindeutig bestimmt.

Theorem 2.28 ([1, Kapitel 3, Theorem 5]). *Die Abbildung $\kappa \times \mu : L^2([0, 1], \mathbb{R}) \rightarrow \ell_1^2 \times S$ ist injektiv.*

Korollar 2.29 ([1, Kapitel 6, Korollar 2]). *Die Abbildung $\kappa \times \mu : L^2([0, 1], \mathbb{R}) \rightarrow \ell_1^2 \times S$ ist ein reell-analytischer Isomorphismus.*

3 Vorbereitende Lemmata

Im Folgenden beweisen wir die beiden zentralen Lemmata 3.4 und 3.5, welche eine wesentliche Grundlage für den Beweis des Hauptsatzes bilden. Zuvor formulieren wir jedoch zwei vorbereitende Aussagen, die im Beweis von Lemma 3.4 benötigt werden.

Sei im Folgenden $q \in L^2([0, 1], \mathbb{R})$ periodisch fortgesetzt auf $\mathbb{R}$ und für $\tau \in \mathbb{R}$ definiere man

$$q_\tau(x) = q(x + \tau).$$

Bemerkung 3.1. Nach Lemma 2.15 gilt für alle $\tau \in \mathbb{R}$

$$q_\tau \in \text{Iso}(q),$$

da die Diskriminante unter Translation des Potentials invariant bleibt. Die Familie $(q_\tau)_{\tau \in \mathbb{R}}$ liegt also innerhalb derselben Isospektralmenge.

Satz 3.2 (Variationssatz). *Auf dem Bereich, auf dem $\kappa_n(q_\tau) \neq 0$ gilt, ist*

$$\tau \mapsto \mu_n(q_\tau)$$

streng monoton. Insbesondere kann sich die Monotonierichtung nur dort ändern, wo

$$\kappa_n(q_\tau) = 0.$$

Beweis. Wir zeigen die Aussage zunächst für stetig differenzierbare Potentiale. Sei dazu

$$\mu(\tau) := \mu_n(q_\tau)$$

und sei g_τ die zugehörige L^2 -normierte Dirichlet-Eigenfunktion zum verschobenen Potential q_τ . Dann erfüllt g_τ die Eigenwertgleichung

$$-g_\tau''(x) + q_\tau(x)g_\tau(x) = \mu(\tau)g_\tau(x), \quad x \in [0, 1], \quad (3.1)$$

mit den Dirichlet-Randbedingungen

$$g_\tau(0) = g_\tau(1) = 0$$

sowie der Normierungsbedingung

$$\int_0^1 g_\tau(x)^2 dx = 1.$$

Nach Theorem 2.19 ist der n -te Dirichlet-Eigenwert einfach. Die zugehörige Eigenfunktion ist demnach bis auf ihr Vorzeichen eindeutig bestimmt. Außerdem hängt μ_n nach Theorem 2.21 reell-analytisch vom Potential ab, also ist $\tau \mapsto \mu_n(q_\tau)$ differenzierbar.

Differenzieren der Eigenwertgleichung (3.1) nach τ liefert

$$-(\partial_\tau g_\tau)'' + q_\tau \partial_\tau g_\tau + (\partial_\tau q_\tau) g_\tau = (\partial_\tau \mu(\tau)) g_\tau + \mu(\tau) \partial_\tau g_\tau. \quad (3.2)$$

Andererseits ergibt Differenzieren von (3.1) nach x

$$-(\partial_x g_\tau)'' + q_\tau \partial_x g_\tau + (\partial_x q_\tau) g_\tau = \mu(\tau) \partial_x g_\tau. \quad (3.3)$$

Subtrahieren wir nun (3.3) von (3.2), so heben sich aufgrund der Identität

$$\partial_\tau q_\tau(x) = \frac{d}{d\tau} q_\tau(x) = \frac{d}{d\tau} q(x + \tau) = \frac{d}{dx} q(x + \tau) = \frac{d}{dx} q_\tau(x) = \partial_x q_\tau(x).$$

die Terme mit der Ableitung von q_τ gegenseitig auf.

Definieren wir

$$w_\tau := \partial_\tau g_\tau - \partial_x g_\tau,$$

und multiplizieren zusätzlich mit g_τ , erhalten wir

$$-g_\tau w_\tau'' + q_\tau g_\tau w_\tau = \mu(\tau) g_\tau w_\tau + \mu'(\tau) g_\tau^2. \quad (3.4)$$

Setzt man nun die aus (3.1) folgende Identität

$$q_\tau g_\tau = \mu(\tau) g_\tau + g_\tau''$$

in (3.4) ein, so erhält man

$$-g_\tau w_\tau'' + g_\tau'' w_\tau = \mu'(\tau) g_\tau^2. \quad (3.5)$$

Hierbei bezeichnet

$$\mu'(\tau) = \partial_\tau \mu(\tau)$$

die Ableitung nach τ , während

$$g'_\tau = \partial_x g_\tau \quad \text{und} \quad w'_\tau = \partial_x w_\tau$$

die Ableitungen nach x darstellen.

Die linke Seite von (3.5) entspricht der Ableitung des Wronskians. Integrieren wir über das Intervall $[0, 1]$, erhalten wir demnach mit $\|g_\tau\|_{L^2} = 1$

$$[g_\tau, w_\tau](1) - [g_\tau, w_\tau](0) = \int_0^1 [g_\tau, w_\tau]'(x) dx = \mu'(\tau) \int_0^1 g_\tau(x)^2 dx = \mu'(\tau). \quad (3.6)$$

Wegen der Randbedingungen $g_\tau(0) = g_\tau(1) = 0$ folgt dann

$$\partial_\tau g_\tau(0) = 0 \quad \text{und} \quad \partial_\tau g_\tau(1) = 0.$$

und da $w_\tau := \partial_\tau g_\tau - \partial_x g_\tau$

$$w_\tau(0) = \partial_\tau g_\tau(0) - g'_\tau(0) = -g'_\tau(0), \quad w_\tau(1) = \partial_\tau g_\tau(1) - g'_\tau(1) = -g'_\tau(1).$$

Die Wronskian-Werte an den Rändern sind daher

$$\begin{aligned} [g_\tau, w_\tau](0) &= g_\tau(0) w'_\tau(0) - g'_\tau(0) w_\tau(0) = 0 - g'_\tau(0) (-g'_\tau(0)) = g'_\tau(0)^2, \\ [g_\tau, w_\tau](1) &= g_\tau(1) w'_\tau(1) - g'_\tau(1) w_\tau(1) = 0 - g'_\tau(1) (-g'_\tau(1)) = g'_\tau(1)^2. \end{aligned}$$

Setzen wir dies in (3.6) ein, so erhalten wir

$$\mu'(\tau) = [g_\tau, w_\tau](1) - [g_\tau, w_\tau](0) = g'_\tau(1)^2 - g'_\tau(0)^2. \quad (3.7)$$

Da g_τ Dirichlet-Eigenfunktion zum Eigenwert $\mu_n(q_\tau)$ ist, ist sie ein Vielfaches von $y_2(\cdot, \mu_n(q_\tau), q_\tau)$. Sie hat demnach die in Abschnitt 2.3 (2.15) beschriebene Form.

Daraus folgt für die Ableitung

$$g'_\tau(x) = \frac{d}{dx}g_\tau(x) = \frac{y'_2(x, \mu_n(q_\tau), q_\tau)}{\|y_2(\cdot, \mu_n(q_\tau), q_\tau)\|_{L^2}}$$

und damit insbesondere wegen $y'_2(0, \mu_n(q_\tau), q_\tau) = 1$

$$g'_\tau(0) = \frac{1}{\|y_2(\cdot, \mu_n(q_\tau), q_\tau)\|_{L^2}} \quad \text{und} \quad g'_\tau(1) = \frac{y'_2(1, \mu_n(q_\tau), q_\tau)}{\|y_2(\cdot, \mu_n(q_\tau), q_\tau)\|_{L^2}}.$$

Setzen wir dies in (3.7) ein, so erhalten wir

$$\mu'(\tau) = \frac{1}{\|y_2(\cdot, \mu_n(q_\tau), q_\tau)\|_{L^2}^2} \left(1 - y'_2(1, \mu_n(q_\tau), q_\tau)^2\right). \quad (\star_1)$$

Bisher haben wir die Gleichung $(\star_1)$ nur für stetig differenzierbare q hergeleitet, denn nur dann existieren die partiellen Ableitungen $\partial_\tau g_\tau$ und $\partial_x g_\tau$, sodass $w_\tau := \partial_\tau g_\tau - \partial_x g_\tau$ wohldefiniert ist. Ziel ist es nun $(\star_1)$ auf beliebige Potentiale $q \in L^2([0, 1], \mathbb{R})$ zu übertragen.

Beide Seiten von $(\star_1)$ hängen über die Terme

$$\mu_n(q_\tau), \quad y_2(\cdot, \mu_n(q_\tau), q_\tau), \quad y'_2(1, \mu_n(q_\tau), q_\tau)$$

vom Potential q ab. Es genügt daher zu zeigen, dass beide Seiten als Funktionen von q stetig auf L^2 sind.

Wir fixieren $\tau \in \mathbb{R}$ und betrachten die rechte Seite von $(\star_1)$ als Abbildung in q . Dazu untersuchen wir die auftretenden Größen zunächst einzeln.

Die Translation

$$q \longmapsto q_\tau = q(\cdot + \tau)$$

ist eine L^2 -Isometrie und damit insbesondere stetig auf L^2 . Außerdem ist nach Theorem 2.21 die Abbildung

$$\mu_n : L^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

reell-analytisch und daher insbesondere stetig. Ferner sind nach Theorem 2.5 die Abbildungen

$$(x, \lambda, q) \longmapsto y_2(x, \lambda, q), \quad (x, \lambda, q) \longmapsto y'_2(x, \lambda, q)$$

stetig auf $[0, 1] \times \mathbb{C} \times L^2$. Daraus folgt unmittelbar, dass auch die Verkettung

$$q \longmapsto y_2'(1, \mu_n(q_\tau), q_\tau)$$

stetig auf L^2 ist und damit insbesondere

$$q \longmapsto 1 - y_2'(1, \mu_n(q_\tau), q_\tau)^2$$

stetig ist.

Auch für den Nenner

$$q \longmapsto \|y_2(\cdot, \mu_n(q_\tau), q_\tau)\|_{L^2}^2 = \int_0^1 y_2(t, \mu_n(q_\tau), q_\tau)^2 dt$$

müssen wir zeigen, dass er stetig von q abhängt. Sei hierzu $q^{(m)} \rightarrow q$ in L^2 . Aus der Stetigkeit der Translation folgt $q_\tau^{(m)} \rightarrow q_\tau$ in L^2 und aus der Stetigkeit von μ_n folgt $\mu_n(q_\tau^{(m)}) \rightarrow \mu_n(q_\tau)$ in $\mathbb{R}$. Da y_2 in allen Variablen stetig ist und die Folge $(\mu_n(q_\tau^{(m)}), q_\tau^{(m)})$ in $\mathbb{C} \times L^2$ gegen $(\mu_n(q_\tau), q_\tau)$ konvergiert, ist y_2 auf der kompakten Menge

$$[0, 1] \times \left(\{(\mu_n(q_\tau^{(m)}), q_\tau^{(m)})\}_{m \in \mathbb{N}} \cup \{(\mu_n(q_\tau), q_\tau)\} \right)$$

nach dem Satz von Heine–Cantor gleichmäßig stetig. Daraus folgt die gleichmäßige Konvergenz

$$\sup_{t \in [0, 1]} |y_2(t, \mu_n(q_\tau^{(m)}), q_\tau^{(m)}) - y_2(t, \mu_n(q_\tau), q_\tau)| \rightarrow 0.$$

Damit konvergieren auch die Quadrate gleichmäßig auf $[0, 1]$, und wir dürfen Grenzwert mit dem Integral vertauschen, sodass

$$\int_0^1 y_2(t, \mu_n(q_\tau^{(m)}), q_\tau^{(m)})^2 dt \longrightarrow \int_0^1 y_2(t, \mu_n(q_\tau), q_\tau)^2 dt.$$

Also ist auch der Nenner stetig in q . Nach Theorem 2.19 ist er außerdem strikt positiv. Damit ist auch

$$q \longmapsto \frac{1}{\|y_2(\cdot, \mu_n(q_\tau), q_\tau)\|_{L^2}^2}$$

stetig auf L^2 . Als Produkt zweier stetiger Funktionen ist die gesamte rechte Seite stetig in q .

Nach Theorem 2.21 hängt μ_n reell-analytisch von q ab, mit Gradient

$$\frac{\partial \mu_n}{\partial q(t)} = g_n(t, q)^2.$$

Da g_n ebenfalls reell-analytisch in q ist, hängt auch der Gradient stetig von q ab. Zusammen mit der Stetigkeit der Translation $q \mapsto q_\tau$ folgt, dass

$$q \mapsto \mu'_n(q_\tau) = \frac{d}{d\tau} \mu_n(q_\tau)$$

stetig auf L^2 ist. Demnach hängt auch die linke Seite stetig von q ab.

Sei nun $q \in L^2([0, 1], \mathbb{R})$ beliebig. Da $C^\infty([0, 1])$ dicht in L^2 liegt, existiert eine Folge stetig differenzierbarer, 1-periodischer Potentiale $(q^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ mit

$$q^{(m)} \longrightarrow q$$

in L^2 . Wegen der Stetigkeit der Translation gilt für jedes $\tau \in \mathbb{R}$, $q_\tau^{(m)} \longrightarrow q_\tau$ in L^2 . Da $q^{(m)}$ stetig differenzierbar ist, ist auch $q_\tau^{(m)}$ stetig differenzierbar, sodass

$$\mu'_n(q_\tau^{(m)}) = \frac{1}{\|y_2(\cdot, \mu_n(q_\tau^{(m)}), q_\tau^{(m)})\|_{L^2}^2} \left(1 - y'_2(1, \mu_n(q_\tau^{(m)}), q_\tau^{(m)})^2 \right).$$

Die vorherigen Stetigkeitsargumenten zeigen nun, dass im Grenzwert $m \rightarrow \infty$ die rechte Seite gegen den entsprechenden Ausdruck für q_τ , und die linke Seite gegen $\mu'_n(q_\tau)$ konvergiert. Demnach gilt $(\star_1)$ für alle $q \in L^2([0, 1], \mathbb{R})$ und alle $\tau \in \mathbb{R}$.

Wir parametrisieren nun $y'_2(1, \mu_n(q_\tau), q_\tau)$ durch $\kappa_n(q_\tau)$, sodass

$$\mu'(\tau) = \frac{1}{\|y_2(\cdot, \mu_n(q_\tau), q_\tau)\|_{L^2}^2} \left(1 - e^{2\kappa_n(q_\tau)} \right).$$

Aus der Definition

$$\kappa_n(q_\tau) = \log((-1)^n y'_2(1, \mu_n(q_\tau), q_\tau))$$

sowie der Stetigkeit von y'_2 und μ_n bezüglich des Potentials folgt, dass auch κ_n stetig vom Potential abhängt. Nach Theorem 2.19 ist der Vorfaktor $\|y_2(\cdot, \mu_n(q_\tau), q_\tau)\|_{L^2}^{-2}$ strikt positiv, sodass allein der Term $1 - e^{2\kappa_n(q_\tau)}$ das Vorzeichen von $\mu'(\tau)$ bestimmt. Für $\kappa_n(q_\tau) < 0$ gilt $e^{2\kappa_n(q_\tau)} < 1$, sodass $\mu'(\tau) > 0$ folgt. Entsprechend erhalten wir für $\kappa_n(q_\tau) > 0$ die Ungleichung $e^{2\kappa_n(q_\tau)} > 1$ und damit $\mu'(\tau) < 0$. Im Fall $\kappa_n(q_\tau) = 0$ verschwindet schließlich $\mu'(\tau)$. Insgesamt ergibt sich somit

$$\operatorname{sgn}(\mu'(\tau)) = -\operatorname{sgn}(\kappa_n(q_\tau)).$$

Daraus folgt insbesondere, dass die Abbildung

$$\tau \longmapsto \mu_n(q_\tau)$$

auf jedem Intervall mit $\kappa_n(q_\tau) \neq 0$ streng monoton ist. Ein Wechsel der Monotonie-richtung kann daher nur an Stellen auftreten, an denen $\kappa_n(q_\tau) = 0$ gilt.

Lemma 3.3 (Diagonalisierbarkeitslemma). *Sei $\tau_0 \in \mathbb{R}$ mit $\kappa_n(q_{\tau_0}) = 0$. Gilt zusätzlich*

$$\frac{d}{d\tau} \kappa_n(q_{\tau_0}) = 0,$$

so besitzt die Monodromiematrix $M(\mu_n(q_{\tau_0}), q_{\tau_0})$ zwei linear unabhängige Eigenvektoren zum doppelten Eigenwert $(-1)^n$ und ist insbesondere diagonalisierbar.

Beweis. Für $\tau \in \mathbb{R}$ betrachten wir

$$y_\tau(x) := y_2(x, \mu_n(q_\tau), q_\tau).$$

Da $\mu_n(q_\tau)$ Dirichlet-Eigenwert ist, gilt

$$\begin{pmatrix} y_\tau(0) \\ y'_\tau(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad y_\tau(1) = 0.$$

Die Monodromiematrix beschreibt, wie sich die Anfangsdaten einer Lösung nach einer Periode verändern, das heißt

$$M(\mu_n(q_\tau), q_\tau) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_\tau(1) \\ y'_\tau(1) \end{pmatrix} = y'_\tau(1) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Also ist $(0, 1)^\top$ ein Eigenvektor der Monodromiematrix zum Eigenwert

$$y'_\tau(1) = y'_2(1, \mu_n(q_\tau), q_\tau) = (-1)^n e^{\kappa_n(q_\tau)}.$$

Demnach erfüllt y_τ die Floquet-Bedingung

$$y_\tau(x+1) = (-1)^n e^{\kappa_n(q_\tau)} y_\tau(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Für $t \in \mathbb{R}$ definieren wir nun die zurücktranslatierte Funktion

$$z_t(x) = y_{\tau_0+t}(x-t) = y_2(x-t, \mu_n(q_{\tau_0+t}), q_{\tau_0+t}).$$

Da $q_{\tau_0+t}(\cdot) = q(\cdot + \tau_0 + t)$, gilt

$$q_{\tau_0+t}(x - t) = q(x - t + \tau_0 + t) = q(x + \tau_0) = q_{\tau_0}(x).$$

Die Verschiebung um t im Argument von y_{τ_0+t} kompensiert also genau die Verschiebung des Potentials. Somit ist z_t eine Lösung der Hill-Gleichung

$$-z_t''(x) + q_{\tau_0}(x)z_t(x) = \mu_n(q_{\tau_0+t})z_t(x). \quad (3.8)$$

und erfüllt die Floquet-Bedingung bezüglich q_{τ_0} , denn

$$z_t(x + 1) = y_{\tau_0+t}(x + 1 - t) = (-1)^n e^{\kappa_n(q_{\tau_0+t})} y_{\tau_0+t}(x - t) = (-1)^n e^{\kappa_n(q_{\tau_0+t})} z_t(x).$$

Für $t = 0$ ist $z_0(x) = y_2(x, \mu_n(q_{\tau_0}), q_{\tau_0})$ eine Lösung der Hill-Gleichung zum Potential q_{τ_0} und zum Eigenwert $\mu_n(q_{\tau_0})$. Da $\kappa_n(q_{\tau_0}) = 0$, gilt wegen der Floquet-Bedingung

$$z_0(x + 1) = (-1)^n z_0(x).$$

Leiten wir diese Gleichung nach x ab, so erhalten wir

$$z_0'(x + 1) = (-1)^n z_0'(x).$$

Insbesondere folgt für $x = 0$

$$\begin{pmatrix} z_0(1) \\ z_0'(1) \end{pmatrix} = (-1)^n \begin{pmatrix} z_0(0) \\ z_0'(0) \end{pmatrix}$$

und damit

$$M(\mu_n(q_{\tau_0}), q_{\tau_0}) \begin{pmatrix} z_0(0) \\ z_0'(0) \end{pmatrix} = (-1)^n \begin{pmatrix} z_0(0) \\ z_0'(0) \end{pmatrix}.$$

Wir betrachten nun

$$\dot{z}_0(x) := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} z_t(x).$$

Diese Abbildung ist stets wohldefiniert, da y_2 , μ_n sowie die Translation des Potentials in den jeweiligen Variablen analytisch beziehungsweise differenzierbar sind. Daher ist auch die Verkettung $z_t(x)$ differenzierbar in t .

Da z_t für jedes $t \in \mathbb{R}$ die Gleichung (3.8) erfüllt, ergibt Differenzieren nach t bei

$t = 0$

$$-\dot{z}_0''(x) + q_{\tau_0}(x)\dot{z}_0(x) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \mu_n(q_{\tau_0+t}) \cdot z_0(x) + \mu_n(q_{\tau_0})\dot{z}_0(x). \quad (3.9)$$

Da nach dem Variationssatz

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \mu_n(q_{\tau_0+t}) = \frac{d}{d\tau} \mu_n(q_{\tau_0}) = 0$$

gilt, vereinfacht sich (3.9) zu

$$-\dot{z}_0''(x) + q_{\tau_0}(x)\dot{z}_0(x) = \mu_n(q_{\tau_0})\dot{z}_0(x).$$

Also ist auch $\dot{z}_0$ eine Lösung der Hill-Gleichung zum selben Potential q_{τ_0} und Spektralparameter $\mu_n(q_{\tau_0})$.

Wir differenzieren auch die Floquet-Bedingung nach t bei $t = 0$, das heißt

$$\begin{aligned} \dot{z}_0(x+1) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \left[(-1)^n \exp(\kappa_n(q_{\tau_0+t})) z_t(x) \right] \\ &= (-1)^n \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp(\kappa_n(q_{\tau_0+t})) \right) z_0(x) + (-1)^n \exp(\kappa_n(q_{\tau_0})) \dot{z}_0(x) \\ &= (-1)^n \exp(\kappa_n(q_{\tau_0})) \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \kappa_n(q_{\tau_0+t}) z_0(x) + (-1)^n \exp(\kappa_n(q_{\tau_0})) \dot{z}_0(x). \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung gilt

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \kappa_n(q_{\tau_0+t}) = \frac{d}{d\tau} \kappa_n(q_{\tau_0}) = 0.$$

Demnach verschwindet der erste Term und mit $\kappa_n(q_{\tau_0}) = 0$ folgt

$$\dot{z}_0(x+1) = (-1)^n \dot{z}_0(x).$$

Daher erfüllt auch $\dot{z}_0$ die Floquet-Bedingung mit Multiplikator $(-1)^n$. Folglich gilt

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_0(1) \\ \dot{z}_0'(1) \end{pmatrix} = (-1)^n \begin{pmatrix} \dot{z}_0(0) \\ \dot{z}_0'(0) \end{pmatrix},$$

sodass der Anfangsvektor von $\dot{z}_0$ ebenfalls ein Eigenvektor der Monodromiematrix $M(\mu_n(q_{\tau_0}), q_{\tau_0})$ zum selben Eigenwert $(-1)^n$ ist.

Letztlich bleibt zu zeigen, dass z_0 und $\dot{z}_0$ linear unabhängig sind. Die Anfangswerte

von z_0 sind gegeben durch

$$z_0(0) = y_2(0, \mu_n(q_{\tau_0}), q_{\tau_0}) = 0, \quad z'_0(0) = y'_2(0, \mu_n(q_{\tau_0}), q_{\tau_0}) = 1.$$

Für $\dot{z}_0(0)$ berechnen wir mit der mehrdimensionalen Kettenregel

$$\begin{aligned} \dot{z}_0(0) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} z_t(0) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} y_2(-t, \mu_n(q_{\tau_0+t}), q_{\tau_0+t}) \\ &= -\partial_x y_2(0, \mu_n(q_{\tau_0}), q_{\tau_0}) + \partial_\lambda y_2(0, \mu_n(q_{\tau_0}), q_{\tau_0}) \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \mu_n(q_{\tau_0+t}) \\ &\quad + \partial_q y_2(0, \mu_n(q_{\tau_0}), q_{\tau_0}) \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} q_{\tau_0+t}. \end{aligned}$$

Da $y_2(0, \lambda, q) = 0$ für alle λ und q , ist die Abbildung $(\lambda, q) \mapsto y_2(0, \lambda, q)$ konstant. Daher verschwinden die partiellen Ableitungen nach λ und q , das heißt

$$\partial_\lambda y_2(0, \lambda, q) = 0, \quad \text{und} \quad \partial_q y_2(0, \lambda, q) = 0.$$

Zusammen mit der Anfangsbedingung folgt damit

$$\dot{z}_0(0) = -\partial_x y_2(0, \mu_n(q_{\tau_0}), q_{\tau_0}) = -y'_2(0, \mu_n(q_{\tau_0}), q_{\tau_0}) = -1$$

und damit insbesondere

$$\dot{z}_0(0) = -1 \neq 0 = z_0(0).$$

z_0 und $\dot{z}_0$ können daher keine skalaren Vielfachen voneinander sein.

Da nun beide Lösungen dieselbe Hill-Gleichung sowie Floquet-Bedingung erfüllen und linear unabhängig sind, liefern sie zwei linear unabhängige Eigenvektoren der Monodromiematrix zum selben Eigenwert $(-1)^n$. Da die Monodromiematrix eine 2×2 -Matrix ist, folgt ihre Diagonalisierbarkeit. Damit ist die Aussage gezeigt. $\square$

Lemma 3.4. *Sei $q \in L^2([0, 1], \mathbb{R})$ periodisch fortgesetzt auf $\mathbb{R}$. Für $\tau \in \mathbb{R}$ definiere man q_τ wie oben. Dann durchläuft für jedes feste $n \in \mathbb{N}$ die Familie*

$$(\kappa_n(q_\tau), \mu_n(q_\tau)), \quad \tau \in \mathbb{R},$$

alle zulässigen Paare der n -ten Komponente, das heißt

$$\{(\kappa_n(q_\tau), \mu_n(q_\tau)) \mid \tau \in \mathbb{R}\} = \{(\kappa_n, \mu_n) \mid \mu_n \in I_n, \Delta(\mu_n) = (-1)^n 2 \cosh(\kappa_n)\},$$

wobei

$$I_n = \begin{cases} [\lambda'_n, \lambda'_{n+1}], & \text{falls } n \text{ ungerade ist,} \\ [\lambda_{n-1}, \lambda_n], & \text{falls } n \text{ gerade ist.} \end{cases}$$

Beweis. Zunächst liegt nach dem Oszillationstheorem für jedes $\tau \in \mathbb{R}$ der n -te Dirichlet-Eigenwert des verschobenen Potentials q_τ im zugehörigen Intervall I_n . Also gilt $\mu_n(q_\tau) \in I_n$ für jedes $\tau \in \mathbb{R}$. Da $\mu_n(q_\tau)$ ein Dirichlet-Eigenwert ist, gilt $y_2(1, \mu_n(q_\tau), q_\tau) = 0$, sodass die Monodromiematrix die Form einer unteren Dreiecksmatrix annimmt, das heißt

$$M(\mu_n(q_\tau), q_\tau) = \begin{pmatrix} y_1(1, \mu_n(q_\tau), q_\tau) & 0 \\ y'_1(1, \mu_n(q_\tau), q_\tau) & y'_2(1, \mu_n(q_\tau), q_\tau) \end{pmatrix}.$$

Aus Lemma 2.9 folgt mit $\det M(\mu_n(q_\tau), q_\tau) = 1$, dass der zweite Eigenwert der Monodromiematrix der Kehrwert des Eigenwerts $y'_2(1, \mu_n(q_\tau), q_\tau) = (-1)^n e^{\kappa_n(q_\tau)}$ ist. Demnach ergibt sich für die Spur

$$\Delta(\mu_n(q_\tau), q_\tau) = (-1)^n e^{\kappa_n(q_\tau)} + (-1)^n e^{-\kappa_n(q_\tau)} = (-1)^n 2 \cosh(\kappa_n(q_\tau)).$$

Mit der Verschiebungsinvarianz der Diskriminante (Lemma 2.15) folgt

$$\Delta(\mu_n(q_\tau), q) = \Delta(\mu_n(q_\tau), q_\tau) = (-1)^n 2 \cosh(\kappa_n(q_\tau)).$$

Zusammen mit $\mu_n \in I_n$ liefert uns dies die Inklusion

$$\{(\kappa_n(q_\tau), \mu_n(q_\tau)) \mid \tau \in \mathbb{R}\} \subseteq \{(\kappa_n, \mu_n) \mid \mu_n \in I_n, \Delta(\mu_n) = (-1)^n 2 \cosh(\kappa_n)\}.$$

Für die umgekehrte Inklusion zeigen wir, dass bei Variation von τ tatsächlich alle zulässigen Paare durchlaufen werden. Da die Funktion $\cosh$ gerade ist, liefern die beiden Werte κ_n und $-\kappa_n$ für ein festes $\mu_n \in I_n$ denselben Wert der Diskriminante. Daher zerfällt die Lösungsmenge in zwei Äste $\kappa_n > 0$ und $\kappa_n < 0$, die sich genau an den Randpunkten von I_n treffen. Denn aus

$$\Delta(\mu_n, q) = (-1)^n 2 \cosh(\kappa_n)$$

sowie der Eigenschaft $\cosh(x) \geq 1$ mit Gleichheit genau für $x = 0$ folgt, dass

$$|\Delta(\mu_n, q)| \geq 2$$

gilt und der Randfall $|\Delta(\mu_n, q)| = 2$ genau dann eintritt, wenn $\kappa_n = 0$ gilt. Somit folgt

$$\kappa_n = 0 \iff |\Delta(\mu_n, q)| = 2.$$

Nach dem Variationssatz ist nun $\mu_n(q_\tau)$ auf jedem Teilintervall mit festem Vorzeichen von $\kappa_n(q_\tau)$ streng monoton. Ein Wechsel der Monotonierichtung kann nur an Stellen mit $\kappa_n(q_\tau) = 0$ auftreten. Es bleibt also zu zeigen, dass $\kappa_n(q_\tau)$ an jeder Nullstelle τ_0 *tatsächlich das Vorzeichen wechselt*, sodass die Kurve weder am Rand stehen bleibt noch auf demselben Ast zurückkehrt. Dazu genügt es zu zeigen, dass für jede Nullstelle τ_0 von $\kappa_n(q_\tau)$, $\frac{d}{d\tau}\kappa_n(q_{\tau_0}) \neq 0$ gilt.

Angenommen, es gelte also $\frac{d}{d\tau}\kappa_n(q_{\tau_0}) = 0$

Für τ_0 mit $\kappa_n(q_{\tau_0}) = 0$ liegt $\mu_n(q_{\tau_0})$ an einem Bandrand. Außerdem gilt

$$y_2(1, \mu_n(q_{\tau_0}), q_{\tau_0}) = 0,$$

und die Monodromiematrix $M(\mu_n(q_{\tau_0}), q_{\tau_0})$ besitzt den doppelten Eigenwert $(-1)^n$. Daher ist sie genau dann diagonalisierbar, wenn zusätzlich $y'_1(1, \mu_n(q_{\tau_0}), q_{\tau_0}) = 0$ gilt. Ferner folgt aus $(\star_1)$ im Variationssatz zusammen mit $\kappa_n(q_{\tau_0}) = 0$, dass die Abbildung

$$\tau \longmapsto \mu_n(q_\tau)$$

bei τ_0 stationär ist, also

$$\frac{d}{d\tau}\mu_n(q_{\tau_0}) = 0$$

gilt.

Nehmen wir nun zusätzlich

$$\frac{d}{d\tau}\kappa_n(q_{\tau_0}) = 0$$

an, so folgt mit dem Diagonalisierbarkeitslemma 3.2, dass die Monodromiematrix zwei linear unabhängige Eigenvektoren zum Eigenwert $(-1)^n$ besitzt und ist damit diagonalisierbar. Äquivalent dazu muss also gelten

$$y'_1(1, \mu_n(q_{\tau_0}), q_{\tau_0}) = 0.$$

Nach Lemma 2.12 gilt nun

$$\Delta'(\mu_n(q_{\tau_0})) = y_1'(1, \mu_n(q_{\tau_0}), q_{\tau_0}) \|y_2(\cdot, \mu_n(q_{\tau_0}), q_{\tau_0})\|_{L^2}^2.$$

Da $y_2(\cdot, \mu_n(q_{\tau_0}), q_{\tau_0})$ eine nichttriviale Lösung ist, gilt $\|y_2(\cdot, \mu_n(q_{\tau_0}), q_{\tau_0})\|_{L^2}^2 > 0$, also

$$\Delta'(\mu_n(q_{\tau_0})) = 0 \iff y_1'(1, \mu_n(q_{\tau_0}), q_{\tau_0}) = 0. \quad (\star_2)$$

Der Bandrand $\mu_n(q_{\tau_0})$ erfüllt gerade $|\Delta(\mu_n(q_{\tau_0}))| = 2$, ist also Nullstelle der Gleichung

$$\Delta^2(\lambda) - 4 = 0. \quad (3.10)$$

Nach Lemma 2.13 können die Nullstellen von (3.10) ausschließlich einfach oder doppelt sein, das heißt keine höhere Vielfachheit als zwei besitzen.

Wir unterscheiden im Folgenden demnach zwei Fälle nach der Bandstruktur.

Im Fall einer *offenen Bandlücke* ist $\mu_n(q_{\tau_0})$ eine einfache Nullstelle von $\Delta^2 - 4$, sodass nach Lemma 2.13, $\Delta'(\mu_n(q_{\tau_0})) \neq 0$ gilt. Aus der Äquivalenz $(\star_2)$ folgt $y_1'(1, \mu_n(q_{\tau_0}), q_{\tau_0}) \neq 0$ und damit, dass die Monodromie bei $\mu_n(q_{\tau_0})$ *nicht* diagonalisierbar ist. Demnach erhalten wir einen direkten Widerspruch zur im Lemma 3.3 abgeleiteten Folgerung, dass unter der Annahme $\frac{d}{d\tau}\kappa_n(q_{\tau_0}) = 0$ die Monodromie diagonalisierbar sein müsste. Also führt die Annahme $\frac{d}{d\tau}\kappa_n(q_{\tau_0}) = 0$ auf einen Widerspruch und es gilt

$$\frac{d}{d\tau}\kappa_n(q_{\tau_0}) \neq 0.$$

Damit folgt im Fall einer offenen Bandlücke, dass die Kurve

$$\tau \longmapsto (\kappa_n(q_\tau), \mu_n(q_\tau))$$

weder an einem Randpunkt stehenbleibt noch auf demselben Ast zurückläuft. Die Nullstellen von $\kappa_n(q_\tau)$ sind in dem Fall isoliert und einfach, sodass κ_n dort das Vorzeichen tatsächlich wechselt. Die Werte $\mu_n(q_\tau)$ an diesen Stellen entsprechen genau den Randpunkten von I_n und sind lokale Extremstellen. Zwischen zwei solchen Randpunkten verläuft $\mu_n(q_\tau)$ nach dem Variationssatz streng monoton durch das gesamte Intervall I_n . Da $\tau \mapsto q_\tau$ 1-periodisch ist, ist auch die Kurve

$$\tau \longmapsto (\kappa_n(q_\tau), \mu_n(q_\tau))$$

geschlossen und durchläuft den zulässigen n -ten Zweig vollständig. Damit ist im Fall

einer offenen Bandlücke auch die umgekehrte Inklusion

$$\{(\kappa_n, \mu_n) \mid \mu_n \in I_n, \Delta(\mu_n) = (-1)^n 2 \cosh(\kappa_n)\} \subseteq \{(\kappa_n(q_\tau), \mu_n(q_\tau)) \mid \tau \in \mathbb{R}\}$$

gezeigt.

Im Fall einer *geschlossenen Bandlücke* ist $\mu_n(q_{\tau_0})$ eine doppelte Nullstelle von $\Delta^2 - 4$. Hier fallen die Randpunkte zweier benachbarter Spektralbänder zusammen, sodass das zugehörige Intervall I_n zu einem Punkt λ^* degeneriert, also

$$I_n = \{\lambda^*\}, \quad \Delta(\lambda^*) = (-1)^n \cdot 2, \quad \Delta'(\lambda^*) = 0.$$

Damit reduziert sich die zulässige Menge der n -ten Datenpaare auf einen einzigen Punkt. Denn aus $\mu_n \in I_n$ folgt unmittelbar

$$\mu_n = \lambda^*.$$

Die Bedingung

$$\Delta(\mu_n) = (-1)^n 2 \cosh(\kappa_n)$$

liefert dann wegen $\cosh(\kappa_n) \geq 1$, dass notwendigerweise $\kappa_n = 0$ gilt. Wir zeigen nun, dass dieser Punkt tatsächlich durch die Translationsfamilie erreicht wird. Nach dem Oszillationstheorem liegt für jedes $\tau \in \mathbb{R}$ der Dirichlet-Eigenwert $\mu_n(q_\tau)$ in I_n . Da I_n nur aus dem Punkt λ^* besteht, folgt

$$\mu_n(q_\tau) = \lambda^*$$

für alle $\tau \in \mathbb{R}$. Die Identität

$$\Delta(\mu_n(q_\tau)) = (-1)^n 2 \cosh(\kappa_n(q_\tau))$$

liefert daher ebenfalls

$$\kappa_n(q_\tau) = 0.$$

Somit ist die Familie

$$\tau \mapsto (\kappa_n(q_\tau), \mu_n(q_\tau))$$

konstant und es gilt

$$\{(\kappa_n(q_\tau), \mu_n(q_\tau)) \mid \tau \in \mathbb{R}\} = \{(0, \lambda^*)\}.$$

Damit ist die gewünschte Aussage auch im Fall einer geschlossenen Bandlücke erfüllt. $\square$

Lemma 3.5. *Sei $q \in L^2([0, 1], \mathbb{R})$, $\Delta(\lambda)$ die Spur der entsprechenden Monodromie und $(\kappa_n, \mu_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell_1^2 \times S$ der Wert der Abbildung $\kappa \times \mu$ bei q . Dann gilt*

- (i) $\left| \Delta(\lambda) - 2c_\lambda(1) - s_\lambda(1) \int_0^1 q(x) dx \right| \leq \frac{C(q)}{|\lambda|} \exp |\sqrt{\lambda}|$ für ein $C(q) > 0$.
- (ii) (i) und $\Delta(\mu_n) = (-1)^n 2 \cosh(\kappa_n)$ bestimmen für $n \in \mathbb{N}$ die ganze Funktion Δ eindeutig.

Bevor wir Lemma 3.5 beweisen, halten wir zwei klassische Resultate der komplexen Analysis fest, die von John B. Conway in seinem Buch *Functions of One Complex Variable* bewiesen werden.

Theorem 3.6 (Satz von Liouville, [4, Theorem 3.4]). *Ist $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ eine beschränkte, auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion, so ist f konstant.*

Theorem 3.7 (Maximumprinzip, [4, Theorem 1.2]). *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet und sei f stetig auf $\overline{G}$ sowie holomorph in G . Dann gilt*

$$\max_{z \in \overline{G}} |f(z)| = \max_{z \in \partial G} |f(z)|.$$

Beweis. Für den Beweis von (i) verwenden wir die Integralgleichungen (2.2) und (2.3) für die Fundamentalsysteme y_1 und y_2 aus Theorem 2.1. Differenzieren von $y_2(x, \lambda, q)$ nach x liefert uns

$$y_2'(x, \lambda, q) = c_\lambda(x) + \int_0^x c_\lambda(x-t) q(t) y_2(t, \lambda, q) dt.$$

Setzen wir $x = 1$ ein, erhalten wir

$$y_1(1, \lambda, q) = c_\lambda(1) + \int_0^1 s_\lambda(1-t) q(t) y_1(t, \lambda, q) dt,$$

$$y_2'(1, \lambda, q) = c_\lambda(1) + \int_0^1 c_\lambda(1-t) q(t) y_2(t, \lambda, q) dt.$$

Mit der Definition der Diskriminante $\Delta(\lambda)$ folgt dann

$$\Delta(\lambda) = 2c_\lambda(1) + I_1(\lambda) + I_2(\lambda), \tag{*3}$$

wobei

$$\begin{aligned} I_1(\lambda) &:= \int_0^1 s_\lambda(1-t) q(t) y_1(t, \lambda, q) dt, \\ I_2(\lambda) &:= \int_0^1 c_\lambda(1-t) q(t) y_2(t, \lambda, q) dt. \end{aligned}$$

Wir zerlegen y_1 und y_2 in den freien Term sowie den Restterm, das heißt

$$\begin{aligned} y_1(t, \lambda, q) &= c_\lambda(t) + r_1(t, \lambda, q), \\ y_2(t, \lambda, q) &= s_\lambda(t) + r_2(t, \lambda, q) \end{aligned}$$

und damit wird

$$I_1(\lambda) = \int_0^1 s_\lambda(1-t) q(t) c_\lambda(t) dt + \int_0^1 s_\lambda(1-t) q(t) r_1(t, \lambda, q) dt,$$

wobei wir den letzten Summanden im Folgenden als $R_1(\lambda)$ bezeichnen. Analog gilt

$$I_2(\lambda) = \int_0^1 c_\lambda(1-t) q(t) s_\lambda(t) dt + \int_0^1 c_\lambda(1-t) q(t) r_2(t, \lambda, q) dt,$$

mit letztem Summanden als $R_2(\lambda)$.

Zusammen mit der Darstellung

$$\begin{aligned} J(\lambda) &:= \int_0^1 s_\lambda(1-t) q(t) c_\lambda(t) dt + \int_0^1 c_\lambda(1-t) q(t) s_\lambda(t) dt \\ &:= \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^1 q(t) \left(\sin(\sqrt{\lambda}(1-t)) \cos(\sqrt{\lambda}t) + \cos(\sqrt{\lambda}(1-t)) \sin(\sqrt{\lambda}t) \right) dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^1 q(t) \sin(\sqrt{\lambda}(1-t) + \sqrt{\lambda}t) dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^1 q(t) \sin(\sqrt{\lambda}) dt \\ &= s_\lambda(1) \int_0^1 q(t) dt \end{aligned}$$

schreiben wir $(\star_3)$ in der Form

$$\Delta(\lambda) - 2c_\lambda(1) - s_\lambda(1) \int_0^1 q(t) dt = R_1(\lambda) + R_2(\lambda).$$

Es bleibt also nur noch, $R_1(\lambda)$ und $R_2(\lambda)$ abzuschätzen. Aus Theorem 2.4 erhalten wir für die Restterme

$$r_1(t, \lambda, q) := y_1(t, \lambda, q) - c_\lambda(t), \quad r_2(t, \lambda, q) := y_2(t, \lambda, q) - s_\lambda(t)$$

die Abschätzungen

$$|r_1(t, \lambda, q)| \leq \frac{1}{|\sqrt{\lambda}|} \exp(|\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}| t + \|q\| \sqrt{t}), \quad |r_2(t, \lambda, q)| \leq \frac{1}{|\lambda|} \exp(|\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}| t + \|q\| \sqrt{t}).$$

Da $t \in [0, 1]$ gilt $\sqrt{t} \leq 1$, sodass der Faktor $e^{\|q\|\sqrt{t}}$ durch $e^{\|q\|}$ beschränkt ist. Mit der Konstante

$$C_1(q) := e^{\|q\|}$$

folgt also

$$|r_1(t, \lambda, q)| \leq \frac{C_1(q)}{|\sqrt{\lambda}|} e^{|\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}| t}, \quad |r_2(t, \lambda, q)| \leq \frac{C_1(q)}{|\lambda|} e^{|\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}| t}.$$

Zusammen mit Lemma 2.2 erhalten wir für $R_1(\lambda)$

$$\begin{aligned} |R_1(\lambda)| &= \left| \int_0^1 s_\lambda(1-t) q(t) r_1(t, \lambda, q) dt \right| \\ &\leq \int_0^1 |s_\lambda(1-t)| |q(t)| |r_1(t, \lambda, q)| dt \\ &\leq \int_0^1 \frac{1}{|\sqrt{\lambda}|} e^{|\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}|(1-t)} |q(t)| \frac{C_1(q)}{|\sqrt{\lambda}|} e^{|\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}| t} dt \\ &= \frac{C_1(q)}{|\lambda|} e^{|\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}|} \int_0^1 |q(t)| dt. \end{aligned}$$

Da $q \in L^2([0, 1], \mathbb{R})$, gilt

$$\int_0^1 |q(t)|^2 dt < \infty.$$

Dann folgt mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$\begin{aligned} \int_0^1 |q(t)| dt &= \int_0^1 |q(t)| \cdot 1 dt \\ &\leq \left(\int_0^1 |q(t)|^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_0^1 1^2 dt \right)^{1/2} \\ &= \left(\int_0^1 |q(t)|^2 dt \right)^{1/2} \\ &= \|q\|_{L^2} < \infty. \end{aligned}$$

Also gilt insbesondere $q \in L^1([0, 1], \mathbb{R})$.

Dann können wir $R_1(\lambda)$ weiter abschätzen zu

$$\begin{aligned} |R_1(\lambda)| &\leq \frac{C_1(q)}{|\lambda|} e^{|\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}|} \int_0^1 |q(t)| dt \\ &\leq \frac{C_1(q) \|q\|_{L^2}}{|\lambda|} e^{|\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}|}. \end{aligned}$$

Ganz analog erhalten wir für $R_2(\lambda)$

$$\begin{aligned} |R_2(\lambda)| &= \left| \int_0^1 c_\lambda(1-t) q(t) r_2(t, \lambda, q) dt \right| \\ &\leq \int_0^1 |c_\lambda(1-t)| |q(t)| |r_2(t, \lambda, q)| dt \\ &\leq \int_0^1 e^{|\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}|(1-t)} |q(t)| \frac{C_1(q)}{|\lambda|} e^{|\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}|t} dt \\ &= \frac{C_1(q)}{|\lambda|} e^{|\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}|} \int_0^1 |q(t)| dt \\ &\leq \frac{C_1(q) \|q\|_{L^2}}{|\lambda|} e^{|\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}|}. \end{aligned}$$

Insgesamt folgt dann mit $C(q) := 2e^{\|q\|} \|q\|_{L^2} > 0$

$$|R_1(\lambda) + R_2(\lambda)| \leq |R_1(\lambda)| + |R_2(\lambda)| \leq \frac{C(q)}{|\lambda|} e^{|\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}|}.$$

Damit ist (i) bewiesen.

Für den Beweis von (ii) betrachten wir zwei ganze Funktionen Δ und $\tilde{\Delta}$, die die Voraussetzungen des Lemmas erfüllen und zu denselben Daten $(\kappa_n, \mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gehören. Wir zeigen, dass daraus bereits $\Delta = \tilde{\Delta}$ folgt. Hierzu definieren wir

$$G(\lambda) := \Delta(\lambda) - \tilde{\Delta}(\lambda).$$

Dann ist G als Differenz ganzer Funktionen selbst eine ganze Funktion. Insbesondere gilt nach Voraussetzung für beide Funktionen auf der Folge (μ_n) für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$G(\mu_n) = \Delta(\mu_n) - \tilde{\Delta}(\mu_n) = (-1)^n 2 \cosh(\kappa_n) - (-1)^n 2 \cosh(\kappa_n) = 0.$$

Also besitzt G die gesamte Folge (μ_n) als Nullstellenfolge. Im Folgenden isolieren wir diese Nullstellen durch Faktorisierung. Da G an allen Stellen μ_n verschwindet und

diese gerade die Nullstellen von $y_2(1, \lambda, q)$ sind, definieren wir den Quotienten

$$F(\lambda) := \frac{\Delta(\lambda) - \tilde{\Delta}(\lambda)}{y_2(1, \lambda, q)}.$$

Wir zeigen nun, dass $F(\lambda)$ tatsächlich eine ganze Funktion ist und damit auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph ist. Da $\lambda \mapsto y_2(1, \lambda, q)$ nach Theorem 2.5 eine ganze Funktion ist, ist F auf der Menge

$$\mathbb{C} \setminus Z, \quad Z := \{\lambda \in \mathbb{C} : y_2(1, \lambda, q) = 0\},$$

als Quotient holomorpher Funktionen wohldefiniert und holomorph. Per Definition sind die Elemente von Z gerade die Dirichlet Eigenwerte μ_n . Es bleibt daher nur, das Verhalten von F an diesen Punkten zu untersuchen. An den Stellen μ_n verschwindet zwar der Nenner, zugleich gilt aber wegen der gemeinsamen Werte von Δ und $\tilde{\Delta}$, $\Delta(\mu_n) - \tilde{\Delta}(\mu_n) = 0$, sodass formal ein Ausdruck der Form $0/0$ entsteht und F zunächst nicht definiert ist. Um das Verhalten von $F(\lambda)$ in einer Umgebung von μ_n zu untersuchen, betrachten wir die lokale Struktur von $y_2(1, \lambda, q)$. Nach Theorem 2.19 sind die Eigenwerte μ_n einfache Nullstellen, das heißt $\frac{d}{d\lambda}y_2(1, \mu_n, q) \neq 0$. Daher existiert in einer Umgebung von μ_n eine holomorphe Funktion a_n mit $a_n(\mu_n) \neq 0$, sodass

$$y_2(1, \lambda, q) = (\lambda - \mu_n)a_n(\lambda).$$

Andererseits existiert wegen $G(\mu_n) = 0$ und da G ganz ist, lokal ebenfalls eine holomorphe Funktion b_n mit

$$G(\lambda) = (\lambda - \mu_n)b_n(\lambda).$$

Damit erhalten wir für $\lambda \neq \mu_n$,

$$F(\lambda) = \frac{G(\lambda)}{y_2(1, \lambda, q)} = \frac{(\lambda - \mu_n)b_n(\lambda)}{(\lambda - \mu_n)a_n(\lambda)} = \frac{b_n(\lambda)}{a_n(\lambda)}.$$

Da also a_n als holomorphe Funktion stetig ist und $a_n(\mu_n) \neq 0$ gilt, existiert eine Umgebung U_n von μ_n , in der für alle $\lambda \in U_n$, $a_n(\lambda) \neq 0$ gilt. Folglich ist der Quotient b_n/a_n auf U_n holomorph, und $F(\lambda)$ besitzt bei μ_n einen endlichen Grenzwert. Nach dem Hebbarkeitssatz ist die scheinbare Singularität von F in μ_n also hebbar. Definieren wir also

$$F(\mu_n) := \frac{b_n(\mu_n)}{a_n(\mu_n)},$$

so erhalten wir eine holomorphe Fortsetzung von $F(\lambda)$ in μ_n . Da dies für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt und $F(\lambda)$ außerhalb der Nullstellen von $y_2(1, \lambda, q)$ ohnehin holomorph ist, lässt

sich $F(\lambda)$ auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph fortsetzen. Folglich ist $F(\lambda)$ eine ganze Funktion.

Wir zeigen nun, dass $F(\lambda)$ zusätzlich beschränkt ist. Dazu schätzen wir Zähler und Nenner jeweils einzeln ab. Für die Zählerbeschränktheit nutzen wir die Abschätzung aus (i). Dazu definieren wir

$$A(\lambda) = \Delta(\lambda) - 2c_\lambda(1) - s_\lambda(1)s$$

$$\tilde{A}(\lambda) = \tilde{\Delta}(\lambda) - 2c_\lambda(1) - s_\lambda(1)s$$

Dann folgt mit der Lemmavoraussetzung

$$\int_0^1 q(x) dx = s = \int_0^1 \tilde{q}(x) dx$$

sowie (i) gerade

$$\begin{aligned} |\Delta(\lambda) - \tilde{\Delta}(\lambda)| &= |A(\lambda) - \tilde{A}(\lambda)| \\ &\leq |A(\lambda)| + |\tilde{A}(\lambda)| \\ &\leq \frac{C(q)}{|\lambda|} e^{|\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}|} + \frac{C(\tilde{q})}{|\lambda|} e^{|\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}|} \\ &= \frac{C^*}{|\lambda|} e^{|\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}|}. \end{aligned}$$

mit der Konstante $C^* = C(q) + C(\tilde{q}) > 0$.

Um nun den Nenner abzuschätzen, konstruieren wir eine Familie von Kreisen Γ_K mit halbzahlgigen Radien, die die reelle Achse stets zwischen zwei Nullstellen von $\sin \sqrt{\lambda}$ schneiden. Dazu wählen wir $R > 0$ so groß, dass für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\sqrt{\lambda}| \geq R$ die Voraussetzung

$$|\sqrt{\lambda}| \geq 8e^{\|q\|}$$

erfüllt ist.

Für die nachfolgenden Abschätzungen definieren wir einfachheitshalber

$$z := \sqrt{\lambda}.$$

Da die Abbildung $z \mapsto z^2$ surjektiv auf $\mathbb{C}$ ist, lässt sich jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ in der Form $\lambda = z^2$ darstellen. Somit genügt es, die Funktion $F(z^2)$ auf der gesamten z -Ebene abzuschätzen.

Mit $|z| \geq 8e^{\|q\|}$ vereinfacht sich dann die Fehlerabschätzung aus Theorem 2.4 zu

$$\begin{aligned} \left| y_2(1, z^2, q) - \frac{\sin z}{z} \right| &\leq \frac{1}{8e^{\|q\|}} \cdot e^{\|q\|} \cdot \frac{1}{|z|} \exp(|\operatorname{Im} z|) \\ &= \frac{1}{|z|} \exp(|\operatorname{Im} z|). \end{aligned} \quad (\star_4)$$

Für $K \in \mathbb{N}$ definieren wir also

$$\Gamma_K := \left\{ z \in \mathbb{C} : |z| = \left(K + \frac{1}{2} \right) \pi \right\}, \quad D_K := \left\{ z \in \mathbb{C} : |z| \leq \left(K + \frac{1}{2} \right) \pi \right\}.$$

Die Wahl dieser halbzahligen Radien ist durch das Counting Lemma motiviert, das garantiert, dass auf Γ_K $y_2(1, z^2, q) \neq 0$ gilt.

Auf Γ_K gilt also für alle $m \in \mathbb{Z}$

$$|z - m\pi| \geq \left| |z| - |m\pi| \right| = \left| \left(K + \frac{1}{2} \right) \pi - |m|\pi \right| = \pi \left| K + \frac{1}{2} - |m| \right| \geq \frac{\pi}{2}.$$

Insbesondere also

$$|z - m\pi| \geq \frac{\pi}{2} > \frac{\pi}{4}$$

für alle $m \in \mathbb{Z}$. Damit ist z auf Γ_K von allen Nullstellen $m\pi$ des Sinus mindestens um $\pi/4$ entfernt, sodass die Voraussetzung von Lemma 2.17 erfüllt ist. Wir wählen nun $K_0 \in \mathbb{N}$ so groß, dass

$$\left(K_0 + \frac{1}{2} \right) \pi \geq 8e^{\|q\|}.$$

Das heißt

$$K_0 \geq \frac{16e^{\|q\|} - \pi}{2\pi}.$$

Dann liegt für alle $K \geq K_0$ der Kreisrand Γ_K genau in dem Bereich, in dem die Abschätzung $(\star_4)$ gilt. Zusammen mit Lemma 2.17 erhalten wir für $K \geq K_0$

$$\begin{aligned} |y_2(1, z^2, q)| &\geq \left| \frac{\sin z}{z} \right| - \left| y_2(1, z^2, q) - \frac{\sin z}{z} \right| \\ &\geq \frac{1}{4|z|} e^{|\operatorname{Im} z|} - \frac{1}{8|z|} e^{|\operatorname{Im} z|} \\ &= \frac{1}{8|z|} e^{|\operatorname{Im} z|}. \end{aligned}$$

Mit $z = \sqrt{\lambda}$ liefert die zuvor hergeleitete Zählerabschätzung

$$\left| \Delta(z^2) - \tilde{\Delta}(z^2) \right| \leq \frac{C^*}{|z|^2} e^{|\operatorname{Im} z|}.$$

Mit beiden Abschätzungen erhalten wir dann für alle $z \in \Gamma_K$

$$|F(z^2)| = \frac{|\Delta(z^2) - \tilde{\Delta}(z^2)|}{|y_2(1, z^2, q)|} \leq \frac{\frac{C^*}{|z|^2} e^{|\operatorname{Im} z|}}{\frac{1}{8|z|} e^{|\operatorname{Im} z|}} = \frac{8C^*}{|z|} = \frac{8C^*}{\left(K + \frac{1}{2}\right)\pi}.$$

Da $\lambda \mapsto F(\lambda)$ als ganze Funktion auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph ist, definiert auch

$$\Phi(z) := F(z^2).$$

eine ganze Funktion auf $\mathbb{C}$. Das Maximumprinzip auf der Kreisscheibe D_K liefert dann für $K \geq K_0$

$$\max_{z \in D_K} |\Phi(z)| = \max_{z \in \Gamma_K} |\Phi(z)| \leq \frac{8C^*}{\left(K + \frac{1}{2}\right)\pi}.$$

Da $\bigcup_{K \in \mathbb{N}} D_K = \mathbb{C}$ gilt, folgt insbesondere, dass Φ auf ganz $\mathbb{C}$ beschränkt ist. Nach dem Satz von Liouville ist Φ demnach als holomorphe, beschränkte Funktion auf ganz $\mathbb{C}$ konstant, also $\Phi(z) \equiv c$. Aus der oberen Abschätzung folgt also für $K \geq K_0$

$$0 \leq |c| = \max_{z \in D_K} |\Phi(z)| \leq \frac{8C^*}{\left(K + \frac{1}{2}\right)\pi} \xrightarrow{K \rightarrow \infty} 0.$$

Daher muss $c = 0$ gelten und damit $\Phi \equiv 0$.

Aus

$$\Phi(z) = F(z^2) = 0$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ folgt daher

$$F(\lambda) = 0$$

für alle $\lambda \in \mathbb{C}$.

Nach Definition von F erhalten wir somit

$$\Delta(\lambda) = \tilde{\Delta}(\lambda)$$

für alle $\lambda \in \mathbb{C}$. Damit ist Aussage (ii) bewiesen. □

Bemerkung 3.8. Die Bedingung $|\sqrt{\lambda}| \geq 8e^{\|q\|}$ stellt sicher, dass der Fehlerterm gegenüber dem Hauptterm kontrolliert bleibt. Auf Γ_K folgt mit Lemma 2.17 und

Theorem 2.4

$$\begin{aligned} |y_2(1, \lambda, q)| &\geq \left| \frac{\sin \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} \right| - \left| y_2(1, \lambda, q) - \frac{\sin \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} \right| \\ &\geq \frac{e^{|\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}|}}{|\sqrt{\lambda}|} \left(\frac{1}{4} - \frac{e^{\|q\|}}{|\sqrt{\lambda}|} \right). \end{aligned}$$

Damit der Ausdruck in der Klammer positiv bleibt, fordern wir, dass der Fehlerterm höchstens halb so groß wie der Hauptterm ist, das heißt gerade

$$\frac{e^{\|q\|}}{|\sqrt{\lambda}|} \leq \frac{1}{8} \quad \Longleftrightarrow \quad |\sqrt{\lambda}| \geq 8e^{\|q\|}.$$

4 Hauptsatz

Satz 4.1. Für ein $q \in L^2([0, 1], \mathbb{R})$ seien $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(\lambda'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Folgen der periodischen bzw. antiperiodischen Eigenwerte (siehe Oszillationstheorem), und $\Delta(\lambda)$ die Spur der Monodromie. Dann wird $\text{Iso}(q)$ durch $\kappa \times \mu$ bijektiv abgebildet auf

$$\kappa \times \mu[\text{Iso}(q)] = \left\{ (\kappa_n, \mu_n)_{n \in \mathbb{N}} \left| \mu_n \in \begin{cases} [\lambda'_n, \lambda'_{n+1}], & n \text{ ungerade,} \\ [\lambda_{n-1}, \lambda_n], & n \text{ gerade,} \end{cases} \Delta(\mu_n) = (-1)^n 2 \cosh(\kappa_n) \right. \right\}.$$

Beweis. Im ersten Schritt zeigen wir, dass für jedes $\tilde{q} \in \text{Iso}(q)$ die zugehörigen Daten

$$(\kappa_n(\tilde{q}), \mu_n(\tilde{q}))_{n \in \mathbb{N}}$$

die Bedingungen der Zielmenge erfüllen.

Sei dazu $\tilde{q} \in \text{Iso}(q)$. Nach Definition 2.24 der Isospektralmenge gilt

$$\tilde{\Delta}(\lambda) = \Delta(\lambda)$$

für alle $\lambda \in \mathbb{C}$. Insbesondere besitzen q und $\tilde{q}$ dieselben periodischen beziehungsweise antiperiodischen Eigenwerte $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beziehungsweise $(\lambda'_n)_{n \in \mathbb{N}}$, da diese durch die Gleichung $\Delta(\lambda) = \pm 2$ bestimmt werden. Demnach stimmen die Intervalle $[\lambda'_n, \lambda'_{n+1}]$ und $[\lambda_{n-1}, \lambda_n]$ für q und $\tilde{q}$ überein. Nach dem Oszillationstheorem liegen die Dirichlet-Eigenwerte $\mu_n(\tilde{q})$ gerade in diesen Intervallen. Genauer liegt für jedes ungerade n , $\mu_n(\tilde{q})$ im Intervall $[\lambda'_n, \lambda'_{n+1}]$ und für jedes gerade n im Intervall $[\lambda_{n-1}, \lambda_n]$. Da $y_2(x, \mu_n(\tilde{q}), \tilde{q})$ eine Dirichletlösung zum Eigenwert $\mu_n(\tilde{q})$ ist, ist $(0, 1)^T$ Eigenvektor der Monodromiematrix $M(\mu_n(\tilde{q}), \tilde{q})$ zum Eigenwert $y'_2(1, \mu_n(\tilde{q}), \tilde{q})$. Parametrisiert durch $\kappa_n(\tilde{q})$ erhalten wir die beiden Eigenwerte

$$(-1)^n e^{\kappa_n(\tilde{q})} \quad \text{und} \quad (-1)^n e^{-\kappa_n(\tilde{q})}.$$

Demnach folgt für die Spur

$$\tilde{\Delta}(\mu_n(\tilde{q})) = (-1)^n (e^{\kappa_n(\tilde{q})} + e^{-\kappa_n(\tilde{q})}) = (-1)^n 2 \cosh(\kappa_n(\tilde{q})).$$

Da $\tilde{q} \in \text{Iso}(q)$, erhalten wir mit $\tilde{\Delta} = \Delta$

$$\Delta(\mu_n(\tilde{q})) = (-1)^n 2 \cosh(\kappa_n(\tilde{q})).$$

Damit ist gezeigt, dass $(\kappa_n(\tilde{q}), \mu_n(\tilde{q}))_{n \in \mathbb{N}}$ tatsächlich in der im Satz angegebenen Menge liegt, die Abbildung also wohldefiniert ist.

Seien nun $\tilde{q}_1, \tilde{q}_2 \in \text{Iso}(q)$ zwei Potentiale mit

$$(\kappa \times \mu)(\tilde{q}_1) = (\kappa \times \mu)(\tilde{q}_2).$$

Dann stimmen die zugehörigen spektralen Daten überein, das heißt

$$\kappa(\tilde{q}_1) = \kappa(\tilde{q}_2) \quad \text{und} \quad \mu(\tilde{q}_1) = \mu(\tilde{q}_2).$$

Nach Theorem 2.28 ist die Abbildung $\kappa \times \mu$ auf $L^2([0, 1], \mathbb{R})$ injektiv. Insbesondere können zwei Potentiale mit denselben κ -Daten und denselben Dirichlet-Eigenwerten nicht verschieden sein. Daher folgt unmittelbar

$$\tilde{q}_1 = \tilde{q}_2.$$

Damit ist auch die Einschränkung von $\kappa \times \mu$ auf $\text{Iso}(q)$ injektiv.

Wir zeigen nun, dass jede zulässige Folge von Daten tatsächlich von einem Potential aus der Isospektralmenge stammt. Sei dazu eine Folge $(\kappa_n, \mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegeben, die die Bedingungen des Satzes erfüllt, das heißt

$$\mu_n \in \begin{cases} [\lambda'_n, \lambda'_{n+1}], & \text{für } n \text{ ungerade,} \\ [\lambda_{n-1}, \lambda_n], & \text{für } n \text{ gerade,} \end{cases}$$

und

$$\Delta(\mu_n) = (-1)^n 2 \cosh(\kappa_n)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Ziel ist es ein Potential $\tilde{q} \in \text{Iso}(q)$ zu finden, sodass

$$(\kappa(\tilde{q}), \mu(\tilde{q})) = (\kappa_n, \mu_n)_{n \in \mathbb{N}}.$$

Dafür verwenden wir Korollar 2.29. Sobald wir gezeigt haben, dass die vorgegebenen Daten ein Element von $\ell_1^2 \times S$ definieren, liefert der Isomorphismus aus Korollar 2.29 ein eindeutig bestimmtes Potential $\tilde{q} \in L^2([0, 1], \mathbb{R})$ mit genau diesen spektralen Daten. Anschließend bleibt nur noch zu prüfen, dass dieses Potential tatsächlich in

$\text{Iso}(q)$ liegt.

Nach Lemma 3.4 beschreibt die Translationsfamilie $(q_\tau)_{\tau \in \mathbb{R}}$ für jedes feste $n \in \mathbb{N}$ genau alle zulässigen n -ten Komponenten, also

$$\{(\kappa_n(q_\tau), \mu_n(q_\tau)) \mid \tau \in \mathbb{R}\} = \{(\kappa_n, \mu_n) \mid \mu_n \in I_n, \quad \Delta(\mu_n) = (-1)^n 2 \cosh(\kappa_n)\}.$$

Damit erhalten wir für jedes feste n jede zulässige Komponente (κ_n, μ_n) als n -te spektrale Komponente eines geeignet verschobenen Potentials q_τ . Wir müssen also nur noch zeigen, dass die daraus entstehende Folge der Dirichlet-Eigenwerte $\mu_n(q_\tau)$ die geforderte asymptotische Struktur besitzt. Mit Theorem 2.22 erhalten wir für $q_\tau \in L^2$

$$\mu_n(q_\tau) = n^2 \pi^2 + \int_0^1 q_\tau(x) dx - \langle \cos(2\pi n x), q_\tau \rangle + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Der Mittelwert ist translationsinvariant, denn wegen der Periodizität von q gilt

$$\int_0^1 q_\tau(x) dx = \int_0^1 q(x + \tau) dx = \int_\tau^{1+\tau} q(u) du = \int_0^1 q(u) du.$$

Demnach hat jedes verschobene Potential q_τ denselben Mittelwert $s = \int_0^1 q(x) dx$. Es bleibt daher nur noch, den Fourierterm zu kontrollieren. Dazu definieren wir

$$c_n := \langle \cos(2\pi n x), q \rangle, \quad s_n := \langle \sin(2\pi n x), q \rangle.$$

Mit der Substitution $u = x + \tau$ und dem Additionstheorem erhalten wir

$$\begin{aligned} \langle \cos(2\pi n x), q_\tau \rangle &= \int_0^1 \cos(2\pi n x) q(x + \tau) dx \\ &= \int_0^1 \cos(2\pi n(u - \tau)) q(u) du \\ &= \cos(2\pi n \tau) \langle \cos(2\pi n x), q \rangle + \sin(2\pi n \tau) \langle \sin(2\pi n x), q \rangle \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} \left| \langle \cos(2\pi n x), q_\tau \rangle \right| &= \left| \cos(2\pi n \tau) c_n + \sin(2\pi n \tau) s_n \right| \\ &\leq |\cos(2\pi n \tau)| |c_n| + |\sin(2\pi n \tau)| |s_n| \\ &\leq |c_n| + |s_n| \end{aligned}$$

denn $|\cos(2\pi n \tau)|, |\sin(2\pi n \tau)| \leq 1$. Folglich gilt

$$\left| \langle \cos(2\pi n x), q_\tau \rangle \right|^2 \leq 2|c_n|^2 + 2|s_n|^2.$$

Da die Folgen $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ als Fourierkoeffizienten eines L^2 -Potentials in ℓ^2

liegen, gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |s_n|^2 < \infty$$

und damit entsprechend

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2|c_n|^2 + 2|s_n|^2) < \infty.$$

Also gilt $(\langle \cos(2\pi nx), q_\tau \rangle)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2$ für alle $\tau \in \mathbb{R}$. Da für alle Translationen q_τ dieselbe von τ unabhängige Majorante existiert, ist diese ℓ^2 -Kontrolle insbesondere gleichmäßig in τ .

Demnach besitzen die Dirichlet-Eigenwerte des verschobenen Potentials q_τ die Darstellung

$$\mu_n(q_\tau) = n^2\pi^2 + s + r_n(\tau),$$

wobei die Restfolge

$$r_n(\tau) = -\langle \cos(2\pi nx), q_\tau \rangle + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

gleichmäßig bezüglich τ in ℓ^2 liegt. Tatsächlich gilt

$$|r_n(\tau)|^2 \leq 2 |\langle \cos(2\pi nx), q_\tau \rangle|^2 + 2 O\left(\frac{1}{n^2}\right) \leq 4|c_n|^2 + 4|s_n|^2 + \frac{C}{n^2} =: a_n. \quad (4.1)$$

Sei nun $(\kappa_n, \mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beliebige zulässige Folge. Nach Lemma 3.4 existiert zu jedem festen $n \in \mathbb{N}$ eine Translation $\tau_n \in \mathbb{R}$, sodass der n -te Dirichlet-Eigenwert durch das verschobene Potential q_{τ_n} realisiert wird, also $\mu_n = \mu_n(q_{\tau_n})$. Im Allgemeinen hängt τ_n dabei von n ab. Genau deshalb ist die zuvor gezeigte gleichmäßige Kontrolle in τ entscheidend.

Da die Abschätzung (4.1) unabhängig von τ ist, können wir für jedes n speziell $\tau = \tau_n$ wählen. Dadurch erhalten wir

$$\mu_n = \mu_n(q_{\tau_n}) = n^2\pi^2 + s + r_n(\tau_n).$$

Aus der Summierbarkeit von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ folgt nun

$$\sum_{n=1}^{\infty} |r_n(\tau_n)|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty.$$

Damit gilt

$$(r_n(\tau_n))_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2.$$

Demnach besitzt die zulässige Folge $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Darstellung

$$\mu_n = n^2 \pi^2 + s + r_n(\tau_n), \quad (r_n(\tau_n))_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2.$$

Dies entspricht gerade der definierende asymptotische Struktur des Spektralraums S . Folglich gilt

$$(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}} \in S.$$

Für den Nachweis $(\kappa_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell_1^2$ gehen wir analog vor. Da die κ_n reell sind, erhalten wir aus der Definition von ℓ_1^2

$$(\kappa_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell_1^2 \iff \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \kappa_n^2 < \infty \iff \sum_{n=1}^{\infty} |n \kappa_n|^2 < \infty \iff (n \kappa_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2.$$

Es genügt also, $(n \kappa_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2$ zu zeigen. Aus Theorem 2.26 folgt hierfür

$$n \kappa_n(q_\tau) = \frac{1}{2\pi} \langle \sin(2\pi n x), q_\tau \rangle + O\left(\frac{1}{n}\right). \quad (4.2)$$

Auch hier erhalten wir mit der Substitution $u = x + \tau$ und dem Additionstheorem

$$\langle \sin(2\pi n x), q_\tau \rangle = \cos(2\pi n \tau) s_n - \sin(2\pi n \tau) c_n.$$

Da $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ als Fourierkoeffizientenfolgen eines L^2 -Potentials in ℓ^2 liegen und die Faktoren $\sin(2\pi n \tau)$ sowie $\cos(2\pi n \tau)$ betragsmäßig durch 1 beschränkt bleiben, folgt wie zuvor die Abschätzung

$$|\langle \sin(2\pi n x), q_\tau \rangle|^2 \leq 2|c_n|^2 + 2|s_n|^2$$

Demnach liegt $(\langle \sin(2\pi n x), q_\tau \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig bezüglich τ in ℓ^2 . Da außerdem $(1/n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2$ gilt und der Faktor $1/(2\pi)$ konstant ist, folgt aus (4.2) die gleichmäßige Abschätzung $(n \kappa_n(q_\tau))_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2$ für alle $\tau \in \mathbb{R}$. Insbesondere existiert eine von τ unabhängige summierbare Majorante $(b_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^1$ mit

$$|n \kappa_n(q_\tau)|^2 \leq \frac{1}{2\pi^2} (2|c_n|^2 + 2|s_n|^2) + \frac{\tilde{C}}{n^2} = \frac{1}{\pi^2} |c_n|^2 + \frac{1}{\pi^2} |s_n|^2 + \frac{\tilde{C}}{n^2} =: b_n.$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $\tau \in \mathbb{R}$.

Sei nun $(\kappa_n, \mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beliebige zulässige Folge. Nach Lemma 3.4 existiert zu jedem festen $n \in \mathbb{N}$ eine Translation $\tau_n \in \mathbb{R}$, sodass die n -te Komponente durch das verschobene Potential q_{τ_n} realisiert wird, also $\kappa_n = \kappa_n(q_{\tau_n})$. Da die Majorante

$(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ unabhängig von τ ist, dürfen wir für jedes n separat $\tau = \tau_n$ einsetzen. Damit folgt

$$|n\kappa_n|^2 = |n\kappa_n(q_{\tau_n})|^2 \leq b_n.$$

Da $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ summierbar ist, erhalten wir

$$\sum_{n=1}^{\infty} |n\kappa_n|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty.$$

Somit gilt $(n\kappa_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2$, und folglich per Definition des gewichteten Folgenraums $(\kappa_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell_1^2$. Zusammen mit $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ folgt insgesamt

$$(\kappa_n, \mu_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell_1^2 \times S.$$

Damit gehören die vorgegebenen zulässigen Daten zum Zielraum der Abbildung

$$\kappa \times \mu : L^2([0, 1], \mathbb{R}) \rightarrow \ell_1^2 \times S.$$

Korollar 2.29 liefert daher zu jeder Folge aus $\ell_1^2 \times S$ ein eindeutig bestimmtes Potential $\tilde{q} \in L^2([0, 1], \mathbb{R})$, für das

$$(\kappa(\tilde{q}), \mu(\tilde{q})) = (\kappa_n, \mu_n)_{n \in \mathbb{N}}.$$

gilt .

Nun zeigen wir, dass dieses Potential tatsächlich in der Isospektralmenge $\text{Iso}(q)$ liegt, das heißt

$$\tilde{\Delta}(\lambda) = \Delta(\lambda)$$

für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt. Hierfür nutzen wir Lemma 3.5.

Zunächst erfüllen sowohl Δ als auch $\tilde{\Delta}$ die asymptotischen Abschätzungen (i) aus Lemma 3.5. Für das ursprüngliche Potential $q \in L^2([0, 1], \mathbb{R})$ erhalten wir

$$\left| \Delta(\lambda) - 2c_\lambda(1) - s_\lambda(1) \int_0^1 q(t) dt \right| \leq \frac{C(q)}{|\lambda|} e^{|\text{Im} \sqrt{\lambda}|}, \quad C(q) > 0.$$

Da auch $\tilde{q} \in L^2([0, 1], \mathbb{R})$ gilt, liefert Lemma 3.5

$$\left| \tilde{\Delta}(\lambda) - 2c_\lambda(1) - s_\lambda(1) \int_0^1 \tilde{q}(t) dt \right| \leq \frac{C(\tilde{q})}{|\lambda|} e^{|\text{Im} \sqrt{\lambda}|}, \quad C(\tilde{q}) > 0.$$

Insbesondere stimmen die Mittelwertterme von Δ und $\tilde{\Delta}$ überein. Aus der zuvor hergeleiteten Darstellung $\mu_n = n^2\pi^2 + s + r_n(\tau_n)$ mit $s = \int_0^1 q(t) dt$ und $(r_n(\tau_n))_{n \in \mathbb{N}} \in$

ℓ^2 folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\mu_n - n^2 \pi^2) = s = \int_0^1 q(t) dt.$$

Da $\tilde{q} \in L^2([0, 1], \mathbb{R})$, liefert Theorem 2.22 angewandt auf $\tilde{q}$

$$\mu_n(\tilde{q}) = n^2 \pi^2 + \int_0^1 \tilde{q}(t) dt + \ell^2(n),$$

also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\mu_n(\tilde{q}) - n^2 \pi^2) = \int_0^1 \tilde{q}(t) dt.$$

Da nun nach Korollar 2.29, $\mu_n(\tilde{q}) = \mu_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, folgt

$$\int_0^1 \tilde{q}(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} (\mu_n(\tilde{q}) - n^2 \pi^2) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\mu_n - n^2 \pi^2) = \int_0^1 q(t) dt.$$

Demnach erfüllen beide Diskriminanten dieselben asymptotischen Abschätzungen. Da die Folge $(\kappa_n, \mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zur im Hauptsatz beschriebenen Zielmenge gehört, gilt außerdem

$$\Delta(\mu_n) = (-1)^n 2 \cosh(\kappa_n)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Andererseits konstruieren wir $\tilde{q}$ gerade so, dass seine κ - und μ -Daten mit den vorgegebenen Folgen übereinstimmen. Damit gilt

$$\tilde{\Delta}(\mu_n) = \tilde{\Delta}(\mu_n(\tilde{q})) = (-1)^n 2 \cosh(\kappa_n(\tilde{q})) = (-1)^n 2 \cosh(\kappa_n) = \Delta(\mu_n)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Da Δ und $\tilde{\Delta}$ zudem dieselben asymptotischen Abschätzungen aus (i) erfüllen, liefert Lemma 3.5 (ii) unmittelbar

$$\tilde{\Delta} = \Delta.$$

Nach Definition der Isospektralmenge folgt daraus unmittelbar

$$\tilde{q} \in Iso(q).$$

Damit existiert zu jeder Folge aus der im Hauptsatz beschriebenen Zielmenge ein Potential $\tilde{q} \in Iso(q)$ mit genau diesen κ - und μ -Daten. Folglich ist die Einschränkung $\kappa \times \mu|_{Iso(q)}$ surjektiv. Zusammen mit der bereits gezeigten Injektivität folgt daraus die Bijektivität auf die im Hauptsatz angegebene Zielmenge. Damit ist der Hauptsatz bewiesen. $\square$

5 Zusammenfassung

Das Hauptresultat dieser Arbeit zeigt, dass die Abbildung

$$\kappa \times \mu : \text{Iso}(q) \rightarrow \{(\kappa_n, \mu_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \mu_n \in I_n, \Delta(\mu_n) = (-1)^n 2 \cosh(\kappa_n)\}$$

eine Bijektion zwischen der Isospektralmenge eines Potentials $q \in L^2([0, 1], \mathbb{R})$ und einer durch die Diskriminante Δ explizit beschriebenen Folgenmenge in $\ell_1^2 \times S$ definiert. Damit übertragen wir die ursprünglich von McKean und Trubowitz für glatte Potentiale entwickelte Parametrisierung erfolgreich auf eine allgemeinere Klasse von Potentialen, nämlich auf L^2 -Potentiale.

Der Beweis beruht dabei auf zwei zentralen Bausteinen. Zum einen liefert uns der von Pöschel und Trubowitz bewiesene reell-analytische Isomorphismus

$$\kappa \times \mu : L^2([0, 1], \mathbb{R}) \rightarrow \ell_1^2 \times S$$

unmittelbar die Injektivität auf der Isospektralmenge $\text{Iso}(q)$. Der wesentlich anspruchsvollere Teil besteht darin, die Surjektivität zu zeigen. Wir zeigen diese in zwei wesentlichen Schritten. Zunächst beweist Lemma 3.4 mithilfe des Variationssatzes und des Diagonalisierbarkeitslemmas, dass die durch Translationen erzeugte Familie $(q_\tau)_{\tau \in \mathbb{R}}$ in jeder Komponente n alle zulässigen Datenpaare (κ_n, μ_n) durchläuft. Anschließend zeigt Lemma 3.5 unter Verwendung asymptotischer Eigenschaften der Diskriminante, dass das auf diese Weise rekonstruierte Potential dieselbe Diskriminante wie q besitzt und somit tatsächlich zur Isospektralmenge $\text{Iso}(q)$ gehört.

Literaturverzeichnis

- [1] J. Pöschel und E. Trubowitz, *Inverse Spectral Theory*. Pure and Applied Mathematics, Band 130, Academic Press, 1987.
- [2] H. P. McKean und E. Trubowitz, *Hill's operator and hyperelliptic function theory in the presence of infinitely many branch points*, Communications on Pure and Applied Mathematics, 1976.
- [3] W. Magnus und S. Winkler, *Hill's Equation*, Interscience Publishers, 1966.
- [4] J. B. Conway, *Functions of One Complex Variable*, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 11, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin 1973.