Seminar ausgewählte Themen gewöhnlicher Differentialgleichungen

Laura Kowalczyk

15. April 2026

Thema E: Das Dirichlechtproblem IV

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

Die folgende Seminararbeit behandelt ausgewählte Resultate der inversen Spektraltheorie zum Dirichlechtproblem nach Jürgen Pöschel und Eugene Trubowitz. Im Fokus steht die detaillierte Untersuchung der Theoreme 7 bis 9 sowie des zugehörigen Korollars 3.

Dabei wird insbesondere die Struktur der Eigenfunktionen des betrachteten Operators analysiert. Ein zentraler Aspekt ist die Herleitung von Orthogonalitätsrelationen und Identitäten mithilfe des Wronskians, die für das Verständnis der Spektraldaten wesentlich ist. Abschließend wird gezeigt, dass ein geeignet konstruiertes Funktionensytem den Raum $L^2(0,1)$ vollständig beschreibt.

Ziel der Arbeit ist es, die Beweise dieser Resultate nachvollziehbar darzustellen und die zugrunde liegenden Zusammenhänge transparent zu machen.

2 Theorem 7, Lokale Umkehrbarkeit

Für jedes q in L^2 gilt, dass g_n(x,q), $n \geq 1$ eine Orthonormalbasis von L^2 ist.

Beweis: Aus vorherigen Theoremen wissen wir, dass Q=-(d^2/dx^2) + q ist.
Q ist selbstadjungiert unter den Dirichlechtrandbedingungen und zwar $g(1) = g(0) = 0$.
Somit gilt per Definition für selbstadjungierte Operatoren, dass $\langle Qf, g\rangle = \langle f, Qg\rangle$. Nun wird durch die bereits gegebenen Randbedingungen von g_n sowie g_m gezeigt, dass die Gleichung$(\mu_m - \mu_n)\langle g_m, g_n\rangle$=0 gilt.

$$(\mu_m \mu_n)\langle g_m, g_n\rangle = \langle \mu_m g_m, g_n\rangle - \langle g_m, \mu_n g_n\rangle = \langle Qg_m, g_n\rangle - \langle g_m, Qg_n\rangle = 0$$

Wegen der Selbstadjungiertheit folgt aus dieser Gleichung also direkt das Ergebnis 0.
Wir zeigen nun in der allgemeinen Form, dass die Selbstadjungiertheit gilt. Dies machen wir durch partielle Integration und erneut den Dirichlechtrandbedingungen.

Dafür setzen wir $g_m = f$ und $g_n = g$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 (-f''(x) + q(x)f(x))g(x)dx - \int_0^1 f(x)(-g''(x) + q(x)g(x))dx \\
&= \int_0^1 -f''(x)g(x)dx - \int_0^1 -f(x)g''(x) \\
&= \int_0^1 f(x)g''(x)dx - \int_0^1 f''(x)g(x)dx
\end{aligned}$$

Wir integrieren den zweiten Teil nun partiell, um zu zeigen, dass das gesamte Integral gleich 0 ist.

$$\int_0^1 f''(x)g(x)dx = [f'(x)g(x)]_0^1 - \int_0^1 f'(x)g'(x)dx$$

Die Stammfunktion wird hier 0, wegen den Dirichlechtrandbedingungen für g. Integrieren wir das übrig gebliebene Integral erneut partiell, erhalten wir

$$-([f(x)g'(x)]_0^1 - \int_0^1 f(x)g''(x)dx) = \int_0^1 f(x)g''(x)dx$$

Jetzt ist ersichtlich, dass unser Term genau der Gleiche ist wie der erste Teil der ursprünglichen Gleichung. Da wir beide Teile subtrahieren, ist das Ergebnis gleich 0.
Da $\mu_m \neq \mu_n$, folgt $\langle g_m, g_n \rangle = 0$ für $m \neq n$, also ist die Orthogonalität als erste Voraussetzung für eine Orthonormalbasis bewiesen.

Als nächstes wird die Abgeschlossenheit bewiesen. Hierfür vergleichen wir g_n mit einer bereits bekannten Orthonormalbasis für $L^2(0, 1)$ und zwar $e_n(x) = \sqrt{2}sin(n\pi x)$.

Beweisen wir kurz, wieso e_n eine Orthonormalbasis von $L^2(0, 1)$ ist.
Als erstes zeigen wir die Normierung der Funktion.

$$\begin{aligned}
\langle e_n, e_n \rangle &= \int_0^1 (\sqrt{2}sin(n\pi x))^2 dx \\
&= 2\int_0^1 sin^2(n\pi x))dx \to sin^2(\alpha) = (1 - cos(2\alpha)) \\
&= 2\int_0^1 \frac{1}{2}(1 - cos(2n\pi x))dx \\
&= \int_0^1 1dx - \int_0^1 cos(2n\pi x)dx \\
&= [x]_0^1 \\
&= 1
\end{aligned}$$

Nun zeigen wir die Orthogonalität

$$\begin{aligned}
\langle e_n, e_m \rangle &= 2\int_0^1 sin(n\pi x)sin(m\pi x)dx \to sin(\alpha)sin(\beta) = \frac{1}{2}(cos(\alpha - \beta) - cos(\alpha + \beta)) \\
&= \int_0^1 (cos((n - m)\pi x) - cos((n + m)\pi x))dx \\
&= 0
\end{aligned}$$

Die Vollständigkeit der Basis e_n setzen wir hier vorraus.

Wir nutzen nun einen Operator A, welcher die Basis e_n auf die neue Basis g_n abbildet, sodass g_n den gesamten Raum L^2 ausfüllt.
Definieren wir dafür den Operator A

$$Af = \sum \langle f, e_n \rangle g_n$$

(untere Grenze der Summe ist hier $n \geq 1$

A ist laut der parsevalschen Gleichung eine Isometrie, da gilt

$$\|Af\|^2 = \sum |\langle f, e_n \rangle|^2 = \|f\|^2$$

Da die Gleichung im Hilbert Raum äquivalent zur Vollständigkeit des Orthonormalsystems ist, haben wir diese automatisch gezeigt.
Um zu zeigen, dass A surjektiv ist, nutzen wir den Hilbert-Schmidt Operator, welcher in Theorem 4 eingeführt wurde.

$$\sum \|(A - I)e_n\|^2 = \sum \|g_n - e_n\|^2 = \sum O(\frac{1}{n^2}) < \infty$$

$(A - I)$ ist hierbei die Abweichung des Operators von der Identität, wie in Hilbert-Schmidt definiert. Dort wird der Operator als $K = d\phi - I$ definiert.Diese sind immer kompakt. Die allgemeine Gleichung lautet dann
$\sum \|(d\phi - I)e_n\|^2 = \sum \|g_n - e_n\|^2 < \infty$. e_n ist die ideale Fourier-Basis, in unserem Fall also die Sinus Funktion, während g_n die tatsächliche Eigenfunktion ist.
Wir wissen das die Folge des Fehlerterms $O(\frac{1}{n^2})$konvergiert(Folge ist $\frac{1}{n^2}$) und somit ist direkt gezeigt, dass $\sum \|(A - I)e_n\|^2$ endlich ist.

q.e.d.

3 Theorem 8, Orthogonalität und Spektraldaten

In Theorem 8 werden wir 3 verschiedene Gleichungen beweisen, welche eine Basis für unser weiteres Vorgehen bilden. Wir nutzen die angegebene Definition von
$a_n(x) = y_1(x, \mu_n\ )y_2(x, \mu_n\ ), n \geq 1$.

3.1 Teil a)

$$\langle g_m^2, \frac{d}{dx} g_n^2 \rangle = 0 \tag{1}$$

$$\langle g_m^2, (g_n^2)' \rangle = \frac{1}{2} \int_0^1 (g_m^2 (g_n^2)' - (g_m^2)' g_n^2) dx \tag{2}$$

Da wir partielle Integration nutzen um das Integral im weiteren Verlauf zu integrieren, folgt diese Zerlegung des Integrals aus der Identität
$\int_0^1 g_m^2 (g_n^2)' dx = [g_m^2 g_n^2]_0^1 - \int_0^1 (g_m^2)' - g_n^2 dx$. Da die Stammfunktion hier gleich 0 ist aufgrund der Dirchlechtrandbedingungen ($g(1) = g(0) = 0$) bleibt nur der zweite Term erhalten und somit ergibt sich $\int_0^1 g_m^2 (g_n^2)' = -\int_0^1 (g_m^2)' g_n^2 dx$. Dies kann man schreiben als die Gleichung $A = -B$ wodurch sich $A = \frac{1}{2}(A - B)$ ergibt. Dies wird in (2) angewendet.
Nun multiplizieren wir die Ableitngen aus und erhalten für $(g^2)' = 2gg'$. Das setzen wir in die Gleichung ein.

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\int_0^1 (g_m^2 2g_n g_n' - 2g_m g_m' g_n^2)dx \\
&= \int_0^1 g_m g_n (g_m g_n' - g_m' g_n)dx
\end{aligned}
$$

Es gilt, dass der Teil in der Klammer die Wronskian ist, welche wir aus Kapitel 1 kennen. Die Ableitung der Wronski-Formel wird wie folgt definiert.

$$
[g_m, gn]' = (\mu_m - \mu_n)g_m g_n
$$

Stellen wir die Gleichung nach $g_m g_n$ um erhalten wir

$$
g_m g_n = \frac{1}{\mu_m - \mu_n}[g_m, g_n]'
$$

Das setzen wir nun in die ursprüngliche Gleichung ein. Aus der Analysis wissen wir, dass $\int f'(x)f(x)dx = \frac{1}{2}f^2(x)$. Das wende wir nun auf unser Integral an und erhalten

$$
[\frac{1}{2(\mu_m - \mu_n)}[[g_m, g_n]^2]]_0^1
$$

$[g_m, g_n]$ ist hier gleich Null, aufgrund der Dirichlechtrandbedingungen. Somit haben wir gezeigt, dass die Gleichung gleich 0 ist.

q.e.d.

3.2 Teil b)

In Aufgabenteil b) wird nun gezeigt, dass

$$
\langle a_m, (g_n^2)' \rangle = \begin{cases} 1, m = n \\ 0, m \neq n \end{cases}
$$

Zunächst errinern wir uns daran, wie a_m definiert wurde $a_m = y_1(x, \mu_m)y_2(x, \mu_m)$. y_1 und y_2 sind hierbei zwei Lösungen derselben Differentialgleichung und beide gehören zum Eigenwert μ_m. Daher folgt $a_m = y_1 y_2$.
Nun wenden wir partielle Integration an, um die Gleichung zu lösen.

$$
\begin{aligned}
2\langle a_m, \frac{d}{dx}g_n^2 \rangle &= \int_0^1 (a_m(g_n^2)' - (a_m' g_n^2)dx \\
&= 2\int_0^1 y_1 y_2 (g_n^2)dx \\
&= \int_0^1 (y_1 y_2 (g_n^2)') - (g_n^2 (y_1 y_2)')dx \\
&= \int_0^1 (y_1 y_2 2g_n g_n' - g_n^2 y_1' y_2 - g_n^2 y_1 y_2')dx \\
&= \int_0^1 (y_2 g_n (y_1 g_n' - y_1' g_n) + y_1 g_n (y_2 g_n' - g_n y_2'))dx
\end{aligned}
$$

Nun wollen wir Teile der Gleichung in die Wronskian-Form bringen die wie folgt lautet $[y, g] = yg' - y'g$. Nehmen wir also die einzelnen Teile des Integrals und formen sie in die Wronskian-Formel um.

$y_2 g_n(y_1 g_n' - y_1' g_n)$ $\qquad$ $y_1 g_n(y_2 g_n' - g_n y_2')$

$[y_1, g_n] = y_1 g_n' - y_1' g_n$ $\qquad$ $[y_2, g_n] = y_2 g_n' - y_2' g_n$

Setzen wir die Gleichungen nun zurück in das Integral ein, ergibt sich ein leicht lösbares Integral.

$$= \int_0^1 (y_2 g_n [y_1, g_n] + y_1 g_n [y_2, g_n]) dx$$

Jetzt gibt es zwei zu betrachtende Fälle:

$$1. m \neq n$$

In diesem Fall nutzen wir die Wronski-Ableitung. $[y_j, g_n]' = (\mu_m - \mu_n) y_j g_n$. Wir lösen nach $y_j g_n$ auf und erhalten

$$y_j g_n = \frac{1}{\mu_m - \mu_n} [y_j, g_n]'$$

Das setzen wir in beide Terme ein und erhalten

$$\frac{1}{\mu_m - \mu_n} \int_0^1 ([y_2, g_n]' + [y_1, g_n]' [y_2, g_n]) dx$$

Durch die Produktregel können wir das Integral erneut umformen und einfach auswerten

$$= \frac{1}{\mu_m - \mu_n} \int_0^1 \frac{d}{dx} ([y_2, g_n], [y_1, g_n]) \qquad = \frac{1}{\mu_m - \mu_n} [[y_2, g_n][y_1, g_n]]_0^1$$

Aufgrund der Dirchlechtrandbedingungen $g_n(0) = g_n(1) = 0$ gilt $g_n = 0$, daher verschwinden die Randterme. Also ist das Gesamtergebnis der Gleichung für den Fall $m \neq n$ gleich 0 und somit ist die Orthogonalität zwischen den Eigenvektoren gegeben.

$$2. m = n$$

In diesem Fall fällt der zweite Teil des Integrals direkt weg, da y_2 ein Vielfaches von g_n ist, denn $y_2 = c g_n$, $c \in \mathbf{R}$. Dadurch ist auch die Wronskian-Formel $[y_2, g_n] = 0$. Folglich bleibt nur das Integral $\int_0^1 y_2 g_n [y_1, g_n] dx$ übrig, wobei wir $g_n = y_2$ setzen und somit ergibt sich $\int_0^1 g_n^2 [y_1, y_2] dx$. Nutzen wir nun die Normierungsbedingung, erhalten wir $[y_1, y_2] = 1$ und somit das Integral $\int_0^1 g_n^2 1 dx = 1$

q.e.d.

3.3 Teil c)

In Aufgabenteil c) wird bewiesen, dass die Gleichung $\langle a_m, \frac{d}{dx} a_n \rangle = 0$ gilt. Hier nutzen wir die gleiche Vorgehensweise wie in den 2 vorherigen Beweisen.

y ist hier eine Eigenfunktion zu μ_m, während z eine Eigenfunktion zu μ_n ist. Wir wenden nun die partielle Integration auf das vorliegende Intervall an.

$$\begin{aligned} 2\int_0^1 y_1y_2(z_1z_2)'dx &= \int_0^1 (y_1y_2(z_1z_2)' - (y_1y_2)'z_1z_2dx \\ &= \int_0^1 (y_1y_2(z_1'z_2 + z_1z_2') - (y_1'y_2 + y_1y_2')z_1z_2)dx \\ &= \int_0^1 y_2z_2[y_1, z_1] + y_1z_1[y_2, z_2]dx \end{aligned}$$

Nach Umschreibung in die Wronskian Formel, leiten wir diese ab und erhalten

$$\begin{aligned} &[y_1, z_1]' = y_1z_1'' - y_1''z_1 = (q - \mu_n)y_1z_1 - (q - \mu_m)y_1z_1 = (\mu_m - \mu_n)(y_1z_1) \\ &[y_2, z_2]' = (\mu_m - \mu_n)(y_2z_2) \end{aligned}$$

Nun lösen wir die Gleichungen jeweils nach (y_1z_1) beziehungsweise (y_2z_2) auf.

$$\begin{aligned} (y_1z_1) &= \frac{1}{\mu_m - \mu_n}[y_1, z_1]' \\ (y_2z_2) &= \frac{1}{\mu_m - \mu_n}[y_2, z_2]' \end{aligned}$$

Das setzen wir zurück in unser Integral ein und ziehen den Bruch $\frac{1}{\mu_m - \mu_n}$ direkt nach vorne heraus.

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\mu_m - \mu_n}\int_0^1 ([y_2, z_2]'[y_1, z_1] + [y_2, z_2][y_1, z_1]'dx \\ &= \frac{1}{\mu_m - \mu_n}\int_0^1 \frac{d}{dx}([y_2, z_2], [y_1, z_1]dx \\ &= \frac{1}{\mu_m - \mu_n}[[y_2, z_2][y_1, z_1]]_0^1 \end{aligned}$$

Hier wurde die Produktregel rückwärts genutzt. Die Stammfunktion kann nun leicht ausgewertet werden, da durch die Dirichlechtrandbedingungen die Randterme verschwinden und somit das Ergebnis 0 eindeutig ist, für $m \neq n$. Dies beweist die Orthogonalität zwischen a_m und der Ableitung a_n.

q.e.d.

4 Theorem 9, Vollständigkeit der Basis

Die Vektoren 1 und $g_n^2 - 1$, $n \geq 1$ sind in $L^2(0, 1)$ linear unabhängig, so wie auch die Vektoren $\frac{d}{dx}g_n^2$, $n \geq 1$.
Die Abbildung $(\xi, n) \to \sum \xi \frac{d}{dx}g_n^2 + n_0 + \sum n_n(g_n^2 - 1)$ ist ein linearer Isomorphismus zwischen $l_1^2 \times \mathrm{R} \times l^2$ und L^2.
Wir betrachten $g_n - 1$ und $\frac{d}{dx}g_n^2$
Wenn wir $g_n = \sqrt{2}sin(n\pi x)$ für q=0 setzen, dies quadrieren und umformen, erhalten wir

$$g_n^2 = 2sin^2(n\pi x) = 2(\frac{1 - cos(2n\pi x)}{2})$$
$$g_n^2 - 1 = -cos(2n\pi x)$$

$$\frac{d}{dx}g_n^2 = 2g_n g_n' = 2(\sqrt{2}sin(n\pi x))(\sqrt{2}n\pi cos(n\pi x)) = 2n\pi sin(2n\pi x)$$

Dies entspricht der bekannte Fourierbasis und wird uns weiter im Beweis nützlich sein, da wir bereits wissen, dass die Fourierbasis $\{1, cos(2n\pi x), sin(2n\pi x)\}$ den gesamten Raum L^2 aufspannt. Ziel ist zu zeigen, dass die Vektoren $\{1, g_1^2 - 1, g_2^2 - 1, ...\}$ linear unabhängig sind.

Beweis: Zeigen wir, durch das Skalarprodukt zwischen Vektoren, dass wir aus allen Linearkombinationen eine, welche nicht 0 ergibt, finden und beweisen somit die lineare Unabhängigkeit. Dafür definieren wir eine Testfunktion $h \in L^2$, welche senkrecht auf alle unseren Basisvektoren steht und führen einen direkten Beweis durch.
Es gelte $h(x) = cos(2n\pi x)$ und $f(x) = g_n^2 - 1 \approx -cos(2n\pi x)$ und $m \neq n$.

$$\langle g_m^2 - 1, h\rangle = \int_0^1 [-cos(2m\pi x)][cos(2n\pi x)]dx$$

Nach den Orthogonalitätsrelationen der Trigonometrie gilt für $m \neq n$

$$\int_0^1 cos(2m\pi x)cos(2n\pi x)dx = 0$$

Nehmen wir nun an, dass $n = m$ ist.

$$\begin{aligned}\langle g_n^2, h_n\rangle &= \int_0^1 g_n^2 h_n \\ &= \int_0^1 (1 - cos(2n\pi x))(cos(2n\pi x))dx\end{aligned}$$

Zerlegen wir das Integral nun in zwei Teile und berechnen die einzelnen Terme ergibt sich

$$= \int_0^1 1cos(2n\pi x)dx - \int_0^1 cos(2n\pi x)cos(2n\pi x)dx$$

Der erste Teil wird 0, da das Integral über eine volle Periode des Cosinus immer 0 ist. Den zweiten Term lösen wir weiter auf und erhalten durch Nutzung der Identität $cos^2(\alpha) = \frac{1+cos(2\alpha)}{2}$

$$\int_0^1 \frac{1 + cos(4n\pi x)}{2}dx = \int_0^1 \frac{1}{2}dx + \int_0^1 \frac{cos(4n\pi x)}{2}dx = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}$$

Gesamtergebnis ist also

$$0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

Es ist ersichtlich, dass das Skalarprodukt der Funktion mit anderen Funktionen, also für $n \neq m$ 0 ergibt und für das Skalarprodukt mit sich selbst, also $m = n$ $-\frac{1}{2}$ ergibt. Da $0 \neq -\frac{1}{2}$ ist die lineare Unabhängigkeit bewiesen.
Nun beweisen wir die **Orthogonalität** der Vektoren.

$$\langle g_n^2 - 1, \frac{d}{dx} g_m^2 \rangle = \int_0^1 (g_n^2(x) - 1)(\frac{d}{dx} g_m^2(x)) dx$$

Substituieren wir nun durch die Approximation der Fourierreihe

$$g_n^2(x) - 1 \approx -cos(2n\pi x)$$
$$\frac{d}{dx} g_m^2(x) \approx 2m\pi sin(2m\pi x)$$

$$\int_0^1 [-cos(2n\pi x)][2m\pi sin(2m\pi x)] dx = -2m\pi \int_0^1 cos(2n\pi x) sin(2m\pi x) dx$$

Ein Integral über das Produkt von Sinus und Cosinus über eine volle Periode [0,1] ist immer 0, solange es sich um harmonische Schwingungen handelt. Weiter müssen wir die Orthogonalität von 1 und der Ableitung von g_m^2 zeigen.

$$\langle 1, \frac{d}{dx} g_m^2 \rangle = \int_0^1 \frac{d}{dx} g_m^2 dx = g_m^2(1) - g_m^2(0) = 0$$

Aufgrund der Dirichlechtrandbedingungen ist diese Orthogonalität bewiesen und somit ist sie insgesamt beweisen.
Beweisen wir nun die **Vollständigkeit**.
Wir nutzen, dass das System $\phi = \{1, \sqrt{2}cos(2n\pi x), \sqrt{2}sin(2n\pi x)\}$ eine Orthonormalbasis für $L^2[0,1]$ ist, für $n \geq 1$.
Definieren wir unser neues System als ψ. Durch Approximation haben wir bereits festgestellt, dass der gerade Teil gleich $g_n^2(x) - 1 = -cos(2n\pi x) + \delta_n(x)$ und der ungerade Teil gleich $\frac{1}{2n\pi} \frac{d}{dx} g_n^2(x) = sin(2n\pi x) + \epsilon_n(x)$ ist. Dabei sind δ_n und ϵ_n die Fehlerterme.
Bedingung, dass ψ vollständig ist, ist, dass es nah genug an der bekannten Basis ϕ liegt. Mathematisch bedeutet das also

$$\sum_n^{\infty} \|\phi_n - \psi_n\|^2 < \infty$$

Die Summe aller Fehlterterme muss also einen endlichen Wert ergeben. Die Ordnung der Fehlterterme ist $O(\frac{1}{n})$. Setzen wir dies in Summe ein

$$\sum_n^{\infty} |O(\frac{1}{n})|^2 = \sum_n^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Aus Analyis 1 wissen wir bereits, dass diese Reihe konvergiert und somit ist die Summe kleiner ∞.
Es existiert folglich ein invertierbarer, beschränkter Operator T, der die alte Basis in die neue überführt, laut Theorem D.3.

$$T(\phi_n) = \psi_n$$

Ein invertierbarer Operator zwischen Banachräumen ist per Definition ein Isomorphismus. Somit ist Vollständigkeit bewiesen.

q.e.d.

5 Korollar 3

In jedem Punkt q in L^2 sind die Unterräume 1.$\{\sum \xi_n \frac{d}{dx} g_n^2 : \xi \in l_1^2\}$ und 2.$\{\eta_0 + \sum \eta_n (g_n^2 - 1) : \eta \in R \times l^2\}$ orthogonal und abgeschlossen. Deren direkte Summe entspricht dem ganzen Raum L^2. 1. ist hier der Unterraum der ungeraden Funktionen währen 2. der Unterraum der geraden Funktionen ist.
Definieren wir zwei Teilmengen von L^2:

$$V_1 = \{\sum \xi_n \frac{d}{dx} g_n^2\}$$
$$V_2 = \{\eta_0 + \sum \eta_n (g_n^2 - 1)\}$$

Zu beweisen ist
1. V_1orthogonal zu V_2
2.$V_1 \oplus V_2 = L^2$
3.Räume sind abgeschlossen
1.Orthogonalität
Es ist zu zeigen, dass für jedes $f \in V_1$ und jedes $g \in V_2$ das Skalarpodukt $\langle f, g \rangle = 0$ ist.
Sei $f = \frac{d}{dx} g_n^2$ und $g = g_m^2 - 1$. Nutzen wir die Aprroximation aus Theoprem 9 $f(x) \approx 2n\pi sin(2n\pi x)$ und $g(x) \approx -cos(2m\pi x)$, bilden das Skalarpodukt und rechnen das Integral aus.

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 [2n\pi sin(2n\pi x)][-cos(2m\pi x)]dx$$
$$= -2n\pi \int_0^1 sin(2n\pi x) cos(2m\pi x) dx$$

Da das Integral über das Produkt von Sinus und Cosinus über eine volle Periode für ganze Zahlem n,m immer 0 ergibt, stehen die Basiselemente von V_1 und V_2 senkrecht aufeinander. Da dies für alle Basiselemente gilt ist Orthogonalität bewiesen.

q.e.d.

2.Direkte Summe
Theorem 9 hat bereits gezeigt, dass

$$(\xi, \eta) \to \sum \xi_n \frac{d}{dx} g_n^2 + \eta_0 + \sum \eta_n (g_n^2 - 1)$$

ein linearer Isomorphismus ist. Die Abbildung ist bijektiv und jedes Element $u \in L^2$ hat eine eindeutige Darstellung $u = v_1 + v_2$ mit $v_1 \in V_1$ und $v_2 \in V_2$. Da die Räume zudem orthogonal sind, ist die Summe eine direkte Summe ($V_1 \oplus V_2$).

q.e.d

3.Abgeschlossenheit
Ein Unterraum ist in einem Hilbertraum abgeschlossen, wenn er das Bild eines abgeschlossenen Raumes unter einem Isomorphismus ist.
Die Koeffizientenräume l_1^2 und $R \times l^2$ sind vollständige Hilberträume und dadurch abgeschlossen.
Beweis:

Definition $l^2 = \{x = (x_1, x_2, ...) : \sum_1^\infty |x_i|^2 < \infty\}$. Sei (x^n) eine Cauchy Folge in l^2. Das bedeutet für jedes $\epsilon > 0$ gibt es ein N, sodass für alle $n, m > N$:

$$||x^n - x^m||^2 = \sum_1^\infty |x_i^n - x_i^m|^2 < \epsilon^2$$

Für jede feste Koordinate i gilt:

$$|x_i^n - x_i^m|^2 \leq \sum_1^\infty |x_j^n - x_j^m|^2 < \epsilon^2$$

Das bedeutet, für jedes i ist die Zahlenfolge $x_i^n, n \in N$eine Cauchyfolge in R. Da R vollständig ist, existiert für jede Koordinate ein Grenzwert x_i:

$$\lim_{n\to\infty} x_i^n = x_i$$

Wir erhalten also die folge $x = (x_1, x_2, ...)$. Wir müssen zeigen, dass $||x|| < \infty$. Da x_n eine Cauchyfolge ist, ist sie beschränkt, also $||x_n|| \leq M$ für alle n. Für jede endliche Summe K gilt:

$$\sum_1^K |x_i^n|^2 \leq M^2$$

Wenn wir $n \to \infty$ gehen lassen, konvergieren die einzelnen Komponenten:

$$\sum_1^K |x_i|^2 \leq M$$

Da dies für jedes K gilt, muss auch die unendliche Summe $\sum_1^\infty |x_i|^2 \leq M^2$ sein. Also ist $x \in l^2$

Der Raum l_1^2 ist definiert durch die Norm $||x||^2 = \sum_1^\infty n^2 |x_n|^2 < \infty$. Wir beweisen nun durch einen Isomorphismus und definieren eine Abbildung

$T(x_1, x_2, ...) = (1x_1, 2x_2, 3x_3, ...nx_n)$.

1. Isometrie: Es gilt $||x|| = ||T(x)||$, die Abbildung enthält also alle Abstände.

2.Bijektivität: Zu jeder folge $y \in l^2$ gibt es genau eine Folge $x \in l_1^2$ (nämlich $x_n = \frac{y_n}{n}$). Da l^2 vollständig ist und T eine strukturhaltende Isometrie ist, muss auch l_1^2 vollständig sein.

q.e.d.

Wenn das Potential q eine gerade Funktion ist, dann entsprechen die Räume exakt den klassischen ungeraden und geraden Funktionen. in diesem Fall ist $g_n^2 - 1$ tatsächlich eine gerade Funktion $f(x) = f(-x)$ und die Ableitung $\frac{d}{dx} g_n^2$ ist dann zwangsläufig eine ungerade Funktion $f(x) = -f(-x)$. Die Zerlegung $L^2 = V_1 \oplus V_2$ ist dann die klassische Zerlegung jeder Funktion in ihren geraden und ungeraden Anteil.