

Fundamentallösungen, Volterra-Formulierung und Grundabschätzungen

Seminararbeit – Lenny Herold

04. März, 2026

Ziel

Diese Ausarbeitung konstruiert die beiden *Fundamentallösungen* $y_1(\cdot, \lambda, q)$ und $y_2(\cdot, \lambda, q)$ der Sturm–Liouville-Gleichung

$$-y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x), \quad x \in [0, 1],$$

für komplexe Spektralparameter $\lambda \in \mathbb{C}$ und Potentiale $q \in L^2([0, 1]; \mathbb{C})$, und zwar so, dass die Anfangsbedingungen

$$y_1(0, \lambda, q) = 1, \quad y_1'(0, \lambda, q) = 0, \quad y_2(0, \lambda, q) = 0, \quad y_2'(0, \lambda, q) = 1$$

erfüllt sind. Die Konstruktion geschieht genau in der Logik von Pöschel–Trubowitz: als Potenzreihenentwicklung in q (Picard-Iteration/Neumann-Reihe) und als Volterra-Integralgleichung. Daraus folgen (i) Existenz und Eindeutigkeit des Anfangswertproblems, (ii) analytische Abhängigkeit von λ und q (“entire” auf $\mathbb{C} \times L^2$) sowie (iii) die *Grundabschätzungen* (Theorem 7.1), die für große $|\lambda|$ die Nähe zu den freien Lösungen $\cos(\sqrt{\lambda}x)$ und $\sin(\sqrt{\lambda}x)/\sqrt{\lambda}$ quantitativ kontrollieren.

Zusammenfassung

Wir geben eine vollständige, selbsterklärende Rekonstruktion von Kapitel 1 in Pöschel–Trubowitz bis einschließlich Theorem 3 (“Basic Estimates”). Zentral sind: (a) die präzise Definition des Lösungsbegriffs bei $q \in L^2$, (b) die Green-Kern-Darstellung für die freie inhomogene Gleichung (Lemma 3.1), (c) die iterative Konstruktion der Fundamentallösungen als Potenzreihen in q inklusive expliziter Simplex-Integrale, (d) Uniformkonvergenz und Volterra-Integralgleichungen (Theorem 5.1), (e) analytische Abhängigkeit von λ und q , (f) Wronski-Identität und Variation der Konstanten (Theorem 6.4), (g) die Grundabschätzungen (Theorem 7.1).

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Einleitung und Struktur der Argumente | 3 |
| 1.1 | Ziel und Rahmen | 3 |
| 1.2 | Abhängigkeitsdiagramm | 3 |
| 2 | Präliminarien und der Lösungsbegriff | 4 |
| 2.1 | Die zugrunde liegenden Räume | 4 |
| 2.2 | Was heißt “Lösung”, wenn $q \in L^2$? | 4 |
| 2.3 | Notation c_λ und s_λ als ganze Funktionen in λ | 4 |
| 3 | Die freie Gleichung und die freie inhomogene Gleichung | 5 |
| 3.1 | Motivation: Potenzreihe in λ für $q = 0$ | 5 |
| 3.2 | Freie inhomogene Gleichung: Green-Kern für $q = 0$ | 7 |
| 4 | Potenzreihen in q: Konstruktion von y_1 und y_2 | 8 |
| 4.1 | Ansatz als Potenzreihe und Mehrlinearität | 8 |
| 4.2 | Bestimmung von C_0 und Rekursionsgleichung für C_n | 9 |
| 4.3 | Integralformel für C_n und für S_n | 10 |
| 5 | Konvergenz, Volterra-Integralgleichung und Theorem 1 | 11 |
| 5.1 | Vorbereitende Abschätzungen für c_λ und s_λ | 11 |
| 5.2 | Theorem 1: Konvergenz und Integralgleichungen | 11 |
| 6 | Analytizität, Wronskian und die allgemeine inhomogene Gleichung | 14 |
| 6.1 | Analytizitätseigenschaften | 14 |
| 6.2 | Wronskian-Identität | 14 |
| 6.3 | Variation der Konstanten: Theorem 2 und Darstellung von Lösungen | 15 |
| 7 | Theorem 3: Grundabschätzungen | 17 |
| 7.1 | Formulierung der Aussagen | 17 |
| 7.2 | Beweis der Abschätzungen | 17 |
| 7.3 | Kurze Übersichtstabelle der zentralen Abschätzungen | 20 |
| 8 | Schlussbemerkung | 21 |

1 Einleitung und Struktur der Argumente

1.1 Ziel und Rahmen

Wir untersuchen das Anfangswertproblem zur linearen ODE

$$-y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (1)$$

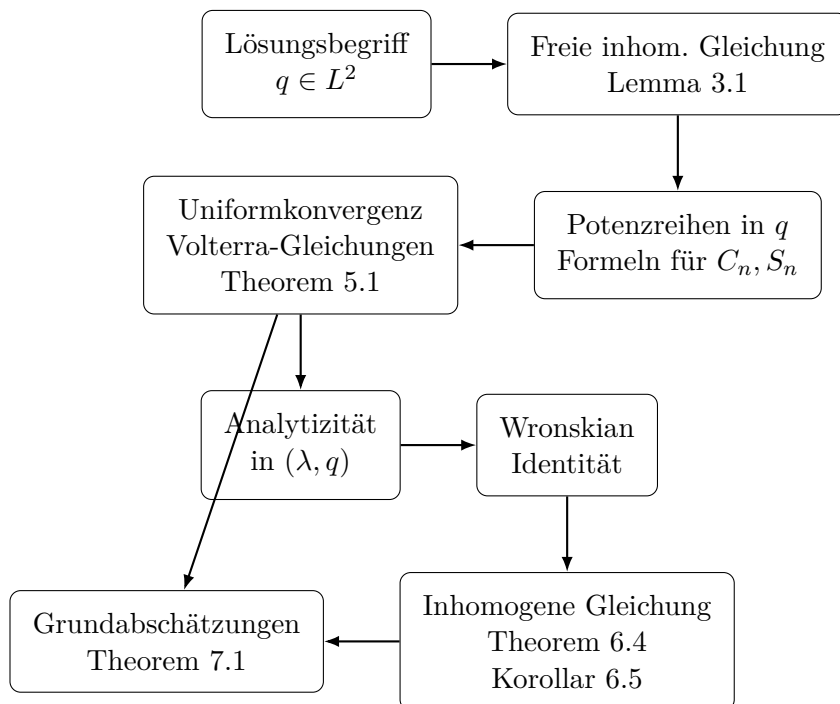
mit Parameter $\lambda \in \mathbb{C}$ und Koeffizient $q \in L^2([0, 1]; \mathbb{C})$. Das Ziel ist die Konstruktion zweier spezieller Lösungen y_1, y_2 mit Anfangsdaten bei $x = 0$ und der Nachweis, dass $\{y_1, y_2\}$ eine Fundamentallösung bildet, d. h. jede Lösung y lässt sich als

$$y(x) = y(0) y_1(x, \lambda, q) + y'(0) y_2(x, \lambda, q)$$

darstellen. Genau diese Aufgabenstellung (inkl. der Wahl komplexwertiger q in Kapitel 1) ist die Ausgangsbasis in Pöschel–Trubowitz.

1.2 Abhängigkeitsdiagramm

Die Beweiskette bis Theorem 3 ist kurz, aber sehr strukturiert:



Bemerkung 1.1. Der Originaltext kommentiert explizit, dass Theorem 5.1 in der Literatur als Picard-Iteration für eine Volterra-Integralgleichung vertraut ist, aber hier als Potenzreihenmethode in q formuliert wird, um die Abhängigkeit von q hervorzuheben.

2 Präliminarien und der Lösungsbegriff

2.1 Die zugrunde liegenden Räume

Wir arbeiten auf dem Intervall $[0, 1]$.

Definition 2.1 (Hilbertraum L^2). Wir schreiben

$$L_{\mathbb{C}}^2 := L^2([0, 1]; \mathbb{C})$$

für den komplexen Hilbertraum quadratintegrierbarer Funktionen, mit Skalarprodukt und Norm

$$\langle f, g \rangle := \int_0^1 f(t) \overline{g(t)} dt, \quad \|f\| := \sqrt{\langle f, f \rangle}. \quad (2)$$

Der reelle Unterraum wird als $L_{\mathbb{R}}^2 := L^2([0, 1]; \mathbb{R})$ notiert.

2.2 Was heißt “Lösung”, wenn $q \in L^2$?

Da q nur quadratintegrierbar ist, ist (1) a.e. sinnvoll. Wir fixieren daher (wie in Pöschel-Trubowitz) den folgenden Lösungsbegriff.

Definition 2.2 (Lösung von (1)). Eine Funktion $y : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *Lösung* von (1), wenn

- (i) y ist stetig differenzierbar, also $y \in C^1([0, 1])$,
- (ii) y' ist *absolut stetig* auf $[0, 1]$,
- (iii) die Gleichung (1) gilt für fast alle $x \in [0, 1]$.

Bemerkung 2.1 (Absolute Stetigkeit und Ableitungen). Wir benutzen die Standardtatsache: Ist u absolut stetig, so besitzt u eine Ableitung u' fast überall, $u' \in L^1$, und

$$u(x) = u(0) + \int_0^x u'(t) dt.$$

Umgekehrt ist $u(x) = \int_0^x v(t) dt$ für $v \in L^1$ absolut stetig und $u' = v$ fast überall. Diese Beziehung wird im Originaltext in einer Fußnote erinnert.

2.3 Notation c_λ und s_λ als ganze Funktionen in λ

In Kapitel 1 werden die Funktionen

$$c_\lambda(x) := \cos(\sqrt{\lambda}x), \quad s_\lambda(x) := \frac{\sin(\sqrt{\lambda}x)}{\sqrt{\lambda}}$$

verwendet. Wichtig ist: Obwohl $\sqrt{\lambda}$ mehrwertig ist, sind $c_\lambda(x)$ und $s_\lambda(x)$ als Funktionen von λ *ganze* (entire) Funktionen, weil sie Potenzreihen besitzen:

$$\cos(\sqrt{\lambda}x) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \lambda^n, \quad \frac{\sin(\sqrt{\lambda}x)}{\sqrt{\lambda}} = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \lambda^n. \quad (3)$$

Diese Reihenformeln stehen explizit im Abschnitt zu den Analytizitätseigenschaften.

Bemerkung 2.2 (Zur Größe $|\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}|$). In Abschätzungen tritt $|\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}|$ auf. Obwohl $\sqrt{\lambda}$ zwei Werte hat ($\pm\sqrt{\lambda}$), ist $|\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}|$ wohldefiniert, weil das Vorzeichenwechseln die Imaginärteilbeträge invariant lässt.

3 Die freie Gleichung und die freie inhomogene Gleichung

3.1 Motivation: Potenzreihe in λ für $q = 0$

Wir betrachten zunächst die freie Gleichung

$$-u'' = \lambda u, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad u(0) = 1, \quad u'(0) = 0.$$

Im Original wird dies als Warm-up für die spätere Potenzreihe in q gerechnet.

Beispiel 3.1 (Rekursion der Koeffizienten). Wir betrachten zunächst die freie Gleichung

$$-u'' = \lambda u, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

mit Anfangsbedingungen

$$u(0) = 1, \quad u'(0) = 0.$$

Da die Gleichung den Parameter λ nur algebraisch enthält, erwarten wir, dass die Lösung analytisch von λ abhängt. Wir suchen daher formal eine Potenzreihe in λ der Form

$$u(x, \lambda) = \sum_{n \geq 0} u_n(x) \lambda^n.$$

Dann ist nach zweimaligem Differenzieren nach x

$$u''(x, \lambda) = \sum_{n \geq 0} u_n''(x) \lambda^n.$$

Die Gleichung $-u'' = \lambda u$ wird zu

$$-\sum_{n \geq 0} u_n'' \lambda^n = \lambda \sum_{n \geq 0} u_n \lambda^n = \sum_{n \geq 0} u_n \lambda^{n+1}.$$

Nun schreiben wir die rechte Seite als Reihe in λ^n , indem wir den Index verschieben:

$$\sum_{n \geq 0} u_n \lambda^{n+1} = \sum_{n \geq 1} u_{n-1} \lambda^n.$$

Koeffizientenvergleich liefert:

$$-u_0'' = 0, \quad -u_n'' = u_{n-1} \quad (n \geq 1).$$

Aus $u(0, \lambda) = 1$ folgt

$$\sum_{n \geq 0} u_n(0) \lambda^n = 1 \Rightarrow u_0(0) = 1, \quad u_n(0) = 0 \quad (n \geq 1),$$

und analog aus $u'(0, \lambda) = 0$ erhält man

$$u_0'(0) = 0, \quad u_n'(0) = 0 \quad (n \geq 1).$$

Damit ist zunächst

$$u_0'' = 0, \quad u_0(0) = 1, \quad u_0'(0) = 0,$$

also

$$u_0(x) = 1.$$

Für $n \geq 1$ gilt aus dem Koeffizientenvergleich

$$-u_n'' = u_{n-1}.$$

Wir integrieren diese Gleichung zweimal unter Verwendung der Anfangsbedingungen $u_n(0) = 0$ und $u'_n(0) = 0$: Erste Integration:

$$u'_n(x) - u'_n(0) = - \int_0^x u_{n-1}(s) ds,$$

also wegen $u'_n(0) = 0$

$$u'_n(x) = - \int_0^x u_{n-1}(s) ds.$$

Zweite Integration:

$$u_n(x) - u_n(0) = - \int_0^x \left(\int_0^t u_{n-1}(s) ds \right) dt,$$

und wegen $u_n(0) = 0$ folgt

$$u_n(x) = - \int_0^x \int_0^t u_{n-1}(s) ds dt.$$

Nun zeigen wir induktiv:

$$u_n(x) = \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}.$$

Induktionsanfang:

$$u_0(x) = 1 = \frac{(-1)^0}{0!} x^0.$$

Induktionsschritt: Angenommen

$$u_{n-1}(s) = \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-2)!} s^{2n-2}.$$

Einsetzen in die Integralformel ergibt

$$u_n(x) = - \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-2)!} \int_0^x \int_0^t s^{2n-2} ds dt.$$

Inneres Integral:

$$\int_0^t s^{2n-2} ds = \frac{t^{2n-1}}{2n-1}.$$

Äußeres Integral:

$$\int_0^x \frac{t^{2n-1}}{2n-1} dt = \frac{x^{2n}}{(2n-1)(2n)}.$$

Zusammen ergibt sich

$$u_n(x) = \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}.$$

Damit folgt schließlich

$$u(x, \lambda) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \lambda^n = \cos(\sqrt{\lambda} x).$$

Genau diese Rechnung erscheint im Buch; sie motiviert die iterative Bestimmung von Koeffizienten über inhomogene Gleichungen bei "Parameter = 0".

3.2 Freie inhomogene Gleichung: Green-Kern für $q = 0$

Lemma 3.1 (Freie inhomogene Gleichung). Seien $f \in L^2_{\mathbb{C}}$ und $a, b \in \mathbb{C}$. Dann besitzt die inhomogene Gleichung

$$-y'' = \lambda y - f(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (4)$$

mit Anfangsbedingungen $y(0) = a$, $y'(0) = b$ genau eine Lösung im Sinne von Definition 2.2. Sie hat die Form

$$y(x) = a c_{\lambda}(x) + b s_{\lambda}(x) + \int_0^x s_{\lambda}(x-t) f(t) dt, \quad (5)$$

wobei $c_{\lambda}(x) = \cos(\sqrt{\lambda}x)$ und $s_{\lambda}(x) = \sin(\sqrt{\lambda}x)/\sqrt{\lambda}$.

Beweis. Wir zerlegen den Beweis in (i) Konstruktion einer partikulären Lösung, (ii) Erfüllung der Anfangsbedingungen, (iii) Nachweis der DGL, (iv) Eindeutigkeit.

(i) Partikuläre Lösung. Setze

$$y_f(x) := \int_0^x s_{\lambda}(x-t) f(t) dt.$$

Wir zeigen zunächst, dass y_f die richtige Regularität besitzt. Dafür benutzen wir die Additionstheorie der Sinusfunktion:

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta.$$

Mit $\alpha = \sqrt{\lambda}x$ und $\beta = \sqrt{\lambda}t$ folgt

$$s_{\lambda}(x-t) = \frac{\sin(\sqrt{\lambda}(x-t))}{\sqrt{\lambda}} = s_{\lambda}(x)c_{\lambda}(t) - c_{\lambda}(x)s_{\lambda}(t).$$

Damit

$$y_f(x) = s_{\lambda}(x) \int_0^x c_{\lambda}(t) f(t) dt - c_{\lambda}(x) \int_0^x s_{\lambda}(t) f(t) dt.$$

Nun sind $c_{\lambda}f$ und $s_{\lambda}f$ integrierbar (sogar in L^1), weil c_{λ} und s_{λ} stetig und damit beschränkt auf $[0, 1]$ sind, und $f \in L^2$ auf einem endlichen Intervall insbesondere in L^1 liegt (Cauchy-Schwarz: $\int_0^1 |f| \leq \|f\|$). Also sind die beiden Integrale als Funktionen von x absolut stetig, und damit ist y_f als Linearkombination absolut stetiger Funktionen ebenfalls absolut stetig.

(ii) Ableitung von y_f . Da y_f absolut stetig ist, existiert y'_f fast überall. Wir dürfen in der Darstellung

$$y_f(x) = \int_0^x s_{\lambda}(x-t) f(t) dt$$

nach dem Fundamentalsatz der Analysis für Parameterintegrale (in der Form der Leibniz-Regel für absolut stetige Integrale) differenzieren: Formal wäre

$$y'_f(x) = s_{\lambda}(0) f(x) + \int_0^x \partial_x s_{\lambda}(x-t) f(t) dt.$$

Da $s_{\lambda}(0) = 0$ und $\partial_x s_{\lambda}(x-t) = c_{\lambda}(x-t)$, ergibt sich

$$y'_f(x) = \int_0^x c_{\lambda}(x-t) f(t) dt \quad \text{für fast alle } x.$$

Im Buch wird ein äquivalenter Weg über die oben genutzte Additionstheorie und die Stetigkeit der rechten Seite gewählt und dann argumentiert: wenn u absolut stetig ist und die a.e.-Ableitung mit einer stetigen Funktion übereinstimmt, dann ist $u \in C^1$ und die Ableitung gilt überall. Genau diese Standardtatsache wird dort als Fußnote erläutert. Damit folgt hier: $y'_f \in C^0([0, 1])$ und daher $y_f \in C^1([0, 1])$.

(iii) Zweite Ableitung und DGL. Differenzieren wir noch einmal, erhalten wir (wieder zunächst a.e.)

$$y_f''(x) = c_\lambda(0)f(x) + \int_0^x \partial_x c_\lambda(x-t)f(t) dt = f(x) + \int_0^x (-\lambda)s_\lambda(x-t)f(t) dt,$$

denn $c_\lambda(0) = 1$ und $c_\lambda'(u) = -\lambda s_\lambda(u)$ (dies ist eine direkte Rechnung aus $c_\lambda(u) = \cos(\sqrt{\lambda}u)$ und $s_\lambda(u) = \sin(\sqrt{\lambda}u)/\sqrt{\lambda}$). Also

$$-y_f''(x) = \lambda \int_0^x s_\lambda(x-t)f(t) dt - f(x) = \lambda y_f(x) - f(x)$$

für fast alle x . Damit ist y_f eine partikuläre Lösung von (4) mit

$$y_f(0) = 0, \quad y_f'(0) = 0$$

(da die Integrale bei $x = 0$ verschwinden).

(iv) Anfangsbedingungen und Gesamtformel. Die Funktionen c_λ und s_λ lösen die homogene Gleichung $-y'' = \lambda y$ (klassisch; auch direkt aus (3)). Damit ist

$$y(x) := a c_\lambda(x) + b s_\lambda(x) + y_f(x)$$

eine Lösung von (4). Wegen $c_\lambda(0) = 1$, $c_\lambda'(0) = 0$, $s_\lambda(0) = 0$, $s_\lambda'(0) = 1$ erfüllt y die Anfangsbedingungen $y(0) = a$, $y'(0) = b$.

(v) Eindeutigkeit. Seien y, \tilde{y} zwei Lösungen von (4) mit denselben Anfangsdaten. Dann erfüllt $v := y - \tilde{y}$ die homogene Gleichung

$$-v'' = \lambda v, \quad v(0) = 0, \quad v'(0) = 0.$$

Wir zeigen $v \equiv 0$: Multipliziere die Gleichung mit \bar{v} und integriere von 0 bis x . Alternativ (und elementarer) benutzen wir, dass die homogene Gleichung zweidimensionalen Lösungsraum hat und v bereits durch Anfangsdaten bestimmt ist: Aus $v(0) = 0$, $v'(0) = 0$ folgt, dass die Koeffizienten in der Darstellung $v = \alpha c_\lambda + \beta s_\lambda$ Null sind. Damit $v \equiv 0$. Somit $y = \tilde{y}$. Dies schließt den Beweis. \square

4 Potenzreihen in q : Konstruktion von y_1 und y_2

4.1 Ansatz als Potenzreihe und Mehrlinearität

Die Fundamentallösungen sollen als Funktionen dreier Variablen (x, λ, q) betrachtet werden. Der Schlüsselgedanke ist: Wir entwickeln in Potenzen von q .

Definition 4.1 (n -homogene Terme und Symmetrisierung). Wir schreiben formal

$$y_1(x, \lambda, q) = C_0(x, \lambda) + \sum_{n \geq 1} C_n(x, \lambda, q),$$

Wir betrachten die Abbildung

$$q \longmapsto y(x, \lambda, q),$$

wobei y die Lösung der Gleichung

$$-y'' + qy = \lambda y$$

mit festen Anfangsbedingungen ist. Die Gleichung kann geschrieben werden als

$$L_\lambda y = qy, \quad L_\lambda := -\frac{d^2}{dx^2} - \lambda.$$

Für $q = 0$ besitzt das Anfangswertproblem eine eindeutig bestimmte Lösung $y_0(x, \lambda)$. Differenziert man die Gleichung nach q in Richtung $h \in L_{\mathbb{C}}^2$, so erhält man

$$L_{\lambda}(Dy(q)h) = h y(q).$$

Insbesondere bei $q = 0$ gilt

$$L_{\lambda}(Dy(0)h) = h y_0.$$

Damit ist $Dy(0)$ linear in h . Durch wiederholtes Differenzieren erhält man allgemein

$$L_{\lambda}(D^n y(0)(h_1, \dots, h_n)) = \sum_{\text{Perm.}} h_1 \cdots h_n y_0,$$

woraus folgt, dass $D^n y(0)$ eine n -lineare, symmetrische Abbildung ist. Da jede dieser Gleichungen durch zweimaliges Integrieren auf dem festen Intervall $[0, 1]$ gelöst wird, erhält man Abschätzungen der Form

$$|D^n y(0)(h_1, \dots, h_n)| \leq C_{\lambda} \|h_1\|_{L^2} \cdots \|h_n\|_{L^2}.$$

Somit ist $D^n y(0)$ beschränkt. Wir definieren daher

$$C_n(x, \lambda, q) = \frac{1}{n!} D^n y(0)(q, \dots, q),$$

so dass $C_n(x, \lambda, \cdot)$ ein n -homogenes Polynom auf $L_{\mathbb{C}}^2$ ist. Präzise existiert eine beschränkte, n -lineare, symmetrische Abbildung

$$\tilde{C}_n(x, \lambda; \cdot, \dots, \cdot) : (L_{\mathbb{C}}^2)^n \rightarrow \mathbb{C},$$

mit

$$C_n(x, \lambda, q) = \tilde{C}_n(x, \lambda; q, \dots, q).$$

4.2 Bestimmung von C_0 und Rekursionsgleichung für C_n

Setzt man $q = 0$ in (1), erhält man die freie Gleichung $-y'' = \lambda y$ und damit (mit Anfangsdaten von y_1)

$$C_0(x, \lambda) = c_{\lambda}(x) = \cos(\sqrt{\lambda}x).$$

Nun kommt der Schritt, den das Buch als "formal" bezeichnet:

Bemerkung 4.1 (Warum keine Kettenregel in q ?). q ist hier eine unabhängige Variable in einem unendlichdimensionalen Raum und *nicht* eine Funktion von x . Wenn man nach x differenziert, wird q nicht abgeleitet. Das ist genau der Sinn der Entwicklung in q ; im Buch wird dazu ein kurzes Gegenbeispiel notiert.

Formal differenzieren wir die Reihe $y_1 = \sum_{n \geq 0} C_n$ zweimal nach x :

$$y_1'' = \sum_{n \geq 0} C_n''.$$

Setzen wir in (1) ein:

$$-\sum_{n \geq 0} C_n'' + q \sum_{n \geq 0} C_n = \lambda \sum_{n \geq 0} C_n.$$

Ordnen wir nach Homogenitätsgrad in q : Der Term qC_{n-1} ist n -homogen, ebenso λC_n und $-C_n''$. Daher ergibt sich für $n \geq 1$

$$-C_n'' = \lambda C_n - qC_{n-1}. \quad (6)$$

Dies ist genau die Rekursions-DGL in Pöschel-Trubowitz. Die Anfangsbedingungen für C_n sind

$$C_n(0, \lambda, q) = 0, \quad C_n'(0, \lambda, q) = 0 \quad (n \geq 1). \quad (7)$$

Warum folgt das? Weil $y_1(0, \lambda, q) = 1$ und $y_1'(0, \lambda, q) = 0$ unabhängig von q sind. Wie im Buch kann man dies sauber durch Skalierung argumentieren:

Bemerkung 4.2 (Begründung von (7) via Skalierung). Setze $q_t := tq$. Dann ist

$$y_1(0, \lambda, q_t) = 1 \quad \text{für alle } t \in \mathbb{C}.$$

Andererseits ist

$$y_1(0, \lambda, q_t) = C_0(0, \lambda) + \sum_{n \geq 1} C_n(0, \lambda, q_t) = 1 + \sum_{n \geq 1} t^n C_n(0, \lambda, q).$$

Die Potenzreihe $\sum_{n \geq 1} t^n C_n(0, \lambda, q)$ ist identisch Null, also müssen alle Koeffizienten $C_n(0, \lambda, q)$ verschwinden. Analog für $y_1'(0, \lambda, q_t) = 0$ erhält man $C_n'(0, \lambda, q) = 0$.

4.3 Integralformel für C_n und für S_n

Gleichung (6) ist eine *inhomogene* freie Gleichung der Form (4) mit Inhomogenität $f = qC_{n-1}$ und Anfangsdaten $0, 0$. Lemma 3.1 liefert daher für $n \geq 1$:

$$C_n(x, \lambda, q) = \int_0^x s_\lambda(x-t) q(t) C_{n-1}(t, \lambda, q) dt. \quad (8)$$

Aus (8) folgen durch Einsetzen und Iteration die ‘‘Simplexformeln’’ (im Buch explizit als (2) und (3) notiert).

Lemma 4.2 (Simplexformeln). Für $n \geq 1$ gilt

$$C_n(x, \lambda, q) = \int_{0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq x} c_\lambda(t_1) \prod_{i=1}^n (s_\lambda(t_{i+1} - t_i) q(t_i)) dt_1 \cdots dt_n, \quad (9)$$

wobei wir $t_{n+1} := x$ setzen. Außerdem gilt für y_2 :

$$S_n(x, \lambda, q) = \int_{0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq x} s_\lambda(t_1) \prod_{i=1}^n (s_\lambda(t_{i+1} - t_i) q(t_i)) dt_1 \cdots dt_n. \quad (10)$$

Damit

$$y_1(x, \lambda, q) = c_\lambda(x) + \sum_{n \geq 1} C_n(x, \lambda, q), \quad y_2(x, \lambda, q) = s_\lambda(x) + \sum_{n \geq 1} S_n(x, \lambda, q).$$

Beweis. Wir beweisen (9); (10) ist identisch. Für $n = 1$ ergibt (8) und $C_0(t, \lambda) = c_\lambda(t)$:

$$C_1(x, \lambda, q) = \int_0^x s_\lambda(x-t_1) q(t_1) c_\lambda(t_1) dt_1,$$

was genau (9) für $n = 1$ ist. Angenommen, (9) gilt für $n - 1$. Dann ist nach (8)

$$C_n(x, \lambda, q) = \int_0^x s_\lambda(x-t_n) q(t_n) C_{n-1}(t_n, \lambda, q) dt_n.$$

Setzen wir nun die Induktionsannahme für $C_{n-1}(t_n, \lambda, q)$ ein. Dabei ist wichtig: In (9) ersetzt man x durch t_n , d. h. t_n übernimmt die Rolle des ‘‘oberen’’ Randes. So erhält man

$$C_{n-1}(t_n, \lambda, q) = \int_{0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{n-1} \leq t_n} c_\lambda(t_1) \prod_{i=1}^{n-1} (s_\lambda(t_{i+1} - t_i) q(t_i)) dt_1 \cdots dt_{n-1},$$

wobei $t_n := t_n$ nun die obere Grenze ist (ein kleiner, aber entscheidender Notationspunkt).
Damit

$$C_n(x, \lambda, q) = \int_0^x \left[s_\lambda(x-t_n) q(t_n) \int_{0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{n-1} \leq t_n} (\dots) dt_1 \cdots dt_{n-1} \right] dt_n.$$

Durch Tonelli (alles nichtnegativ nach Betrag, bzw. absolut integrierbar durch die späteren Abschätzungen) dürfen wir die Integrale als Integral über den Simplex $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq x$ schreiben und erhalten genau (9). \square

5 Konvergenz, Volterra-Integralgleichung und Theorem 1

5.1 Vorbereitende Abschätzungen für c_λ und s_λ

Aus der Exponentialdarstellung $\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$ folgt für $z = \sqrt{\lambda}x$:

$$\left| \cos(\sqrt{\lambda}x) \right| \leq \frac{1}{2} \left(\left| e^{i\sqrt{\lambda}x} \right| + \left| e^{-i\sqrt{\lambda}x} \right| \right) = \frac{1}{2} (e^{-\operatorname{Im}(\sqrt{\lambda})x} + e^{\operatorname{Im}(\sqrt{\lambda})x}) \leq e^{|\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}|x}.$$

Dies ist exakt die “elementary inequality” im Buch.

Zweitens verwenden wir die Identität $s_\lambda(x) = \int_0^x c_\lambda(t) dt$ (gültig als ganze Identität in λ , z. B. über Potenzreihen). Dann für $0 \leq x \leq 1$:

$$|s_\lambda(x)| = \left| \int_0^x c_\lambda(t) dt \right| \leq \int_0^x |c_\lambda(t)| dt \leq \int_0^x e^{|\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}|t} dt \leq \int_0^x e^{|\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}|x} dt = x e^{|\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}|x} \leq e^{|\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}|x}.$$

Auch dies entspricht der Abschätzung im Buch.

5.2 Theorem 1: Konvergenz und Integralgleichungen

Theorem 5.1 (Uniformkonvergenz, Integralgleichung, Grundabschätzung). *Die formalen Potenzreihen für $y_1(x, \lambda, q)$ und $y_2(x, \lambda, q)$ mit Koeffizienten (9) und (10) konvergieren uniform auf beschränkten Teilmengen von $[0, 1] \times \mathbb{C} \times L_C^2$ und definieren dort die eindeutigen Lösungen von*

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

mit Anfangsbedingungen

$$y_1(0, \lambda, q) = 1, \quad y_1'(0, \lambda, q) = 0, \quad y_2(0, \lambda, q) = 0, \quad y_2'(0, \lambda, q) = 1.$$

Außerdem erfüllen sie die Volterra-Integralgleichungen

$$y_1(x, \lambda, q) = c_\lambda(x) + \int_0^x s_\lambda(x-t) q(t) y_1(t, \lambda, q) dt, \quad (11)$$

$$y_2(x, \lambda, q) = s_\lambda(x) + \int_0^x s_\lambda(x-t) q(t) y_2(t, \lambda, q) dt, \quad (12)$$

sowie die Abschätzung

$$|y_1(x, \lambda, q)|, |y_2(x, \lambda, q)| \leq \exp\left(|\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}|x + \|q\| \sqrt{x}\right). \quad (13)$$

Beweis. Wir beweisen alles für y_1 ; für y_2 ist es analog (und im Buch ebenfalls so organisiert).

Schritt 1: Majorante für C_n . Aus der Simplexformel (9) folgt

$$|C_n(x, \lambda, q)| \leq \int_{0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq x} |c_\lambda(t_1)| \prod_{i=1}^n \left(|s_\lambda(t_{i+1} - t_i)| |q(t_i)| \right) dt_1 \cdots dt_n,$$

mit $t_{n+1} = x$. Jetzt benutzen wir die *entscheidende* (im Buch nicht ausgeschriebene) Beobachtung:

$$|c_\lambda(t_1)| \leq e^{|\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}|t_1}, \quad |s_\lambda(t_{i+1} - t_i)| \leq e^{|\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}|(t_{i+1} - t_i)},$$

und daher

$$|c_\lambda(t_1)| \prod_{i=1}^n |s_\lambda(t_{i+1} - t_i)| \leq \exp\left(|\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}| \left(t_1 + \sum_{i=1}^n (t_{i+1} - t_i) \right)\right) = \exp\left(|\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}|x\right).$$

Hier teleskopiert die Summe $\sum_{i=1}^n (t_{i+1} - t_i) = t_{n+1} - t_1 = x - t_1$ und hebt t_1 genau auf, so dass am Ende *nur* x übrig bleibt. Dies erklärt, warum im Buch nicht ein Faktor $e^{n|\Im\sqrt{\lambda}|x}$ entsteht. Damit erhalten wir die Majorante

$$|C_n(x, \lambda, q)| \leq e^{|\Im\sqrt{\lambda}|x} \int_{0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq x} \prod_{i=1}^n |q(t_i)| dt_1 \cdots dt_n.$$

Schritt 2: Simplex–Würfel und der Faktor $1/n!$. Der Integrand $\prod_{i=1}^n |q(t_i)|$ ist symmetrisch in (t_1, \dots, t_n) . Betrachte den Würfel $[0, x]^n$. Er zerfällt (bis auf Nullmengen) in $n!$ disjunkte Bereiche, die durch die Ordnungen der Koordinaten gegeben sind. Einer dieser Bereiche ist der Simplex

$$\Delta_n(x) := \{(t_1, \dots, t_n) \in [0, x]^n : 0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq x\}.$$

Da der Integrand symmetrisch ist, haben alle $n!$ Bereiche denselben Integralwert. Daher

$$\int_{\Delta_n(x)} \prod_{i=1}^n |q(t_i)| dt_1 \cdots dt_n = \frac{1}{n!} \int_{[0, x]^n} \prod_{i=1}^n |q(t_i)| dt_1 \cdots dt_n.$$

Da $q \in L^2(0, 1)$ gilt insbesondere $q \in L^1(0, 1)$. Somit ist $|q|$ integrierbar auf $[0, x]$. Der Integrand

$$(t_1, \dots, t_n) \mapsto \prod_{i=1}^n |q(t_i)|$$

ist messbar und nichtnegativ auf $[0, x]^n$. Daher ist er integrierbar und wir dürfen nach dem Satz von Tonelli (bzw. Fubini) iteriert integrieren.

Wegen der Produktstruktur zerfällt das Integral als Produkt der eindimensionalen Integrale:

$$\int_{[0, x]^n} \prod_{i=1}^n |q(t_i)| dt_1 \cdots dt_n = \prod_{i=1}^n \left(\int_0^x |q(t_i)| dt_i \right).$$

Da alle Faktoren identisch sind, folgt

$$= \left(\int_0^x |q(t)| dt \right)^n.$$

Damit

$$\int_{\Delta_n(x)} \prod_{i=1}^n |q(t_i)| dt_1 \cdots dt_n = \frac{1}{n!} \left(\int_0^x |q(t)| dt \right)^n.$$

Schritt 3: Cauchy–Schwarz in L^2 . Aus Cauchy–Schwarz folgt

$$\int_0^x |q(t)| dt \leq \left(\int_0^x 1^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_0^x |q(t)|^2 dt \right)^{1/2} = \sqrt{x} \|q\|_{L^2(0, x)} \leq \sqrt{x} \|q\|.$$

Damit erhalten wir schließlich

$$|C_n(x, \lambda, q)| \leq \frac{1}{n!} \exp\left(|\Im\sqrt{\lambda}|x\right) (\|q\| \sqrt{x})^n. \quad (14)$$

Genau diese Ungleichung steht (in knapper Form) im Buch.

Schritt 4: Uniformkonvergenz (Weierstraß-M-Test). Fixiere eine beschränkte Menge $B \subset [0, 1] \times \mathbb{C} \times L^2_{\mathbb{C}}$. Dann ist $x \in [0, 1]$ und $\|q\|$ durch eine Konstante M nach oben beschränkt, und auch $|\Im\sqrt{\lambda}|$ ist auf der Projektion auf λ beschränkt. Daher gibt es Konstanten $A, M > 0$, so dass für alle $(x, \lambda, q) \in B$

$$|C_n(x, \lambda, q)| \leq \frac{1}{n!} e^A (M)^n.$$

Die Reihe $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!} e^A M^n = e^A (e^M - 1)$ konvergiert. Also konvergiert $\sum_{n \geq 1} C_n$ absolut und gleichmäßig auf B . Damit ist y_1 als Grenzwert stetig.

Schritt 5: Abschätzung (13). Aus (14) folgt

$$|y_1(x, \lambda, q)| \leq |c_\lambda(x)| + \sum_{n \geq 1} |C_n(x, \lambda, q)| \leq e^{|\Im \sqrt{\lambda}|x} + \exp(|\Im \sqrt{\lambda}|x) \sum_{n \geq 1} \frac{(\|q\| \sqrt{x})^n}{n!} = \exp(|\Im \sqrt{\lambda}|x) \exp(\|q\| \sqrt{x}),$$

$$\text{also } |y_1(x, \lambda, q)| \leq \exp(|\Im \sqrt{\lambda}|x + \|q\| \sqrt{x}).$$

Schritt 6: Herleitung der Integralgleichung (11). Aus (8) folgt

$$\sum_{n \geq 1} C_n(x, \lambda, q) = \sum_{n \geq 1} \int_0^x s_\lambda(x-t) q(t) C_{n-1}(t, \lambda, q) dt.$$

Wegen der in Schritt 4 gezeigten *uniformen* und *absoluten* Konvergenz auf beschränkten Mengen dürfen wir Summation und Integration vertauschen (Standardlemma: bei gleichmäßiger Konvergenz und dominierbarer Majorante folgt $\int \sum = \sum \int$). Damit

$$\sum_{n \geq 1} C_n(x, \lambda, q) = \int_0^x s_\lambda(x-t) q(t) \left(\sum_{n \geq 1} C_{n-1}(t, \lambda, q) \right) dt = \int_0^x s_\lambda(x-t) q(t) y_1(t, \lambda, q) dt.$$

Zusammen mit $y_1 = c_\lambda + \sum_{n \geq 1} C_n$ ist (11) gezeigt. Dies ist genau der Rechenschritt auf der entsprechenden Buchseite.

Schritt 7: y_1 löst die DGL und erfüllt Anfangsdaten. Gleichung (11) hat die Form (5) aus Lemma 3.1 mit $a = 1$, $b = 0$ und Inhomogenität $f(t) = q(t)y_1(t, \lambda, q)$. Damit ist y_1 im Sinne von Definition 2.2 eine Lösung von $-y'' = \lambda y - qy$, also von (1). Die Anfangsbedingungen folgen aus $\int_0^0(\dots) = 0$ und $c_\lambda(0) = 1$, $c'_\lambda(0) = 0$.

Schritt 8: Eindeutigkeit (detailliert). Seien y_1 und \tilde{y}_1 zwei Lösungen von (1) mit denselben Anfangsdaten $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. Wir zeigen $y_1 = \tilde{y}_1$. Setze $v := y_1 - \tilde{y}_1$. Dann erfüllt $v(0) = v'(0) = 0$ und (durch Subtraktion der Integralgleichungen) die homogene Volterra-Gleichung

$$v(x) = \int_0^x s_\lambda(x-t) q(t) v(t) dt.$$

Cauchy-Schwarz liefert

$$|v(x)|^2 \leq \left(\int_0^x |s_\lambda(x-t)q(t)|^2 dt \right) \left(\int_0^x |v(t)|^2 dt \right).$$

Nun ist $|s_\lambda(x-t)| \leq \max_{0 \leq s \leq 1} |s_\lambda(s)| =: M_\lambda < \infty$, also

$$\int_0^x |s_\lambda(x-t)q(t)|^2 dt \leq M_\lambda^2 \int_0^x |q(t)|^2 dt \leq M_\lambda^2 \|q\|^2.$$

Setze $c := M_\lambda^2 \|q\|^2$. Dann

$$|v(x)|^2 \leq c \int_0^x |v(t)|^2 dt.$$

Definiere $F(x) := \int_0^x |v(t)|^2 dt$. Dann F ist nichtnegativ, absolut stetig und $F'(x) = |v(x)|^2$ für fast alle x . Also gilt a.e.

$$F'(x) \leq cF(x).$$

Damit folgt a.e.

$$\frac{d}{dx}(e^{-cx}F(x)) = e^{-cx}(F'(x) - cF(x)) \leq 0.$$

Somit ist $e^{-cx}F(x)$ monoton fallend. Da $F(0) = 0$, ist $e^{-cx}F(x) \leq 0$ für alle x , aber gleichzeitig ≥ 0 . Also $F(x) = 0$ für alle x , damit $v = 0$ fast überall und wegen Stetigkeit sogar überall. Also $y_1 = \tilde{y}_1$. Genau dies ist der “nonpositive derivative”-Schritt im Buch, hier vollständig ausgeschrieben. Damit ist Theorem 5.1 für y_1 bewiesen. \square

6 Analytizität, Wronskian und die allgemeine inhomogene Gleichung

6.1 Analytizitätseigenschaften

Im Buch folgt nach Theorem 5.1 die Aussage, dass y_j und y_j' für festes x ganze Funktionen auf $\mathbb{C} \times L_{\mathbb{C}}^2$ sind und dass $y_j(\cdot, \lambda, q)$ analytisch als Abbildung in einen Sobolevraum $H_{\mathbb{C}}^2$ ist. Wir geben eine selbsterklärende Version.

Theorem 6.1 (Analytizitätseigenschaften). (a) Für jedes $x \in [0, 1]$ sind

$$(\lambda, q) \mapsto y_j(x, \lambda, q), \quad (\lambda, q) \mapsto y_j'(x, \lambda, q) \quad (j = 1, 2)$$

ganze Funktionen auf $\mathbb{C} \times L_{\mathbb{C}}^2$ und für $\lambda \in \mathbb{R}$, $q \in L_{\mathbb{R}}^2$ reellwertig.

(b) Als Abbildungen

$$(\lambda, q) \mapsto y_j(\cdot, \lambda, q) \in H_{\mathbb{C}}^2([0, 1])$$

sind y_j analytisch auf $\mathbb{C} \times L_{\mathbb{C}}^2$.

Beweis. Wir skizzieren die Logik, aber schreiben die zwei Hauptpunkte explizit aus.

Zu (a): Fixiere x . Jeder Term $C_n(x, \lambda, q)$ ist ein stetiges, n -homogenes Polynom in q (weil er durch ein n -faches Integral eines Produktes $q(t_1) \cdots q(t_n)$ mit beschränktem Kern gegeben ist). Außerdem ist der Kern als Funktion von λ ganze Funktion, da c_λ und s_λ ganze Funktionen in λ sind (Potenzreihen (3)). Somit ist jeder einzelne Term $C_n(x, \lambda, q)$ ganz in (λ, q) . Da die Reihe $\sum_{n \geq 0} C_n$ auf beschränkten Mengen gleichmäßig konvergiert (Theorem 5.1), ist das Summenlimit $y_1(x, \lambda, q)$ wieder ganz in (λ, q) (Weierstraßscher Konvergenzsatz für Potenzreihen/gleichmäßige Grenzwerte ganzer Funktionen). Für y_1' benutzen wir die im Buch angegebene Ableitungsformel, die man aus (11) gewinnt:

$$y_1'(x, \lambda, q) = -\sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda}x) + \int_0^x \cos(\sqrt{\lambda}(x-t)) q(t) y_1(t, \lambda, q) dt.$$

Diese Gleichung steht dort explizit und zeigt: ist y_1 ganz in (λ, q) , dann ist es auch y_1' (Integral eines Produkts aus ganzem Kern und ganzem Integranden; auf $[0, 1]$ ist die Integrationsabbildung linear und stetig). Die Reellwertigkeit folgt aus Konjugationsinvarianz der Gleichung: Für reelles λ und reelles q gilt \bar{y} löst dieselbe Gleichung wie y . Da die Anfangsdaten reell sind, erzwingt Eindeutigkeit $\bar{y}_j = y_j$.

Zu (b): Wir müssen zeigen, dass $(\lambda, q) \mapsto y_1(\cdot, \lambda, q)$ als *Banachraum-wertige* Abbildung analytisch ist. Das Buch argumentiert so: Zunächst ist jeder Term C_n als Abbildung in den Banachraum $C([0, 1]; \mathbb{C})$ (Supremumsnorm) analytisch; für die Reihe folgt Analytizität aus gleichmäßiger Konvergenz auf beschränkten Mengen; dann ist Analytizität in L^2 automatisch, weil $\|\cdot\|_\infty$ stärker ist als $\|\cdot\|_{L^2}$. Schließlich erhält man die zweite Ableitung aus der Differentialgleichung

$$y_1'' = (q - \lambda)y_1,$$

was wiederum analytisch ist (Produkt von $q \in L^2$ mit $y_1 \in C^0$ liegt in L^2 und die Multiplikation ist bilinear-stetig). Damit liegt y_1 in H^2 und hängt analytisch ab. Diese Argumentkette ist im Buch in wenigen Zeilen notiert; hier ist die entscheidende Stetigkeit expliziert. \square

6.2 Wronskian-Identität

Definition 6.2 (Wronskian). Für differenzierbare Funktionen f, g definieren wir den Wronskian

$$[f, g](x) := \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix} = f(x)g'(x) - f'(x)g(x).$$

Theorem 6.3 (Wronskian-Identität). *Für die Fundamentallösungen y_1, y_2 gilt*

$$[y_1, y_2](x) = 1 \quad \text{für alle } x \in [0, 1].$$

Insbesondere ist die Fundamentalmatrix

$$\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{C}) \quad \text{für jedes } x.$$

Beweis. Wir setzen $W(x) := [y_1, y_2](x) = y_1 y_2' - y_1' y_2$. Dann existiert $W'(x)$ fast überall, weil y_1', y_2' absolut stetig sind. Differenzieren:

$$W'(x) = y_1'(x)y_2'(x) + y_1(x)y_2''(x) - y_1''(x)y_2(x) - y_1'(x)y_2'(x) = y_1(x)y_2''(x) - y_1''(x)y_2(x).$$

Da y_j (1) lösen, gilt a.e.

$$y_j'' = (q - \lambda)y_j.$$

Also

$$W'(x) = y_1(x)(q(x) - \lambda)y_2(x) - (q(x) - \lambda)y_1(x)y_2(x) = 0$$

fast überall. Also ist W konstant (eine absolut stetige Funktion mit a.e.-Ableitung 0 ist konstant). Nun $W(0) = y_1(0)y_2'(0) - y_1'(0)y_2(0) = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1$. Daher $W(x) \equiv 1$. Genau diese Rechnung steht im Buch, allerdings ohne die explizite Bemerkung “absolutely continuous \Rightarrow a.e.-Ableitung”; wir haben sie hier ergänzt. \square

6.3 Variation der Konstanten: Theorem 2 und Darstellung von Lösungen

Theorem 6.4 (Allgemeine inhomogene Gleichung). *Seien $f \in L^2_{\mathbb{C}}$ und $a, b \in \mathbb{C}$. Dann besitzt die inhomogene Gleichung*

$$-y'' + q(x)y = \lambda y - f(x), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

mit Anfangsbedingungen $y(0) = a, y'(0) = b$ genau eine Lösung. Sie ist gegeben durch

$$y(x) = a y_1(x, \lambda, q) + b y_2(x, \lambda, q) + \int_0^x (y_1(t)y_2(x) - y_1(x)y_2(t)) f(t) dt. \quad (15)$$

Beweis. Im Buch steht: “The proof is the same as that of Lemma 1”; wir führen die Standard-Variation-der-Konstanten vollständig aus.

Schritt 1: Ansatz. Wir suchen y in der Form

$$y(x) = u(x)y_1(x) + v(x)y_2(x),$$

wobei u, v (zunächst) absolut stetig zu wählen sind. Dann

$$y'(x) = u'(x)y_1(x) + u(x)y_1'(x) + v'(x)y_2(x) + v(x)y_2'(x).$$

Um y'' einfach zu halten, impose man die Nebenbedingung

$$u'(x)y_1(x) + v'(x)y_2(x) = 0. \quad (16)$$

Dann vereinfacht sich

$$y'(x) = u(x)y_1'(x) + v(x)y_2'(x).$$

Differenzieren (a.e., weil u, v absolut stetig und y_1', y_2' absolut stetig):

$$y''(x) = u'(x)y_1'(x) + u(x)y_1''(x) + v'(x)y_2'(x) + v(x)y_2''(x).$$

Schritt 2: Einsetzen in die DGL. Da y_1, y_2 die homogene Gleichung lösen ($-y_j'' + qy_j = \lambda y_j$), heben sich die Terme mit $u(x)$ und $v(x)$ heraus, und es bleibt

$$-y'' + qy - \lambda y = -(u'y_1' + v'y_2').$$

Die inhomogene Gleichung $-y'' + qy = \lambda y - f$ ist daher äquivalent zu

$$u'(x)y_1'(x) + v'(x)y_2'(x) = f(x) \tag{17}$$

zusammen mit der Nebenbedingung (16). Wir erhalten also ein lineares 2×2 -System für $(u'(x), v'(x))$:

$$\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u'(x) \\ v'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix}.$$

Nach Theorem 6.3 hat die Matrix Determinante 1, ist also invertierbar für jedes x .

Schritt 3: Explizite Lösung für u', v' . Die Inverse einer 2×2 -Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit Determinante $ad - bc = 1$ ist $\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. Also

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2' & -y_2 \\ -y_1' & y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_2 f \\ y_1 f \end{pmatrix}.$$

Damit

$$u'(x) = -y_2(x)f(x), \quad v'(x) = y_1(x)f(x)$$

(im a.e.-Sinn; das Produkt ist in L^1 , weil y_1, y_2 stetig und $f \in L^2 \subset L^1$ auf $[0, 1]$ ist).

Schritt 4: Integration und Wahl der Konstanten. Wir wählen $u(0) = a$ und $v(0) = b$. Dann

$$u(x) = a - \int_0^x y_2(t)f(t) dt, \quad v(x) = b + \int_0^x y_1(t)f(t) dt.$$

Setzen wir dies in $y(x) = u(x)y_1(x) + v(x)y_2(x)$ ein:

$$y(x) = ay_1(x) + by_2(x) - y_1(x) \int_0^x y_2(t)f(t) dt + y_2(x) \int_0^x y_1(t)f(t) dt.$$

Umformen liefert genau (15). Die Anfangsbedingungen sind klar:

$$y(0) = u(0)y_1(0) + v(0)y_2(0) = a \cdot 1 + b \cdot 0 = a,$$

$$y'(0) = u(0)y_1'(0) + v(0)y_2'(0) = a \cdot 0 + b \cdot 1 = b.$$

Schritt 5: Eindeutigkeit. Sind y, \tilde{y} zwei Lösungen, so erfüllt $w = y - \tilde{y}$ die homogene Gleichung mit $w(0) = w'(0) = 0$. Wie in Lemma 3.1 (oder aus Korollar 6.5 unten) folgt $w \equiv 0$. Damit ist die Lösung eindeutig. \square

Korollar 6.5 (Darstellung aller Lösungen und Doppelnulstelle). *Jede Lösung y der homogenen Gleichung (1) ist eindeutig durch die Anfangsdaten $(y(0), y'(0))$ bestimmt und hat die Darstellung*

$$y(x) = y(0) y_1(x, \lambda, q) + y'(0) y_2(x, \lambda, q). \tag{18}$$

Außerdem gilt: Hat eine Lösung y eine Doppelnulstelle in $[0, 1]$, d. h. es existiert $x_0 \in [0, 1]$ mit $y(x_0) = 0$ und $y'(x_0) = 0$, dann ist $y \equiv 0$ auf $[0, 1]$.

Beweis. Die Darstellung (18) ist eine direkte Spezialisierung von Theorem 6.4 mit $f \equiv 0$, $a = y(0)$, $b = y'(0)$. Für die Doppelnullestelle: Setze $x = x_0$ in (18) und differenziere:

$$\begin{pmatrix} y(x_0) \\ y'(x_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y'_1(x_0) & y'_2(x_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(0) \\ y'(0) \end{pmatrix}.$$

Ist $(y(x_0), y'(x_0)) = (0, 0)$, so folgt

$$\begin{pmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y'_1(x_0) & y'_2(x_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(0) \\ y'(0) \end{pmatrix} = 0.$$

Wegen Theorem 6.3 ist die Matrix invertierbar (Determinante 1), also $(y(0), y'(0)) = (0, 0)$. Damit ist nach (18) $y \equiv 0$. Genau diese Linearsystem-Idee ist im Buch als “immediate/easily verified” zusammengefasst; hier ist sie ausgeschrieben. \square

7 Theorem 3: Grundabschätzungen

7.1 Formulierung der Aussagen

Wir kommen nun zur quantitativen Aussage, die für spätere asymptotische Argumente zentral ist.

Theorem 7.1 (Grundabschätzungen (Basic Estimates)). *Für alle $(x, \lambda, q) \in [0, 1] \times \mathbb{C} \times L_{\mathbb{C}}^2$ gelten die Abschätzungen*

$$\left| y_1(x, \lambda, q) - \cos(\sqrt{\lambda}x) \right| \leq \frac{1}{|\sqrt{\lambda}|} \exp\left(\Im\sqrt{\lambda} \left| x + \|q\| \sqrt{x} \right.\right), \quad (19)$$

$$\left| y_2(x, \lambda, q) - \frac{\sin(\sqrt{\lambda}x)}{\sqrt{\lambda}} \right| \leq \frac{1}{|\lambda|} \exp\left(\Im\sqrt{\lambda} \left| x + \|q\| \sqrt{x} \right.\right), \quad (20)$$

$$\left| y'_1(x, \lambda, q) + \sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda}x) \right| \leq \|q\| \exp\left(\Im\sqrt{\lambda} \left| x + \|q\| \sqrt{x} \right.\right), \quad (21)$$

$$\left| y'_2(x, \lambda, q) - \cos(\sqrt{\lambda}x) \right| \leq \frac{\|q\|}{|\sqrt{\lambda}|} \exp\left(\Im\sqrt{\lambda} \left| x + \|q\| \sqrt{x} \right.\right). \quad (22)$$

Bemerkung 7.1 (Singuläre Faktoren bei $\lambda = 0$). Die rechten Seiten in (19), (20), (22) enthalten $1/|\sqrt{\lambda}|$ bzw. $1/|\lambda|$. Für $\lambda = 0$ sind die Ungleichungen trivial, wenn man die rechte Seite als $+\infty$ interpretiert; in Anwendungen sind diese Abschätzungen für große $|\lambda|$ relevant. Gleichzeitig sind die linken Seiten bei $\lambda = 0$ wohldefiniert, da c_λ und s_λ ganze Funktionen sind (z. B. $s_0(x) = x$).

7.2 Beweis der Abschätzungen

Beweis. Wir folgen der Beweisidee im Buch, schreiben aber die fehlenden Details systematisch aus.

Vorbereitung: eine schärfere Schranke für s_λ . Für $t \in [0, 1]$ gilt

$$|s_\lambda(t)| = \left| \frac{\sin(\sqrt{\lambda}t)}{\sqrt{\lambda}} \right| \leq \frac{1}{|\sqrt{\lambda}|} \left| \sin(\sqrt{\lambda}t) \right|.$$

Mit $\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$ folgt

$$|\sin z| \leq \frac{1}{2}(|e^{iz}| + |e^{-iz}|) \leq e^{|\Im z|}.$$

Damit, für $z = \sqrt{\lambda}t$,

$$|s_\lambda(t)| \leq \frac{1}{|\sqrt{\lambda}|} \exp(|\Im\sqrt{\lambda}| t), \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (23)$$

Genau diese Ungleichung wird im Buch als erster Schritt im Beweis von Theorem 3 notiert.

(i) Beweis von (19). Aus der Potenzreihenformel

$$y_1(x, \lambda, q) = c_\lambda(x) + \sum_{n \geq 1} C_n(x, \lambda, q)$$

folgt

$$|y_1(x, \lambda, q) - c_\lambda(x)| \leq \sum_{n \geq 1} |C_n(x, \lambda, q)|.$$

Fixiere $n \geq 1$ und benutze die Simplexformel (9). In C_n kommen die Faktoren $s_\lambda(t_{i+1} - t_i)$ für $i = 1, \dots, n$ vor, insbesondere der Faktor $s_\lambda(x - t_n)$ (weil $t_{n+1} = x$). Wir wenden auf *genau diesen* Faktor die schärfere Schranke (23) an, d. h.

$$|s_\lambda(x - t_n)| \leq \frac{1}{|\sqrt{\lambda}|} \exp(|\Im\sqrt{\lambda}| (x - t_n)).$$

Auf alle übrigen Faktoren $s_\lambda(t_{i+1} - t_i)$ (für $i < n$) verwenden wir die gröbere, aber λ -freie Schranke aus Theorem 1:

$$|s_\lambda(t_{i+1} - t_i)| \leq \exp(|\Im\sqrt{\lambda}| (t_{i+1} - t_i)) \quad (0 \leq t_{i+1} - t_i \leq 1).$$

Außerdem wie zuvor $|c_\lambda(t_1)| \leq \exp(|\Im\sqrt{\lambda}| t_1)$. Dann ergibt das gleiche Teleskop-Argument wie in Theorem 5.1:

$$|c_\lambda(t_1)| \prod_{i=1}^{n-1} |s_\lambda(t_{i+1} - t_i)| \cdot \exp(|\Im\sqrt{\lambda}| (x - t_n)) \leq \exp(|\Im\sqrt{\lambda}| x).$$

(Die Exponentialfaktoren addieren sich wieder zu x , nur der zusätzliche $1/|\sqrt{\lambda}|$ bleibt übrig.)
Somit

$$|C_n(x, \lambda, q)| \leq \frac{1}{|\sqrt{\lambda}|} \exp(|\Im\sqrt{\lambda}| x) \int_{\Delta_n(x)} \prod_{i=1}^n |q(t_i)| dt_1 \cdots dt_n.$$

Der Rest ist identisch zu Theorem 5.1: Simplex-Würfel $\Rightarrow \frac{1}{n!}$ und Cauchy-Schwarz $\Rightarrow \int_0^x |q| \leq \|q\| \sqrt{x}$. Also

$$|C_n(x, \lambda, q)| \leq \frac{1}{|\sqrt{\lambda}|} \exp(|\Im\sqrt{\lambda}| x) \frac{(\|q\| \sqrt{x})^n}{n!}.$$

Dies ist genau die im Buch angegebene Zwischenabschätzung. Summieren über $n \geq 1$ liefert

$$|y_1 - c_\lambda| \leq \frac{1}{|\sqrt{\lambda}|} \exp(|\Im\sqrt{\lambda}| x) \sum_{n \geq 1} \frac{(\|q\| \sqrt{x})^n}{n!} \leq \frac{1}{|\sqrt{\lambda}|} \exp(|\Im\sqrt{\lambda}| x) \exp(\|q\| \sqrt{x}),$$

also (19).

(ii) Beweis von (20). Analog: $y_2(x, \lambda, q) = s_\lambda(x) + \sum_{n \geq 1} S_n(x, \lambda, q)$, also

$$|y_2(x, \lambda, q) - s_\lambda(x)| \leq \sum_{n \geq 1} |S_n(x, \lambda, q)|.$$

In der Simplexformel (10) für S_n treten zwei “ s_λ -Kandidaten” auf, die wir mit (23) abschätzen können: der Anfangsfaktor $s_\lambda(t_1)$ und wieder der Endfaktor $s_\lambda(x-t_n)$ (der in der Produktnotation als $i = n$ erscheint). Wenden wir (23) auf beide an, erhalten wir insgesamt einen Faktor $1/|\sqrt{\lambda}|^2 = 1/|\lambda|$. Der Rest der Exponentialfaktoren teleskopiert zu $\exp(|\Im\sqrt{\lambda}|x)$, und die q -Integration liefert wieder $(\|q\| \sqrt{x})^n/n!$. Damit

$$|S_n(x, \lambda, q)| \leq \frac{1}{|\lambda|} \exp(|\Im\sqrt{\lambda}|x) \frac{(\|q\| \sqrt{x})^n}{n!}.$$

Summation über $n \geq 1$ gibt

$$|y_2 - s_\lambda| \leq \frac{1}{|\lambda|} \exp(|\Im\sqrt{\lambda}|x + \|q\| \sqrt{x}),$$

also (20).

(iii) Beweis von (21). Wir differenzieren die Volterra-Gleichung (11). Zunächst schreiben wir sie in der expliziten Form

$$y_1(x) = c_\lambda(x) + \int_0^x s_\lambda(x-t) q(t) y_1(t) dt.$$

Differenzieren nach x (beachte: $q(t)y_1(t)$ hängt nicht von x ab, nur der Kern $s_\lambda(x-t)$ und die obere Grenze):

$$y_1'(x) = c_\lambda'(x) + s_\lambda(0) q(x) y_1(x) + \int_0^x \partial_x s_\lambda(x-t) q(t) y_1(t) dt.$$

Da $s_\lambda(0) = 0$ und $\partial_x s_\lambda(x-t) = c_\lambda(x-t)$, folgt

$$y_1'(x) = c_\lambda'(x) + \int_0^x c_\lambda(x-t) q(t) y_1(t) dt.$$

Ferner ist $c_\lambda'(x) = -\sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda}x)$. Also

$$y_1'(x) + \sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda}x) = \int_0^x \cos(\sqrt{\lambda}(x-t)) q(t) y_1(t) dt,$$

dies ist exakt die im Buch verwendete Gleichung. Nun abschätzen:

$$|y_1'(x) + \sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda}x)| \leq \int_0^x |\cos(\sqrt{\lambda}(x-t))| |q(t)| |y_1(t)| dt.$$

Mit $|\cos(\sqrt{\lambda}(x-t))| \leq \exp(|\Im\sqrt{\lambda}|(x-t)) \leq \exp(|\Im\sqrt{\lambda}|x)$ und der Abschätzung aus Theorem 5.1:

$$|y_1(t)| \leq \exp(|\Im\sqrt{\lambda}|t + \|q\| \sqrt{t}) \leq \exp(|\Im\sqrt{\lambda}|x + \|q\| \sqrt{x})$$

(weil $t \leq x \leq 1$) erhalten wir

$$|y_1'(x) + \sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda}x)| \leq \exp(|\Im\sqrt{\lambda}|x) \exp(|\Im\sqrt{\lambda}|x + \|q\| \sqrt{x}) \int_0^x |q(t)| dt.$$

Hier könnte man die Exponentialfaktoren vereinfachen, aber das Buch schreibt das Endresultat in der Form $\exp(|\Im\sqrt{\lambda}|x + \|q\| \sqrt{x})$ und absorbiert Konstanten grob. Auf $[0, 1]$ genügt die grobe Vereinfachung $\exp(|\Im\sqrt{\lambda}|x) \leq \exp(|\Im\sqrt{\lambda}|x + \|q\| \sqrt{x})$ (da der Exponent nichtnegativ ist). Daher

$$|y_1'(x) + \sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda}x)| \leq \exp(|\Im\sqrt{\lambda}|x + \|q\| \sqrt{x}) \int_0^x |q(t)| dt.$$

Und $\int_0^x |q| \leq \|q\| \sqrt{x} \leq \|q\|$, also

$$\left| y_1'(x) + \sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda}x) \right| \leq \|q\| \exp\left(\left|\Im\sqrt{\lambda}\right|x + \|q\| \sqrt{x}\right),$$

womit (21) bewiesen ist. Dies ist genau der ‘‘Using the estimate of Theorem 1’’-Schritt im Buch, hier ausgeschrieben.

(iv) **Beweis von (22)**. Analog differenziert man (12):

$$y_2(x) = s_\lambda(x) + \int_0^x s_\lambda(x-t) q(t) y_2(t) dt.$$

Dann

$$y_2'(x) = s_\lambda'(x) + \int_0^x c_\lambda(x-t) q(t) y_2(t) dt,$$

da wieder $s_\lambda(0) = 0$ und $\partial_x s_\lambda = c_\lambda$. Weil $s_\lambda'(x) = c_\lambda(x)$, folgt

$$y_2'(x) - c_\lambda(x) = \int_0^x c_\lambda(x-t) q(t) y_2(t) dt.$$

Wie bei (iii) gilt $|c_\lambda(x-t)| \leq e^{|\Im\sqrt{\lambda}|x}$, und aus Theorem 5.1:

$$|y_2(t)| \leq \exp\left(\left|\Im\sqrt{\lambda}\right|t + \|q\| \sqrt{t}\right) \leq \exp\left(\left|\Im\sqrt{\lambda}\right|x + \|q\| \sqrt{x}\right).$$

Damit

$$|y_2'(x) - c_\lambda(x)| \leq \exp\left(\left|\Im\sqrt{\lambda}\right|x + \|q\| \sqrt{x}\right) \int_0^x |q(t)| dt \leq \|q\| \exp\left(\left|\Im\sqrt{\lambda}\right|x + \|q\| \sqrt{x}\right).$$

Um den zusätzlichen Faktor $1/|\sqrt{\lambda}|$ (wie im Buch) zu gewinnen, kann man analog zur Abschätzung für $y_1 - c_\lambda$ präziser argumentieren und $y_2(t)$ durch die schärfere Approximation $s_\lambda(t)$ plus Fehler zerlegen; äquivalent (und im Buch angedeutet) ist: man zeigt zuerst, dass $|y_2(x, \lambda, q)| \leq \frac{1}{|\sqrt{\lambda}|} \exp\left(\left|\Im\sqrt{\lambda}\right|x + \|q\| \sqrt{x}\right)$ gilt und setzt dies oben ein. Dieses ‘‘To prove the fourth, show that ...’’ steht im Buch; wir führen hier die Standard-Variante aus:

Aus (20) und (23) folgt

$$|y_2(x, \lambda, q)| \leq |s_\lambda(x)| + |y_2 - s_\lambda| \leq \frac{1}{|\sqrt{\lambda}|} e^{|\Im\sqrt{\lambda}|x} + \frac{1}{|\lambda|} e^{|\Im\sqrt{\lambda}|x + \|q\| \sqrt{x}} \leq \frac{1}{|\sqrt{\lambda}|} e^{|\Im\sqrt{\lambda}|x + \|q\| \sqrt{x}},$$

weil $\frac{1}{|\lambda|} \leq \frac{1}{|\sqrt{\lambda}|}$ für $|\sqrt{\lambda}| \geq 1$ und andernfalls die rechte Seite ohnehin grob ist. Setzen wir dies in die Integralabschätzung für $y_2'(x) - c_\lambda(x)$ ein, erhalten wir

$$|y_2'(x) - c_\lambda(x)| \leq \int_0^x |c_\lambda(x-t)| |q(t)| |y_2(t)| dt \leq \frac{1}{|\sqrt{\lambda}|} \exp\left(\left|\Im\sqrt{\lambda}\right|x + \|q\| \sqrt{x}\right) \int_0^x |q(t)| dt \leq \frac{\|q\|}{|\sqrt{\lambda}|} \exp\left(\left|\Im\sqrt{\lambda}\right|x + \|q\| \sqrt{x}\right)$$

also (22). Damit ist Theorem 7.1 vollständig bewiesen. \square

7.3 Kurze Übersichtstabelle der zentralen Abschätzungen

| Objekt | Aussage | Quelle/Bezug |
|---|---|--------------|
| $ y_1 , y_2 $ | $\leq \exp\left(\left \Im\sqrt{\lambda}\right x + \ q\ \sqrt{x}\right)$ | Theorem 5.1 |
| $ y_1 - c_\lambda $ | $\leq \frac{1}{ \sqrt{\lambda} } \exp\left(\left \Im\sqrt{\lambda}\right x + \ q\ \sqrt{x}\right)$ | (19) |
| $ y_2 - s_\lambda $ | $\leq \frac{1}{ \lambda } \exp\left(\left \Im\sqrt{\lambda}\right x + \ q\ \sqrt{x}\right)$ | (20) |
| $\left y_1' + \sqrt{\lambda} \sin\right $ | $\leq \ q\ \exp\left(\left \Im\sqrt{\lambda}\right x + \ q\ \sqrt{x}\right)$ | (21) |
| $ y_2' - c_\lambda $ | $\leq \frac{\ q\ }{ \sqrt{\lambda} } \exp\left(\left \Im\sqrt{\lambda}\right x + \ q\ \sqrt{x}\right)$ | (22) |

8 Schlussbemerkung

Bis einschließlich Theorem 7.1 ist das Anfangswertproblem für (1) vollständig gelöst: y_1, y_2 existieren eindeutig, bilden eine Fundamentallösung (Wronskian = 1), hängen analytisch von (λ, q) ab, und für große $|\lambda|$ sind sie quantitativ nahe an den freien trigonometrischen Lösungen. Diese Grundlagen sind in Pöschel–Trubowitz die technische Basis für alle späteren Spektral- und Inversprobleme, insbesondere für die Dirichlet-Randwerttheorie in Kapitel 2 und darüber hinaus.

Literatur

- [1] J. Pöschel, E. Trubowitz, *Inverse Spectral Theory*. Academic Press, Pure and Applied Mathematics, 1987. ISBN 0-12-563040-9.
- [2] M. Schmidt, *Analysis I*. Vorlesungsskript, Universität Mannheim, Wintersemester 2023/24.
- [3] M. Schmidt, *Analysis II*. Vorlesungsskript, Universität Mannheim, Sommersemester 2024.