

# Seminar ausgewählte Themen gewöhnlicher Differentialgleichungen und dynamischer Systeme

Thema H: Isospektralmengen I

Fabian Kaiser  
Universität Mannheim

13. Mai 2026

## Inhaltsverzeichnis

<b>1 Einführung</b>	<b>1</b>
<b>2 Vorbereitung</b>	<b>2</b>
2.1 Erste geometrische Idee als Schnitt von Hyperflächen . . . . .	2
2.2 Strategie: Regular-Value-Theorem auf $\mu$ . . . . .	3
2.3 Asymptotiken und die Vektoren $U_n, V_n$ . . . . .	3
2.4 Korollar 2.3: Orthogonale Zerlegung von $L^2$ . . . . .	4
<b>3 Theorem 1</b>	<b>5</b>
3.1 Aussage . . . . .	5
3.2 Beweis: Reduktion auf das Regular-Value-Theorem . . . . .	5
<b>4 Theorem 1*: Das globale Koordinatensystem</b>	<b>9</b>
4.1 Aussage . . . . .	9
4.2 Beweis von Theorem 1* . . . . .	10
<b>Zusammenfassung</b>	<b>12</b>

## 1 Einführung

In dieser Ausarbeitung werden die Theoreme 1 und 1\* aus dem vierten Kapitel des Buches *Inverse Spectral Theory* von Pöschel und Trubowitz behandelt. Beide Theoreme machen geometrische Aussagen über die *Isospektralmenge* eines Potentials  $p \in L^2[0, 1]$ .

Aus den vorherigen Vorträgen sind die folgenden Tatsachen bekannt: Für  $q \in L^2[0, 1]$  besitzt das Dirichlet-Eigenwertproblem

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad y(0) = y(1) = 0,$$

eine Folge einfacher Eigenwerte

$$\mu_1(q) < \mu_2(q) < \mu_3(q) < \cdots \rightarrow \infty,$$

mit zugehörigen normierten Eigenfunktionen  $g_n(x, q)$ ,  $\|g_n\|_{L^2} = 1$ . Die *Spektralabbildung*

$$\mu : L^2 \longrightarrow S, \quad q \longmapsto (\mu_n(q))_{n \geq 1},$$

ist nach Theorem 3.1 reell-analytisch. Hier ist

$$S = \{ \sigma : \sigma_n = n^2 \pi^2 + s + \varepsilon_n, s \in \mathbb{R}, \varepsilon \in \ell^2 \}$$

mit Standard-Koordinaten  $(s, \varepsilon)$ , identifiziert mit einer offenen Teilmenge von  $\mathbb{R} \times \ell^2$ .

Aus Lemma 1 in Kapitel 3 wissen wir, dass  $\mu$  *nicht injektiv* ist: verschiedene Potentiale können dasselbe Dirichlet-Spektrum besitzen. Es liegt daher nahe, das Urbild eines vorgegebenen Spektrums systematisch zu untersuchen.

**Definition 1.1** (Isospektralmenge). Für  $p \in L^2[0, 1]$  heißt

$$M(p) = \{ q \in L^2 : \mu_n(q) = \mu_n(p) \text{ für alle } n \geq 1 \}$$

die *Isospektralmenge* von  $p$ . Per Definition ist  $M(p) = \mu^{-1}(\mu(p))$ .

Die zentrale Frage des Vortrags lautet: Welche geometrische Struktur trägt  $M(p)$ ? Theorem 1 antwortet darauf:

- $M(p)$  ist eine reell-analytische Untermannigfaltigkeit des Hilbertraums  $L^2$ .
- An jedem Punkt  $q \in M(p)$  lassen sich Tangential- und Normalenraum explizit beschreiben.
- $M(p)$  liegt in der Hyperebene  $\{ q \in L^2 : [q] = [p] \}$  aller Funktionen mit demselben Mittelwert wie  $p$ .

Theorem 1\* fügt eine globale Strukturaussage hinzu:  $\kappa$  ist ein *globales reell-analytisches Koordinatensystem* auf  $M(p)$ . Dies wird mit Hilfe des im letzten Vortrag bewiesenen Theorems 3.6 hergeleitet, welches besagt, dass  $\kappa \times \mu$  ein globaler reell-analytischer Isomorphismus zwischen  $L^2$  und einer offenen Teilmenge von  $\ell_1^2 \times S$  ist.

Im Folgenden verwenden wir die Schreibweise  $[q] := \int_0^1 q(t) dt$ .

## 2 Vorbereitung

### 2.1 Erste geometrische Idee als Schnitt von Hyperflächen

Eine naheliegende Idee zerlegt die Spektrumsbedingung in einzelne Eigenwert-Bedingungen.

**Definition 2.1.** Für  $p \in L^2$  und  $n \geq 1$  sei

$$M_n(p) = \{ q \in L^2 : \mu_n(q) = \mu_n(p) \}.$$

Es gilt offensichtlich

$$M(p) = \bigcap_{n \geq 1} M_n(p).$$

Aus Theorem 2.3 ist

$$\frac{\partial \mu_n}{\partial q}(q) = g_n^2(\cdot, q),$$

und  $\|g_n^2\|_{L^1} = \|g_n\|_{L^2}^2 = 1$ , also  $g_n^2 \neq 0$ . Damit ist  $d_q \mu_n \neq 0$ , und mit dem Regular-Value-Theorem (Anhang C) folgt: jede Menge  $M_n(p)$  ist eine reell-analytische Untermannigfaltigkeit der Codimension 1 in  $L^2$  – eine *Hyperfläche* mit Normalenraum  $\mathbb{R} \cdot g_n^2(q)$  in jedem Punkt  $q \in M_n(p)$ .

Aus der linearen Unabhängigkeit der Gradienten  $g_1^2(q), \dots, g_N^2(q)$  folgt: jeder *endliche* Schnitt  $M_1(p) \cap \dots \cap M_N(p)$  ist eine Untermannigfaltigkeit der Codimension  $N$  (Theorem 2.9 zusammen mit Anhang C).

Die naheliegende Vermutung wäre, dass auch der *unendliche* Schnitt  $M(p) = \bigcap_n M_n(p)$  eine Untermannigfaltigkeit ist, mit Normalenraum gleich der abgeschlossenen linearen Hülle der  $g_n^2(q)$ ,  $n \geq 1$ . Diese Vermutung lässt sich jedoch *nicht* aus linearer Unabhängigkeit alleine folgern, wie folgendes Gegenbeispiel aus Anhang C zeigt.

*Bemerkung 2.2* (Gegenbeispiel, Anhang C, Beispiel 5). In  $\ell^2$  sei für eine positive Folge  $r_n > 0$

$$T_n = \{z \in \ell^2 : |z_n| = r_n\}, \quad T = \bigcap_{n \geq 1} T_n.$$

Jede Menge  $T_n$  ist eine Untermannigfaltigkeit der Codimension 1, und die Gradienten der definierenden Funktionen sind linear unabhängig. Falls jedoch  $\sum r_n^2 < \infty$ , ist  $T$  ein *kompakter* Torus und kann daher keine Untermannigfaltigkeit von  $\ell^2$  sein.

Wir betrachten daher nicht einzelne Eigenwert-Bedingungen, sondern die ganze Spektralabbildung  $\mu$  und wenden auf sie das Regular-Value-Theorem an.

## 2.2 Strategie: Regular-Value-Theorem auf $\mu$

Wir erinnern an die Aussage des Regular-Value-Theorems aus Anhang C in der für uns relevanten Form.

**Theorem 2.3** (Regular-Value-Theorem, Anhang C). *Sei  $f : A \rightarrow F$  reell-analytisch, wobei  $A \subseteq E$  offen ist und  $E, F$  Banach-Räume sind. Ein Wert  $c \in F$  heißt regulär, falls für jedes  $x \in f^{-1}(c)$  eine Splittung  $E = E_h \oplus E_v$  existiert, sodass die Einschränkung*

$$d_x f|_{E_v} : E_v \longrightarrow F$$

*ein linearer Isomorphismus ist. In diesem Fall ist  $f^{-1}(c)$  eine reell-analytische Untermannigfaltigkeit von  $A$ , und der Tangentialraum an jedem Punkt  $x \in f^{-1}(c)$  ist gegeben durch  $T_x f^{-1}(c) = \ker d_x f$ .*

In unserem Fall ist  $f = \mu$ ,  $E = L^2$ ,  $F = \mathbb{R} \times \ell^2$ . Da  $L^2$  ein Hilbert-Raum ist, wählen wir an jedem  $q \in M(p)$  die natürliche orthogonale Splittung

$$L^2 = \ker_q \oplus \ker_q^\perp, \quad \ker_q := \ker d_q \mu.$$

Beachte, dass  $\ker_q$  als Kern der stetigen linearen Abbildung  $d_q \mu$  abgeschlossen ist, sodass diese Splittung wohldefiniert ist.

Damit reduziert sich unsere Aufgabe darauf zu zeigen, dass die Einschränkung

$$d_q \mu|_{\ker_q^\perp} : \ker_q^\perp \longrightarrow \mathbb{R} \times \ell^2$$

ein linearer Isomorphismus ist. Ist dies gezeigt, so ist  $\mu(p)$  regulärer Wert von  $\mu$ , und Theorem 2.3 liefert sofort

$$M(p) \text{ ist Untermannigfaltigkeit,} \quad T_q M(p) = \ker_q, \quad N_q M(p) = \ker_q^\perp.$$

## 2.3 Asymptotiken und die Vektoren $U_n, V_n$

Für die kommenden Konstruktionen benötigen wir drei Asymptotiken aus den vorherigen Vorträgen, jeweils gleichmäßig auf beschränkten Teilmengen von  $[0, 1] \times L^2$ :

$$\mu_n(q) = n^2 \pi^2 + [q] + \ell^2(n) \quad (\text{Theorem 2.4}) \quad (1)$$

$$g_n^2(x, q) = 1 - \cos(2n\pi x) + O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (\text{Korollar 2.1}) \quad (2)$$

$$\frac{d}{dx} g_n^2(x, q) = 2n\pi \sin(2n\pi x) + O(1) \quad (\text{Korollar 2.1}) \quad (3)$$

In Standard-Koordinaten  $(s, \varepsilon)$  auf  $S \cong \mathbb{R} \times \ell^2$  schreibt sich nach Theorem 3.1 das Differential der Spektralabbildung als

$$d_q \mu(w) = ([w], \langle g_n^2 - 1, w \rangle, n \geq 1), \quad w \in L^2. \quad (4)$$

Es ist daher nützlich, die Vektoren einzuführen, die in den Komponenten von (4) als Gradienten auftreten.

**Definition 2.4.** Für  $q \in L^2$  definieren wir

$$U_0 := 1, \quad U_n := g_n^2 - 1 \quad (n \geq 1), \quad V_n := 2 \frac{d}{dx} g_n^2 \quad (n \geq 1).$$

Mit dieser Notation liest sich (4) kompakt als

$$d_q \mu(w) = (\langle U_n, w \rangle)_{n \geq 0}. \quad (5)$$

Denn die  $\mathbb{R}$ -Komponente von  $\mu$  ist  $[q] = \langle 1, q \rangle = \langle U_0, q \rangle$  mit Gradient  $U_0 = 1$ , und für  $n \geq 1$  ist die  $n$ -te  $\ell^2$ -Komponente von  $d_q \mu$  gerade  $\langle g_n^2 - 1, w \rangle = \langle U_n, w \rangle$ . Beachte, dass kein Vektor  $V_0$  definiert wird, da  $U_0 = 1$  konstant ist und  $\frac{d}{dx} U_0 = 0$  gilt.

Wir verallgemeinern die diskreten Familien  $\{U_n\}$ ,  $\{V_n\}$  zu durch Folgen parametrisierten Familien.

**Definition 2.5.** Für  $\eta = (\eta_0, \eta_1, \eta_2, \dots) \in \mathbb{R} \times \ell^2$  und  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in \ell_1^2$  setzen wir

$$U_\eta := \sum_{n \geq 0} \eta_n U_n, \quad V_\xi := \sum_{n \geq 1} \xi_n V_n.$$

Wir überzeugen uns kurz von der Konvergenz dieser Reihen in  $L^2$ . Aus (2) folgt

$$U_n = -\cos(2n\pi x) + O\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{in } L^2,$$

und da das System  $\{\sqrt{2} \cos(2n\pi x)\}_{n \geq 1}$  orthonormal in  $L^2[0, 1]$  ist, konvergiert  $U_\eta$  in  $L^2$  für  $\eta \in \mathbb{R} \times \ell^2$ . Aus (3) folgt

$$V_n = 4n\pi \sin(2n\pi x) + O(1) \quad \text{in } L^2,$$

also  $\|V_n\|_{L^2} \sim 4n\pi$ . Wegen dieses linearen Wachstums brauchen wir den gewichteten Folgenraum

$$\ell_1^2 = \left\{ (\xi_n)_{n \geq 1} : \sum_{n \geq 1} n^2 \xi_n^2 < \infty \right\},$$

und für  $\xi \in \ell_1^2$  konvergiert  $V_\xi$  in  $L^2$ .

## 2.4 Korollar 2.3: Orthogonale Zerlegung von $L^2$

Das geometrische Fundament unseres Beweises ist die folgende, im letzten Vortrag aus Korollar 2.3 zusammen mit Theorem 2.9 hergeleitete Aussage.

**Theorem 2.6** (Korollar 2.3 & Theorem 2.9). *An jedem Punkt  $q \in L^2$  sind die Räume*

$$\mathcal{U}_q := \{U_\eta : \eta \in \mathbb{R} \times \ell^2\}, \quad \mathcal{V}_q := \{V_\xi : \xi \in \ell_1^2\}$$

*abgeschlossene und zueinander orthogonale Unterräume von  $L^2$ , und es gilt*

$$L^2 = \mathcal{U}_q \oplus \mathcal{V}_q.$$

*Genauer ist die Abbildung*

$$\mathbb{R} \times \ell^2 \times \ell_1^2 \longrightarrow L^2, \quad (\eta, \xi) \longmapsto U_\eta + V_\xi,$$

*ein linearer Isomorphismus. Insbesondere ist  $(U_n)_{n \geq 0}$  eine Basis von  $\mathcal{U}_q$  und  $(V_n)_{n \geq 1}$  eine Basis von  $\mathcal{V}_q$ .*

Geometrisch interpretiert beschreibt  $\mathcal{U}_q$  die Richtungen *spektraler Variation* – in diesen Richtungen ändert sich das Spektrum – während  $\mathcal{V}_q$  die Richtungen *spektraler Invarianz* darstellt – entlang dieser Richtungen bleiben alle Eigenwerte konstant. Diese Interpretation wird durch Theorem 1 präzisiert:  $\mathcal{U}_q$  wird zum Normalenraum,  $\mathcal{V}_q$  zum Tangentialraum von  $M(p)$  am Punkt  $q$ .

### 3 Theorem 1

#### 3.1 Aussage

**Theorem 3.1** (Theorem 1).

- (a) Für alle  $p \in L^2$  ist  $M(p)$  eine reell-analytische Untermannigfaltigkeit von  $L^2$ , die in der Hyperebene aller Funktionen mit Mittelwert  $[p]$  liegt.
- (b) An jedem Punkt  $q \in M(p)$  ist der Normalenraum

$$N_q M(p) = \{U_\eta : \eta \in \mathbb{R} \times \ell^2\} = \mathcal{U}_q$$

und der Tangentialraum

$$T_q M(p) = \{V_\xi : \xi \in \ell_1^2\} = \mathcal{V}_q.$$

**Geometrische Bedeutung.** An jedem Punkt  $q \in M(p)$ :

- Bewegung in Richtung  $U_n$  ändert den  $n$ -ten Eigenwert  $\mu_n$  und führt aus  $M(p)$  heraus.
- Bewegung in Richtung  $V_n$  erhält alle Eigenwerte und bleibt auf  $M(p)$ .

Die orthogonale Zerlegung  $L^2 = \mathcal{U}_q \oplus \mathcal{V}_q$  aus Theorem 2.6 wird damit zur Tangential–Normalen-Zerlegung von  $M(p)$ .

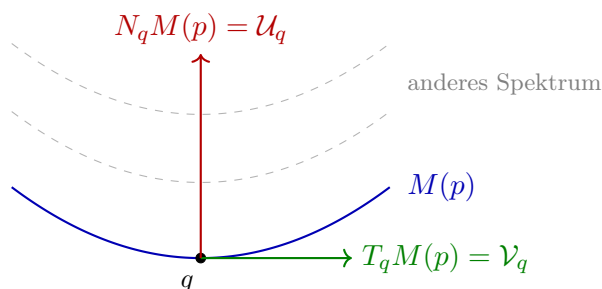


Abbildung 1: Geometrische Sicht auf  $M(p)$  am Punkt  $q$ : Tangentialraum  $\mathcal{V}_q$  (grün) tangential an  $M(p)$ , Normalenraum  $\mathcal{U}_q$  (rot) senkrecht dazu. Bewegungen entlang  $\mathcal{U}_q$  verlassen  $M(p)$  in Richtung anderer Spektren.

#### 3.2 Beweis: Reduktion auf das Regular-Value-Theorem

Wir folgen der in Abschnitt 2 skizzierten Strategie. Sei  $q \in M(p)$  fest. Aus (5) schreibt sich das Differential

$$d_q \mu(w) = (\langle U_n, w \rangle)_{n \geq 0}.$$

Mit der orthogonalen Splittung  $L^2 = \ker_q \oplus \ker_q^\perp$  reicht es nach Theorem 2.3 zu zeigen, dass die Einschränkung  $d_q \mu|_{\ker_q^\perp} : \ker_q^\perp \rightarrow \mathbb{R} \times \ell^2$  ein linearer Isomorphismus ist. Wir gehen in vier Schritten vor:

1. Wir identifizieren  $\ker_q^\perp$  konkret als  $\mathcal{U}_q$ .
2. Wir stellen  $d_q \mu|_{\ker_q^\perp}$  als Matrix-Operator  $D$  auf  $\mathbb{R} \times \ell^2$  dar.
3. Wir zeigen, dass  $D - I$  Hilbert-Schmidt und  $D$  injektiv ist; mit der Fredholm-Alternative folgt, dass  $D$  ein linearer Isomorphismus ist.

4. Wir wenden das Regular-Value-Theorem an und identifizieren Tangential- und Normalenraum.

Schließlich beweisen wir in einem fünften Schritt die Hyperebenen-Bedingung  $[q] = [p]$ , womit Theorem 3.1(a) und (b) bewiesen sind.

**Schritt 1:**  $\ker_q^\perp = \mathcal{U}_q$

**Lemma 3.2.** Für jedes  $q \in L^2$  gilt  $\ker_q^\perp = \mathcal{U}_q$ . Insbesondere ist  $(U_n)_{n \geq 0}$  eine Basis von  $\ker_q^\perp$ .

*Beweis.* Wir zeigen zuerst zwei elementare Beobachtungen.

(i) Die  $U_n$  sind orthogonal zu  $\ker_q$ . Denn für  $w \in \ker_q$  ist  $d_q\mu(w) = 0$ , also nach (5)

$$\langle U_n, w \rangle = (d_q\mu(w))_n = 0 \quad \text{für alle } n \geq 0.$$

(ii) Jeder zu allen  $U_n$  orthogonale Vektor liegt in  $\ker_q$ . Denn ist  $w \perp U_n$  für alle  $n$ , dann ist  $\langle U_n, w \rangle = 0$  für alle  $n$ , also  $d_q\mu(w) = 0$  und damit  $w \in \ker_q$ .

Wir zeigen nun die beiden Inklusionen.

*Inklusion  $\mathcal{U}_q \subseteq \ker_q^\perp$ .* Aus (i) folgt  $U_n \in \ker_q^\perp$  für alle  $n \geq 0$ . Da  $\ker_q^\perp$  als orthogonales Komplement abgeschlossen ist, enthält es auch den abgeschlossenen Spann  $\mathcal{U}_q$ .

*Inklusion  $\ker_q^\perp \subseteq \mathcal{U}_q$ .* Sei  $u \in \ker_q^\perp$ . Nach Theorem 2.6 besitzt  $u$  eine eindeutige Zerlegung  $u = U_\eta + V_\xi$  mit  $\eta \in \mathbb{R} \times \ell^2$ ,  $\xi \in \ell_1^2$ . Wir zeigen  $V_\xi = 0$ .

Da  $\mathcal{V}_q \perp \mathcal{U}_q$  nach Theorem 2.6, ist  $V_\xi \perp U_n$  für alle  $n$ . Aus (ii) folgt  $V_\xi \in \ker_q$ . Außerdem gilt  $U_\eta \in \mathcal{U}_q \subseteq \ker_q^\perp$  nach der ersten Inklusion, also

$$V_\xi = u - U_\eta \in \ker_q^\perp.$$

Damit liegt  $V_\xi \in \ker_q \cap \ker_q^\perp = \{0\}$ , sodass  $V_\xi = 0$  und  $u = U_\eta \in \mathcal{U}_q$ .

Die letzte Aussage des Lemmas folgt aus Theorem 2.6:  $(U_n)_{n \geq 0}$  ist eine Basis von  $\mathcal{U}_q = \ker_q^\perp$ .  $\square$

## Schritt 2: Der Matrix-Operator $D$

Wir wollen  $d_q\mu|_{\ker_q^\perp} : \ker_q^\perp \rightarrow \mathbb{R} \times \ell^2$  als linearen Isomorphismus identifizieren. Nach Schritt 1 lässt sich jedes  $u \in \ker_q^\perp$  eindeutig in der Basis  $(U_n)_{n \geq 0}$  entwickeln:  $u = U_\eta = \sum_{n \geq 0} \eta_n U_n$  mit  $\eta \in \mathbb{R} \times \ell^2$ . Wir berechnen die  $i$ -te Komponente von  $d_q\mu(U_\eta)$ :

$$(d_q\mu(U_\eta))_i = \langle U_i, U_\eta \rangle = \left\langle U_i, \sum_{n \geq 0} \eta_n U_n \right\rangle = \sum_{n \geq 0} \langle U_i, U_n \rangle \eta_n.$$

Hier wurde die Stetigkeit des Skalarprodukts genutzt, um Reihe und Skalarprodukt zu vertauschen.

**Definition 3.3** (Matrix-Operator  $D$ ). Bezüglich der Basis  $(U_n)_{n \geq 0}$  von  $\ker_q^\perp$  wird  $d_q\mu|_{\ker_q^\perp}$  durch die Matrix

$$D = (\langle U_i, U_j \rangle)_{i, j \geq 0}$$

als Operator auf  $\mathbb{R} \times \ell^2$  dargestellt:  $D\eta = d_q\mu(U_\eta)$  für  $\eta \in \mathbb{R} \times \ell^2$ .

Es bleibt zu zeigen, dass  $D$  ein linearer Isomorphismus von  $\mathbb{R} \times \ell^2$  auf sich selbst ist. Die Strategie ist:

- Schritt 3a/b:  $D - I$  ist ein Hilbert-Schmidt-Operator, also kompakt.
- Schritt 3c:  $D$  ist injektiv.
- Mit der Fredholm-Alternative folgt:  $D = I + (D - I)$  ist linearer Isomorphismus.

### Schritt 3a: Berechnung von $\langle U_i, U_j \rangle - \delta_{ij}$

Aus (2) folgt für  $n \geq 1$

$$U_n = -\cos(2n\pi x) + r_n, \quad \|r_n\|_{L^2} = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Insbesondere ist  $\sum_{n \geq 1} \|r_n\|^2 < \infty$ . Hier ist  $r_n \in L^2$  der konkrete Restterm aus der Asymptotik.

Einsetzen von  $U_i = -\cos(2i\pi x) + r_i$  und  $U_j = -\cos(2j\pi x) + r_j$  in das Skalarprodukt ergibt durch Ausmultiplizieren

$$\begin{aligned} \langle U_i, U_j \rangle &= \langle -\cos(2i\pi x) + r_i, -\cos(2j\pi x) + r_j \rangle \\ &= \langle \cos(2i\pi x), \cos(2j\pi x) \rangle - \langle \cos(2i\pi x), r_j \rangle \\ &\quad - \langle r_i, \cos(2j\pi x) \rangle + \langle r_i, r_j \rangle. \end{aligned}$$

Aus der Orthonormalität des Cosinus-Systems liefert der erste Term den Hauptbeitrag  $\delta_{ij}$ . Subtraktion von  $\delta_{ij}$  liefert

$$\langle U_i, U_j \rangle - \delta_{ij} = -\langle \cos(2i\pi x), r_j \rangle - \langle r_i, \cos(2j\pi x) \rangle + \langle r_i, r_j \rangle. \quad (6)$$

### Schritt 3b: $D - I$ ist Hilbert-Schmidt

Wir erinnern an die zwei Werkzeuge, die wir hier benötigen.

**Definition 3.4** (Hilbert-Schmidt-Operator, Theorem D.1). Eine Matrix  $K = (K_{ij})_{i,j \geq 1}$  heißt *Hilbert-Schmidt*, falls

$$\|K\|_{\text{HS}}^2 := \sum_{i,j \geq 1} |K_{ij}|^2 < \infty.$$

Jeder Hilbert-Schmidt-Operator ist kompakt.

**Lemma 3.5** (Bessel-Ungleichung, [2, Kap. V]). Sei  $(e_k)_{k \geq 1}$  ein orthonormales System in einem Hilbertraum  $H$ . Dann gilt für jedes  $f \in H$ :

$$\sum_{k \geq 1} |\langle e_k, f \rangle|^2 \leq \|f\|^2.$$

**Lemma 3.6.** Der Operator  $D - I$  ist Hilbert-Schmidt auf  $\mathbb{R} \times \ell^2$ . Insbesondere ist er kompakt.

*Beweis.* Wir zerlegen die rechte Seite von (6) in drei Terme:

$$A_{ij} := -\langle \cos(2i\pi x), r_j \rangle, \quad B_{ij} := -\langle r_i, \cos(2j\pi x) \rangle, \quad C_{ij} := \langle r_i, r_j \rangle.$$

Aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung im  $\mathbb{R}^3$  mit Vektor  $(1, 1, 1)$  folgt  $|x + y + z|^2 \leq 3(|x|^2 + |y|^2 + |z|^2)$ , also

$$|\langle U_i, U_j \rangle - \delta_{ij}|^2 \leq 3(|A_{ij}|^2 + |B_{ij}|^2 + |C_{ij}|^2).$$

Es genügt also zu zeigen, dass die drei Doppelsummen  $\sum_{i,j} |A_{ij}|^2$ ,  $\sum_{i,j} |B_{ij}|^2$ ,  $\sum_{i,j} |C_{ij}|^2$  einzeln endlich sind.

*Term  $A_{ij}$ .* Da  $\{\sqrt{2} \cos(2k\pi x)\}_{k \geq 1}$  ein orthonormales System in  $L^2[0, 1]$  ist, liefert die Bessel-Ungleichung für festes  $j \geq 1$ :

$$\begin{aligned} \sum_{i \geq 1} |\langle \cos(2i\pi x), r_j \rangle|^2 &= \frac{1}{2} \sum_{i \geq 1} |\langle \sqrt{2} \cos(2i\pi x), r_j \rangle|^2 \\ &\leq \frac{1}{2} \|r_j\|^2. \end{aligned}$$

Anschließende Summation über  $j$  liefert

$$\sum_{i,j \geq 1} |A_{ij}|^2 \leq \frac{1}{2} \sum_{j \geq 1} \|r_j\|^2 < \infty,$$

da  $\sum_j \|r_j\|^2 < \infty$  aus der Asymptotik  $\|r_n\| = O(1/n)$  folgt.

*Term  $B_{ij}$ .* Symmetrisches Argument mit Bessel über  $j$  statt  $i$ :  $\sum_{i,j} |B_{ij}|^2 < \infty$ .

*Term  $C_{ij}$ .* Cauchy-Schwarz liefert  $|\langle r_i, r_j \rangle| \leq \|r_i\| \|r_j\|$ , also

$$\sum_{i,j \geq 1} |C_{ij}|^2 \leq \sum_{i,j \geq 1} \|r_i\|^2 \|r_j\|^2 = \left( \sum_{n \geq 1} \|r_n\|^2 \right)^2 < \infty.$$

Für die nullte Zeile und Spalte gilt sogar exakt

$$D_{00} = \langle 1, 1 \rangle = 1, \quad D_{0j} = D_{j0} = 0 \quad (j \geq 1),$$

denn für jedes  $j \geq 1$  ist

$$\langle 1, U_j \rangle = \int_0^1 (g_j^2 - 1) dx = \|g_j\|^2 - 1 = 0.$$

Damit ist  $(D - I)_{00} = 0$  und  $(D - I)_{0j} = (D - I)_{j0} = 0$  für  $j \geq 1$ , sodass die nullte Zeile und Spalte zur Hilbert-Schmidt-Summe nichts beiträgt. Zusammen mit den obigen Abschätzungen für den Block  $i, j \geq 1$  folgt  $\sum_{i,j \geq 0} |D_{ij} - \delta_{ij}|^2 < \infty$ , also ist  $D - I$  Hilbert-Schmidt.  $\square$

### Schritt 3c: $D$ ist injektiv und damit linearer Isomorphismus

**Theorem 3.7** (Fredholm-Alternative, Theorem D.2). *Sei  $K$  ein kompakter Operator auf einem Banachraum. Dann gilt*

$$I + K \text{ injektiv} \iff I + K \text{ ist linearer Isomorphismus.}$$

**Lemma 3.8.** *Der Operator  $D : \mathbb{R} \times \ell^2 \rightarrow \mathbb{R} \times \ell^2$  ist ein linearer Isomorphismus.*

*Beweis.* Setze  $K := D - I$ . Nach Lemma 3.6 ist  $K$  Hilbert-Schmidt und damit kompakt. Nach Theorem 3.7 reicht es zu zeigen, dass  $D = I + K$  injektiv ist.

Sei  $\eta \in \mathbb{R} \times \ell^2$  mit  $D\eta = 0$ . Per Definition von  $D$  ist  $d_q \mu(U_\eta) = D\eta = 0$ , also  $U_\eta \in \ker_q$ . Andererseits ist  $U_\eta \in \mathcal{U}_q = \ker_q^\perp$  nach Lemma 3.2. Damit

$$U_\eta \in \ker_q \cap \ker_q^\perp = \{0\}.$$

Da  $(U_n)_{n \geq 0}$  nach Theorem 2.6 linear unabhängig sind, folgt  $\eta = 0$ .  $\square$

### Schritt 4: Anwendung des Regular-Value-Theorems

Wir haben gezeigt:

- Spaltung  $L^2 = \ker_q \oplus \ker_q^\perp$  an jedem  $q \in M(p)$ .
- $d_q \mu|_{\ker_q^\perp} : \ker_q^\perp \rightarrow \mathbb{R} \times \ell^2$  ist linearer Isomorphismus, da  $d_q \mu|_{\ker_q^\perp}$  als  $D$  in der Basis  $(U_n)$  dargestellt wird und  $D$  ein linearer Isomorphismus ist (Lemma 3.8).

Damit ist  $\mu(p)$  regulärer Wert von  $\mu$ , und nach Theorem 2.3:

- $M(p) = \mu^{-1}(\mu(p))$  ist eine reell-analytische Untermannigfaltigkeit von  $L^2$ .

- $T_q M(p) = \ker_q$  und  $N_q M(p) = \ker_q^\perp$ .

Identifikation mit  $\mathcal{U}_q, \mathcal{V}_q$ : Aus Lemma 3.2 ist  $\ker_q^\perp = \mathcal{U}_q$ . Mit der Zerlegung  $L^2 = \mathcal{U}_q \oplus \mathcal{V}_q$  aus Theorem 2.6 folgt  $\ker_q = \mathcal{V}_q$ . Insgesamt:

$$T_q M(p) = \mathcal{V}_q = \{V_\xi : \xi \in \ell_1^2\}, \quad N_q M(p) = \mathcal{U}_q = \{U_\eta : \eta \in \mathbb{R} \times \ell^2\}.$$

Damit ist Aussage (b) von Theorem 3.1 bewiesen.

### Schritt 5: Die Hyperebenen-Bedingung $[q] = [p]$

Es bleibt zu zeigen, dass  $M(p)$  in der Hyperebene  $\mathcal{H}_p := \{q \in L^2 : [q] = [p]\}$  liegt. Aus (1) angewandt auf  $q$  und  $p$  separat:

$$\mu_n(q) = n^2 \pi^2 + [q] + a_n, \quad \mu_n(p) = n^2 \pi^2 + [p] + b_n,$$

mit  $(a_n), (b_n) \in \ell^2$ . Subtraktion ergibt

$$\mu_n(q) - \mu_n(p) = ([q] - [p]) + (a_n - b_n).$$

Für  $q \in M(p)$  ist  $\mu_n(q) - \mu_n(p) = 0$  für alle  $n \geq 1$ , also

$$[q] - [p] = -(a_n - b_n) \quad \text{für alle } n \geq 1.$$

Die linke Seite ist konstant in  $n$ , die rechte Seite konvergiert gegen 0 wegen  $(a_n - b_n) \in \ell^2$ . Eine Konstante mit Grenzwert 0 verschwindet:

$$[q] - [p] = \lim_{n \rightarrow \infty} -(a_n - b_n) = 0,$$

also  $[q] = [p]$ . Damit ist  $M(p) \subseteq \mathcal{H}_p$ , und Theorem 3.1 ist vollständig bewiesen.  $\square$

## 4 Theorem 1\*: Das globale Koordinatensystem

Theorem 1 liefert die lokale Geometrie von  $M(p)$ . Theorem 1\* ergänzt eine globale Strukturaussage:  $\kappa$  ist ein *globales* reell-analytisches Koordinatensystem auf  $M(p)$ . Der Beweis verläuft anders als der von Theorem 1: statt das Regular-Value-Theorem auf  $\mu$  anzuwenden, nutzen wir das im letzten Vortrag bewiesene Theorem 3.6, welches besagt, dass  $\kappa \times \mu$  ein globaler reell-analytischer Isomorphismus ist. In dieser Karte erscheint  $M(p)$  als horizontale Schicht.

### 4.1 Aussage

**Theorem 4.1** (Theorem 1\*). *Sei  $p \in L^2$ .*

- $M(p)$  ist eine reell-analytische Untermannigfaltigkeit von  $L^2$ , die in der Hyperebene aller Funktionen mit Mittelwert  $[p]$  liegt.
- An jedem Punkt  $q \in M(p)$  ist der Normalenraum

$$N_q M(p) = \{U_\eta : \eta \in \mathbb{R} \times \ell^2\}$$

und der Tangentialraum

$$T_q M(p) = \{V_\xi : \xi \in \ell_1^2\}.$$

- $\kappa$  ist ein globales reell-analytisches Koordinatensystem auf  $M(p)$ . Das Differential

$$d_q \kappa : T_q M(p) \longrightarrow T_{\kappa(q)} \ell_1^2 = \ell_1^2$$

ist ein linearer Isomorphismus, gegeben durch  $d_q \kappa(V_\xi) = \xi$ .

Aussagen (a) und (b) sind wörtlich identisch zu denen von Theorem 3.1. Die neue Aussage ist (c).

## 4.2 Beweis von Theorem 1\*

Wir erinnern zunächst an das benötigte Resultat aus dem letzten Vortrag.

**Theorem 4.2** (Theorem 3.6). *Die Abbildung  $\kappa \times \mu : L^2 \rightarrow \ell_1^2 \times S$ ,  $q \mapsto (\kappa(q), \mu(q))$ , ist ein globaler reell-analytischer Isomorphismus auf eine offene Teilmenge von  $\ell_1^2 \times S$ . Das Differential  $d_q(\kappa \times \mu)$  ist an jedem  $q$  ein linearer Isomorphismus  $L^2 \rightarrow \ell_1^2 \times \mathbb{R} \times \ell^2$ , mit expliziter Inverse*

$$(d_q(\kappa \times \mu))^{-1}(\xi, \eta) = \sum_{n \geq 1} \xi_n V_n + \eta_0 + \sum_{n \geq 1} \eta_n W_n, \quad (7)$$

wobei  $W_n = -2 \cos(2n\pi x) + O(\frac{1}{n})$  in  $L^2$ .

Der Schlüssel zum Beweis ist die Beobachtung, dass die Bedingung  $\mu(q) = \mu(p)$  in  $\kappa \times \mu$ -Koordinaten zu einer horizontalen Schicht wird:

$$M(p) = \mu^{-1}(\mu(p)) = (\kappa \times \mu)^{-1}(\ell_1^2 \times \{\mu(p)\}). \quad (8)$$

$M(p)$  ist also in  $\kappa \times \mu$ -Koordinaten genau die horizontale Scheibe bei Höhe  $\mu(p)$ , wie in Abbildung 2 dargestellt. Wir gehen nun in fünf Schritten vor.

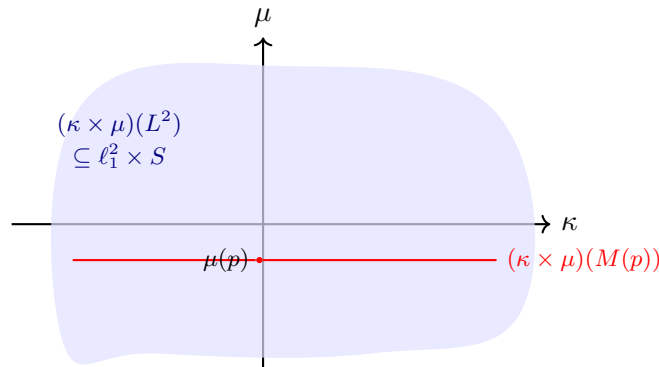


Abbildung 2:  $M(p)$  als horizontale Schicht in  $\kappa \times \mu$ -Koordinaten. Die Karte  $\kappa \times \mu$  macht  $L^2$  "flach"; das Bild ist eine offene Region in  $\ell_1^2 \times S$ . Die Niveaumenge  $M(p) = \mu^{-1}(\mu(p))$  wird zur horizontalen Schicht bei Höhe  $\mu(p)$ , und  $\kappa$  allein parametrisiert sie.

### Schritt 1: $M(p)$ ist Untermannigfaltigkeit, $\kappa$ globales Koordinatensystem

Wir verwenden die Definition einer Untermannigfaltigkeit aus Anhang C: eine Teilmenge  $M \subseteq E$  eines Banachraums  $E$  ist eine Untermannigfaltigkeit, falls für jeden Punkt eine Karte  $\varphi : U \rightarrow V$  existiert mit  $V \subseteq F = F_h \oplus F_v$  und  $\varphi(M \cap U) = V \cap F_h$ . Hier sind  $F_h$  und  $F_v$  lineare Unterräume.

Da unter  $\kappa \times \mu$  die Niveaumenge  $M(p)$  in die affine Hyperebene  $\ell_1^2 \times \{\mu(p)\}$  abgebildet wird, betrachten wir die translatierte Karte

$$\Phi : L^2 \longrightarrow \ell_1^2 \times \mathbb{R} \times \ell^2, \quad \Phi(q) := (\kappa(q), \mu(q) - \mu(p)).$$

Da  $\kappa \times \mu$  nach Theorem 4.2 ein globaler reell-analytischer Isomorphismus auf eine offene Teilmenge von  $\ell_1^2 \times S$  ist, ist auch  $\Phi$  als Verschiebung um den konstanten Vektor  $(0, -\mu(p))$  ein globaler reell-analytischer Isomorphismus auf eine offene Teilmenge  $V$  von  $\ell_1^2 \times \mathbb{R} \times \ell^2$ . Wir splitten den Modellraum:

$$F := \ell_1^2 \times \mathbb{R} \times \ell^2, \quad F_h := \ell_1^2 \times \{0\}, \quad F_v := \{0\} \times \mathbb{R} \times \ell^2.$$

Aus (8) folgt

$$\Phi(M(p)) = \Phi(L^2) \cap F_h = V \cap F_h.$$

Damit ist die UM-Definition mit *einer* globalen Karte  $\Phi$  erfüllt:

$$M(p) \text{ ist reell-analytische Untermannigfaltigkeit von } L^2.$$

Auf der horizontalen Scheibe  $V \cap F_h$  ist die zweite Koordinate konstant gleich 0, sodass  $\kappa$  allein  $M(p)$  parametrisiert. Da  $\Phi$  global ein Isomorphismus ist, folgt:

$$\kappa : M(p) \xrightarrow{\sim} \kappa(M(p)) \subseteq \ell_1^2 \text{ ist globaler reell-analytischer Isomorphismus.}$$

Insbesondere ist  $\kappa$  ein globales Koordinatensystem auf  $M(p)$ .

### Schritt 2: Tangentialraum

Wir zeigen  $T_q M(p) = \{V_\xi : \xi \in \ell_1^2\}$  in zwei Gleichheiten:

$$T_q M(p) = \{(d_q(\kappa \times \mu))^{-1}(\xi, 0) : \xi \in \ell_1^2\} = \{V_\xi : \xi \in \ell_1^2\}.$$

*Erste Gleichheit.* Anwendung der Tangentialraum-Definition auf die Karte  $\Phi$  mit  $F_h = \ell_1^2 \times \{0\}$  liefert

$$T_q M(p) = (d_q \Phi)^{-1}(F_h).$$

Da  $\Phi$  um den konstanten Vektor  $(0, -\mu(p))$  verschoben ist, stimmt  $d_q \Phi$  mit  $d_q(\kappa \times \mu)$  überein, also

$$T_q M(p) = (d_q(\kappa \times \mu))^{-1}(\ell_1^2 \times \{0\}) = \{(d_q(\kappa \times \mu))^{-1}(\xi, 0) : \xi \in \ell_1^2\}.$$

*Zweite Gleichheit.* Aus der Inversionsformel (7) mit  $\eta = 0$ , also  $\eta_0 = 0$  und  $\eta_n = 0$  für alle  $n \geq 1$ , verschwinden der konstante Term und die  $W_n$ -Terme:

$$(d_q(\kappa \times \mu))^{-1}(\xi, 0) = \sum_{n \geq 1} \xi_n V_n = V_\xi.$$

Somit ist  $T_q M(p) = \{V_\xi : \xi \in \ell_1^2\} = \mathcal{V}_q$ .

### Schritt 3: Normalenraum

Aus Theorem 2.6 ist  $L^2 = \mathcal{U}_q \oplus \mathcal{V}_q$  orthogonal. Mit  $T_q M(p) = \mathcal{V}_q$  aus Schritt 2:

$$N_q M(p) = (T_q M(p))^\perp = \mathcal{V}_q^\perp = \mathcal{U}_q = \{U_\eta : \eta \in \mathbb{R} \times \ell^2\}.$$

### Schritt 4: Hyperebenen-Bedingung

Wie in Schritt 5 des Beweises von Theorem 3.1: aus Theorem 2.4 angewandt auf  $q$  und  $p$  separat folgt  $[q] = [p]$  für jedes  $q \in M(p)$ . Damit liegt  $M(p)$  in der Hyperebene  $\mathcal{H}_p = \{q : [q] = [p]\}$ .

### Schritt 5: Die Identität $d_q \kappa(V_\xi) = \xi$

Sei  $q \in M(p)$ ,  $\xi \in \ell_1^2$  und  $V_\xi = \sum_{m \geq 1} \xi_m V_m \in T_q M(p)$ . Wir berechnen  $d_q \kappa(V_\xi)$  komponentenweise: für jedes  $n \geq 1$  zeigen wir  $d_q \kappa_n(V_\xi) = \xi_n$ .

(i) *Richtungsableitung als Skalarprodukt.* Da  $\kappa_n$  reell-analytisch ist, gilt für die Richtungsableitung in Richtung  $V_\xi$ :

$$d_q \kappa_n(V_\xi) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \kappa_n(q + tV_\xi) = \left\langle \frac{\partial \kappa_n}{\partial q}, V_\xi \right\rangle.$$

(ii) Reihendarstellung von  $V_\xi$  einsetzen. Mit  $V_\xi = \sum_{m \geq 1} \xi_m V_m$  und Stetigkeit des Skalarprodukts:

$$\left\langle \frac{\partial \kappa_n}{\partial q}, V_\xi \right\rangle = \left\langle \frac{\partial \kappa_n}{\partial q}, \sum_{m \geq 1} \xi_m V_m \right\rangle = \sum_{m \geq 1} \left\langle \frac{\partial \kappa_n}{\partial q}, V_m \right\rangle \xi_m.$$

(iii) Gradient  $\partial \kappa_n / \partial q$  einsetzen. Aus Theorem 3.4 ist

$$\frac{\partial \kappa_n}{\partial q}(x, q) = a_n(x, q) - [a_n] \cdot g_n^2(x, q),$$

wobei  $a_n(x, q) := y_1(x, \mu_n) y_2(x, \mu_n)$  und  $[a_n] := \int_0^1 a_n(x, q) dx$ . Außerdem ist  $V_m = 2 \frac{d}{dx} g_m^2$  per Definition.

(iv) Skalarprodukt mit Theorem 2.8 auswerten. Einsetzen liefert

$$\left\langle \frac{\partial \kappa_n}{\partial q}, V_m \right\rangle = \left\langle a_n - [a_n] g_n^2, 2 \frac{d}{dx} g_m^2 \right\rangle.$$

Mit der Linearität des Skalarprodukts:

$$= \underbrace{\left\langle a_n, 2 \frac{d}{dx} g_m^2 \right\rangle}_{(I)} - [a_n] \cdot \underbrace{\left\langle g_n^2, 2 \frac{d}{dx} g_m^2 \right\rangle}_{(II)}.$$

Theorem 2.8 liefert direkt

$$(I) = \delta_{nm}, \quad (II) = 0.$$

Damit

$$\left\langle \frac{\partial \kappa_n}{\partial q}, V_m \right\rangle = \delta_{nm} - [a_n] \cdot 0 = \delta_{nm}.$$

(v) Kronecker-Delta kollabiert die Summe. Eingesetzt in (ii):

$$d_q \kappa_n(V_\xi) = \sum_{m \geq 1} \delta_{nm} \xi_m = \xi_n.$$

Da das für jedes  $n \geq 1$  gilt, ist komponentenweise  $d_q \kappa(V_\xi) = \xi$ .

Insbesondere ist  $d_q \kappa : T_q M(p) \rightarrow \ell_1^2$ ,  $V_\xi \mapsto \xi$ , ein linearer Isomorphismus. Damit ist Theorem 4.1 vollständig bewiesen.  $\square$

## Zusammenfassung

In dieser Ausarbeitung wurden die Theoreme 1 und 1\* aus Kapitel 4 von Pöschel-Trubowitz zusammen mit ihren Beweisen dargestellt:

- **Theorem 1** zeigt: Für jedes  $p \in L^2$  ist  $M(p)$  eine reell-analytische Untermannigfaltigkeit von  $L^2$ , mit  $T_q M(p) = \mathcal{V}_q$  und  $N_q M(p) = \mathcal{U}_q$  in jedem Punkt  $q \in M(p)$ , und  $M(p)$  liegt in der Hyperebene  $\mathcal{H}_p = \{[q] = [p]\}$ . Der Beweis verwendet das Regular-Value-Theorem auf der Spektralabbildung  $\mu$ , mit der Splittung  $L^2 = \ker_q \oplus \ker_q^\perp$ . Die Schlüsselschritte sind die Identifikation  $\ker_q^\perp = \mathcal{U}_q$ , die Hilbert-Schmidt-Eigenschaft des Operators  $D - I$  via Bessel-Ungleichung und die Anwendung der Fredholm-Alternative.
- **Theorem 1\*** fügt hinzu:  $\kappa$  ist ein globales reell-analytisches Koordinatensystem auf  $M(p)$  mit  $d_q \kappa(V_\xi) = \xi$ . Der Beweis nutzt das im letzten Vortrag gezeigte Theorem 3.6, wonach  $\kappa \times \mu$  ein globaler reell-analytischer Isomorphismus ist. In dieser Karte ist  $M(p)$  die horizontale Schicht bei Höhe  $\mu(p)$ .

Die Schlüsselzutaten waren die orthogonale Zerlegung  $L^2 = \mathcal{U}_q \oplus \mathcal{V}_q$  aus Korollar 2.3, die Asymptotiken aus Korollar 2.1, die Hilbert-Schmidt-Theorie und Fredholm-Alternative aus Anhang D, sowie das globale Koordinatensystem-Resultat aus Theorem 3.6 und die Skalarprodukt-Identitäten aus Theorem 2.8.

## Literatur

- [1] J. Pöschel, E. Trubowitz: *Inverse Spectral Theory*. Academic Press, Pure and Applied Mathematics, 1987.
- [2] D. Werner: *Funktionalanalysis*. 8. Auflage, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2018.