

UNIVERSITÄT MANNHEIM

Fakultät für Wirtschaftsinformatik und Wirtschaftsmathematik

Eigenwerte von Hills Gleichung

Bachelorarbeit

Verfasserin: Jessica Crutoi
Matrikelnummer: 1984895
Semester: 6. Fachsemester
Betreuer: Prof. Dr. Martin Schmidt
Abgabedatum: 18.05.2026

Eidesstattliche Versicherung

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig und ohne fremde Hilfe angefertigt habe. Alle Stellen, die wörtlich oder sinngemäß aus veröffentlichten oder unveröffentlichten Quellen entnommen wurden, sind als solche kenntlich gemacht.

Ich versichere außerdem, dass die Arbeit weder vollständig noch in wesentlichen Teilen bereits zu einem früheren Zeitpunkt oder an anderer Stelle als Prüfungsleistung vorgelegt wurde. Alle verwendeten Quellen, einschließlich der Sekundärliteratur, elektronischer Ressourcen, grafischer Darstellungen und Bilder, sind vollständig und korrekt in der Bibliographie angegeben.

Ich bin ferner damit einverstanden, dass meine Arbeit zum Zwecke eines Plagiatsabgleichs in elektronischer Form anonymisiert gespeichert und übermittelt wird.

Mir ist bekannt, dass bei fehlender oder unrichtiger Abgabe dieser Erklärung die Prüfungsleistung mit „nicht ausreichend“ bewertet werden kann.

Mannheim, 18.05.2026
Ort, Datum

J. Crata
Unterschrift

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
1 Grundlagen zu Hills Gleichung	2
1.1 Die Hill-Gleichung und Fundamentallösungen	2
1.2 Die Wronski-Determinante	3
1.3 Monodromiematrix und Diskriminante	3
1.4 Periodische und antiperiodische Eigenwerte	5
1.5 Dirichlet- und Neumann-Eigenwerte	7
2 Periodische und antiperiodische Eigenwerte	9
2.1 Asymptotik der Fundamentallösungen	9
2.2 Oszillationstheorem	10
2.2.1 Lage der Nullstellen	11
2.2.2 Analytische Hilfsmittel im L^2 -Rahmen	16
2.2.3 Verhalten der Diskriminante und Vielfachheit der Eigenwerte . .	19
2.2.4 Instabilitätsintervalle und Spektrallücken	22
3 Dirichlet- und Neumann-Eigenwerte im L^2-Rahmen	25
3.1 Definition und Charakterisierung der Randwertprobleme	25
3.2 Analyse der Dirichlet-Eigenwerte	26
3.3 Analyse der Neumann-Eigenwerte	31
4 Physikalische und technische Anwendungsbereiche	37
Fazit	39

Einleitung

Periodische Strukturen treten in vielen mathematischen Modellen auf, wenn beispielsweise Materialeigenschaften oder äußere Einflüsse sich regelmäßig wiederholen. Ein klassisches Beispiel ist der eindimensionale Operator

$$L_q y(x) := -y''(x) + q(x)y(x),$$

wobei das Potential q periodisch ist. In dieser Arbeit untersuche ich das Spektrum der zugehörigen Eigenwertprobleme am Beispiel der Hill'schen Gleichung

$$-y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x),$$

wobei $q \in L^2([0, 1], \mathbb{R})$ gegeben ist und 1-periodisch auf $\mathbb{R}$ fortgesetzt wird.

Im Fokus stehen verschiedene natürliche Randbedingungen, die zu unterschiedlichen Eigenwertfolgen führen: Einerseits die *periodischen* und *antiperiodischen* Bedingungen, die an die zugrunde liegende Periodizität angepasst sind, andererseits die klassischen *Dirichlet*- und *Neumann*-Randbedingungen auf dem Grundintervall $[0, 1]$. Ein zentrales Phänomen periodischer Probleme ist die sogenannte *Bandstruktur*: Die Menge der Parameter λ , für die beschränkte (stabile) Lösungen existieren, zerfällt in eine Vereinigung disjunkter Intervalle, deren Randpunkte durch periodische bzw. antiperiodische Eigenwerte gegeben sind.

Ziel der Arbeit ist es, diese Struktur präzise herzuleiten. Insbesondere soll gezeigt werden, dass die genannten Eigenwerte reell sind, sich in einer festen Ordnung „verschachteln“ und dass Dirichlet- und Neumann-Eigenwerte jeweils innerhalb der Spektralbänder liegen. Methodisch basiert der Beweis auf der Floquet-Theorie: Aus einem Fundamentalsystem wird eine Monodromiematrix aufgebaut; die Spur dieser Matrix (die Hill-Diskriminante) erlaubt anschließend eine Charakterisierung der Stabilitätsintervalle und verbindet die periodischen mit den Intervallproblemen.

Als Hauptreferenzen dienen die Kapitel 2 und 3 von Eastham (*The Spectral Theory of Periodic Differential Equations*) für die grundlegende Floquet-Argumentation sowie Pöschel–Trubowitz (*Inverse Spectral Theory*) für die Übertragung auf Potentiale in L^2 . Ergänzend wird Magnus–Winkler (*Hill's Equation*) herangezogen.

Anmerkung: Bei der Erstellung dieser Arbeit wurden KI-basierte Werkzeuge unterstützend für sprachliche Überarbeitungen sowie vereinzelt zur Diskussion mathematischer Formulierungen und Argumentationsansätze verwendet.

Kapitel 1

Grundlagen zu Hills Gleichung

Die in diesem Kapitel verwendeten grundlegenden Aussagen stützen sich auf Standardresultate der Theorie linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung; vgl. insbesondere [Eas73, Kapitel 2] sowie [MW66, Kapitel 1].

1.1 Die Hill-Gleichung und Fundamentallösungen

Wir betrachten die eindimensionale Schrödinger-Gleichung mit periodischem Potential, bekannt als *Hill'sche Gleichung*, in der Form

$$-y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (1.1)$$

Hierbei sei das Potential $q \in L^2([0, 1], \mathbb{R})$ gegeben und werde 1-periodisch auf ganz $\mathbb{R}$ fortgesetzt. Der Parameter λ ist im Allgemeinen ein komplexer Eigenwertparameter ($\lambda \in \mathbb{C}$).

Da q lediglich als quadratintegrierbar vorausgesetzt wird, verstehen wir unter einer Lösung y von (1.1) eine Funktion, die zusammen mit ihrer ersten Ableitung y' absolut stetig auf kompakten Teilintervallen von $\mathbb{R}$ ist und die Gleichung fast überall erfüllt. Nach der allgemeinen Theorie linearer Differentialgleichungen besitzt das Anfangswertproblem

$$-y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x), \quad y(0) = a, \quad y'(0) = b \quad (1.2)$$

für beliebige Startwerte $a, b \in \mathbb{C}$ eine eindeutige Lösung.

Um die Abhängigkeit der Lösung vom Parameter λ zu verdeutlichen, schreiben wir im Folgenden oft $y(x, \lambda)$.

Besonders wichtig für die spektraltheoretische Untersuchung ist das **normierte Fundamentalsystem** $\{y_1, y_2\}$. Diese beiden linear unabhängigen Lösungen sind durch die speziellen Anfangsbedingungen

$$y_1(0, \lambda) = 1, \quad y_1'(0, \lambda) = 0, \quad (1.3)$$

$$y_2(0, \lambda) = 0, \quad y_2'(0, \lambda) = 1 \quad (1.4)$$

eindeutig festgelegt. Es lässt sich zeigen, dass für jedes feste x die Funktionen $\lambda \mapsto y_j(x, \lambda)$ (für $j = 1, 2$) ganze Funktionen in λ sind. Dies bildet die Grundlage für die spätere Definition der Hill-Diskriminante.

Jede beliebige Lösung y von (1.1) lässt sich folglich als eindeutige Linearkombination

$$y(x, \lambda) = c_1 y_1(x, \lambda) + c_2 y_2(x, \lambda) \quad (1.5)$$

mit Koeffizienten $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ darstellen.

1.2 Die Wronski-Determinante

Ein zentrales Hilfsmittel zur Untersuchung linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung ist die Wronski-Determinante. Sie erlaubt insbesondere, die lineare Unabhängigkeit von Lösungen zu beschreiben und liefert im vorliegenden Zusammenhang eine wichtige Invariante des Lösungsverhaltens.

Definition 1.1. Seien u und v zwei Lösungen der Hill-Gleichung (1.1). Dann heißt die Funktion

$$W(u, v)(x) := u(x)v'(x) - u'(x)v(x)$$

die *Wronski-Determinante* von u und v .

Lemma 1.2. Seien u und v zwei Lösungen von (1.1). Dann ist die Wronski-Determinante $W(u, v)$ auf $\mathbb{R}$ konstant.

Beweis. Da u und v Lösungen von (1.1) sind, gilt fast überall auf $\mathbb{R}$

$$u'' = (q - \lambda)u \quad \text{und} \quad v'' = (q - \lambda)v.$$

Durch Differentiation der Wronski-Determinante erhält man daher fast überall

$$W'(u, v)(x) = u(x)v''(x) - u''(x)v(x).$$

Einsetzen der Differentialgleichungen liefert

$$W'(u, v)(x) = u(x)(q(x) - \lambda)v(x) - (q(x) - \lambda)u(x)v(x) = 0.$$

Da u , v , u' und v' absolut stetig sind, ist auch die Wronski-Determinante $W(u, v)$ als deren Verknüpfung absolut stetig. Da ihre Ableitung fast überall verschwindet, ist $W(u, v)$ folglich konstant. $\square$

Wendet man dieses Resultat auf die Fundamentallösungen y_1 und y_2 an, so ergibt sich

$$W(y_1, y_2)(x) = W(y_1, y_2)(0) = y_1(0, \lambda)y_2'(0, \lambda) - y_1'(0, \lambda)y_2(0, \lambda) = 1.$$

Insbesondere sind y_1 und y_2 für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ linear unabhängig.

Die Konstanz der Wronski-Determinante wird im Folgenden mehrfach verwendet. Insbesondere folgt daraus später, dass die Monodromiematrix die Determinante 1 besitzt.

1.3 Monodromiematrix und Diskriminante

Für die weitere spektrale Untersuchung ist insbesondere von Interesse, wie sich eine Lösung der Hill-Gleichung nach Verschiebung um eine Periode verhält. Da jede Lösung durch ihre Anfangsdaten bei $x = 0$ eindeutig bestimmt ist, lässt sich der Übergang von $x = 0$ nach $x = 1$ durch eine lineare Abbildung auf dem Raum der Anfangsdaten beschreiben. Diese Abbildung wird durch die Monodromiematrix dargestellt.

Sei y eine Lösung von (1.1). Dann gilt mit der Darstellung bezüglich des normierten Fundamentalsystems

$$y(x, \lambda) = c_1 y_1(x, \lambda) + c_2 y_2(x, \lambda),$$

wobei die Koeffizienten c_1 und c_2 durch die Anfangsdaten

$$c_1 = y(0, \lambda), \quad c_2 = y'(0, \lambda)$$

gegeben sind. Für $x = 1$ erhält man daher

$$\begin{pmatrix} y(1, \lambda) \\ y'(1, \lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(1, \lambda) & y_2(1, \lambda) \\ y_1'(1, \lambda) & y_2'(1, \lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(0, \lambda) \\ y'(0, \lambda) \end{pmatrix}.$$

Definition 1.3. Die Matrix

$$M(\lambda) := \begin{pmatrix} y_1(1, \lambda) & y_2(1, \lambda) \\ y_1'(1, \lambda) & y_2'(1, \lambda) \end{pmatrix}$$

heißt *Monodromiematrix* der Hill-Gleichung (1.1).

Die Monodromiematrix beschreibt also, wie die Anfangsdaten einer Lösung nach Durchlaufen einer Periode transformiert werden. Ihre Einträge hängen von λ ab und sind wegen der entsprechenden Eigenschaft der Fundamentallösungen ganze Funktionen in λ .

Aus der Konstanz der Wronski-Determinante folgt unmittelbar eine wichtige strukturelle Eigenschaft von $M(\lambda)$.

Lemma 1.4. Für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt

$$\det M(\lambda) = 1.$$

Beweis. Nach Definition der Monodromiematrix gilt

$$\det M(\lambda) = y_1(1, \lambda)y_2'(1, \lambda) - y_1'(1, \lambda)y_2(1, \lambda) = W(y_1, y_2)(1).$$

Da die Wronski-Determinante nach dem vorherigen Lemma konstant ist und für das normierte Fundamentalsystem

$$W(y_1, y_2)(0) = y_1(0, \lambda)y_2'(0, \lambda) - y_1'(0, \lambda)y_2(0, \lambda) = 1$$

gilt, folgt

$$\det M(\lambda) = W(y_1, y_2)(1) = W(y_1, y_2)(0) = 1.$$

□

Definition 1.5. Die Funktion

$$\Delta(\lambda) := \operatorname{tr}(M(\lambda)) = y_1(1, \lambda) + y_2'(1, \lambda)$$

heißt *Diskriminante* der Hill-Gleichung (1.1).

Da die Einträge der Monodromiematrix ganze Funktionen in λ sind, ist auch die Diskriminante Δ eine ganze Funktion. Sie spielt im weiteren Verlauf eine zentrale Rolle, da sich periodische und antiperiodische Eigenwerte, wie wir später im Detail sehen werden, durch die Bedingungen

$$\Delta(\lambda) = 2 \quad \text{bzw.} \quad \Delta(\lambda) = -2$$

charakterisieren lassen.

Darüber hinaus bestimmen Spur und Determinante der Monodromiematrix die Eigenwerte von $M(\lambda)$, die sogenannten Floquet-Multiplikatoren. Diese werden im folgenden Abschnitt eingeführt und bilden die Grundlage für die Floquet-Theorie der Hill-Gleichung.

Definition 1.6. Die Eigenwerte der Monodromiematrix $M(\lambda)$ heißen *Floquet-Multiplikatoren*.

Da die Floquet-Multiplikatoren als Eigenwerte von $M(\lambda)$ definiert sind, sind sie genau die Nullstellen des charakteristischen Polynoms von $M(\lambda)$. Für dieses gilt

$$\det(M(\lambda) - \rho I) = \rho^2 - \operatorname{tr}(M(\lambda))\rho + \det(M(\lambda)).$$

Unter Verwendung von

$$\operatorname{tr}(M(\lambda)) = \Delta(\lambda) \quad \text{und} \quad \det M(\lambda) = 1$$

folgt daraus

$$\det(M(\lambda) - \rho I) = \rho^2 - \Delta(\lambda)\rho + 1. \quad (1.6)$$

Somit sind die Floquet-Multiplikatoren genau die Lösungen der quadratischen Gleichung

$$\rho^2 - \Delta(\lambda)\rho + 1 = 0. \quad (1.7)$$

Durch Koeffizientenvergleich mit der faktorisierten Form $(\rho - \rho_1)(\rho - \rho_2) = 0$ ergibt sich für die beiden Floquet-Multiplikatoren ρ_1 und ρ_2 insbesondere die Beziehung

$$\rho_1 \rho_2 = 1.$$

Diese Beziehung wird im weiteren Verlauf mehrfach verwendet.

1.4 Periodische und antiperiodische Eigenwerte

Im Hinblick auf die spätere spektrale Untersuchung sind insbesondere solche Werte λ von Interesse, für die die Hill-Gleichung Lösungen mit periodischem oder antiperiodischem Verhalten besitzt.

Definition 1.7. Eine Lösung y von (1.1) heißt *periodisch*, falls

$$y(x+1) = y(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R},$$

und *antiperiodisch*, falls

$$y(x+1) = -y(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Definition 1.8. Ein Wert $\lambda \in \mathbb{C}$ heißt *periodischer Eigenwert*, falls (1.1) eine nichttriviale periodische Lösung besitzt. Entsprechend heißt λ *antiperiodischer Eigenwert*, falls (1.1) eine nichttriviale antiperiodische Lösung besitzt.

Der Zusammenhang mit der Monodromiematrix ist unmittelbar: Ist y eine periodische Lösung, so gilt

$$\begin{pmatrix} y(1) \\ y'(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(0) \\ y'(0) \end{pmatrix},$$

also ist 1 ein Eigenwert von $M(\lambda)$. Entsprechend impliziert eine antiperiodische Lösung, dass -1 Eigenwert von $M(\lambda)$ ist.

Proposition 1.9. Für $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\lambda \text{ ist periodischer Eigenwert} \iff 1 \text{ ist Eigenwert von } M(\lambda) \iff \Delta(\lambda) = 2,$$

sowie

$$\lambda \text{ ist antiperiodischer Eigenwert} \iff -1 \text{ ist Eigenwert von } M(\lambda) \iff \Delta(\lambda) = -2.$$

Beweis. Ist y eine nichttriviale periodische Lösung, so folgt aus

$$\begin{pmatrix} y(1) \\ y'(1) \end{pmatrix} = M(\lambda) \begin{pmatrix} y(0) \\ y'(0) \end{pmatrix}$$

und der Bedingung

$$y(1) = y(0), \quad y'(1) = y'(0),$$

dass die Matrix $M(\lambda)$ den Vektor $\begin{pmatrix} y(0) \\ y'(0) \end{pmatrix}$ auf sich selbst abbildet. Da y eine nichttriviale Lösung ist, gilt wegen der Eindeutigkeit der Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{pmatrix} y(0) \\ y'(0) \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Folglich ist dieser Vektor ein echter Eigenvektor und 1 ein Eigenwert von $M(\lambda)$.

Umgekehrt liefert ein Eigenvektor zum Eigenwert 1 eine nichttriviale Lösung mit periodischen Anfangsdaten, also eine periodische Lösung. Die Aussage für antiperiodische Lösungen folgt analog.

Wegen

$$\det(M(\lambda) - \rho I) = \rho^2 - \Delta(\lambda)\rho + 1$$

ist 1 genau dann Eigenwert von $M(\lambda)$, wenn

$$1 - \Delta(\lambda) + 1 = 0,$$

also genau dann, wenn $\Delta(\lambda) = 2$. Entsprechend ist -1 genau dann Eigenwert von $M(\lambda)$, wenn

$$1 + \Delta(\lambda) + 1 = 0,$$

also genau dann, wenn $\Delta(\lambda) = -2$. □

Diese Charakterisierung bildet die Grundlage für die spätere Untersuchung der periodischen und antiperiodischen Eigenwerte im Hauptteil der Arbeit.

1.5 Dirichlet- und Neumann-Eigenwerte

Neben periodischen und antiperiodischen Randbedingungen spielen auf dem Grundintervall $[0, 1]$ auch die klassischen Dirichlet- und Neumann-Randbedingungen eine zentrale Rolle. Sie führen auf weitere natürliche Eigenwertprobleme, deren Zusammenhang mit den periodischen und antiperiodischen Eigenwerten im späteren Verlauf der Arbeit untersucht wird.

Definition 1.10. Ein Wert $\lambda \in \mathbb{C}$ heißt *Dirichlet-Eigenwert* der Hill-Gleichung (1.1), falls das Randwertproblem

$$-y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x), \quad y(0) = y(1) = 0,$$

eine nichttriviale Lösung besitzt.

Ein Wert $\lambda \in \mathbb{C}$ heißt *Neumann-Eigenwert* der Hill-Gleichung (1.1), falls das Randwertproblem

$$-y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x), \quad y'(0) = y'(1) = 0,$$

eine nichttriviale Lösung besitzt.

Mithilfe des normierten Fundamentalsystems lassen sich beide Eigenwerttypen unmittelbar charakterisieren.

Proposition 1.11. Für $\lambda \in \mathbb{C}$ gelten die Äquivalenzen

$$\lambda \text{ ist Dirichlet-Eigenwert} \iff y_2(1, \lambda) = 0,$$

sowie

$$\lambda \text{ ist Neumann-Eigenwert} \iff y_1'(1, \lambda) = 0.$$

Beweis. Sei zunächst y eine Lösung von (1.1). Dann besitzt y die Darstellung

$$y(x, \lambda) = c_1 y_1(x, \lambda) + c_2 y_2(x, \lambda)$$

mit Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$.

Angenommen, λ ist ein Dirichlet-Eigenwert. Dann existiert eine nichttriviale Lösung y mit

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0.$$

Aus $y(0) = 0$ folgt wegen

$$y(0) = c_1 y_1(0, \lambda) + c_2 y_2(0, \lambda) = c_1$$

zunächst $c_1 = 0$. Also ist

$$y(x, \lambda) = c_2 y_2(x, \lambda).$$

Da y nichttrivial ist, gilt $c_2 \neq 0$. Aus der zweiten Randbedingung $y(1) = 0$ folgt daher

$$0 = y(1, \lambda) = c_2 y_2(1, \lambda),$$

also

$$y_2(1, \lambda) = 0.$$

Umgekehrt gelte $y_2(1, \lambda) = 0$. Dann erfüllt die nichttriviale Lösung $y_2(x, \lambda)$ die Randbedingungen

$$y_2(0, \lambda) = 0, \quad y_2(1, \lambda) = 0.$$

Folglich ist λ ein Dirichlet-Eigenwert.

Der Beweis für den Neumann-Fall verläuft analog. Ist λ ein Neumann-Eigenwert, so existiert eine nichttriviale Lösung y mit

$$y'(0) = 0, \quad y'(1) = 0.$$

Aus

$$y'(0) = c_1 y_1'(0, \lambda) + c_2 y_2'(0, \lambda) = c_2$$

folgt $c_2 = 0$, also

$$y(x, \lambda) = c_1 y_1(x, \lambda).$$

Da y nichttrivial ist, gilt $c_1 \neq 0$, und aus $y'(1) = 0$ erhält man

$$0 = y'(1, \lambda) = c_1 y_1'(1, \lambda),$$

also

$$y_1'(1, \lambda) = 0.$$

Gilt umgekehrt $y_1'(1, \lambda) = 0$, so erfüllt die nichttriviale Lösung $y_1(x, \lambda)$ die Randbedingungen

$$y_1'(0, \lambda) = 0, \quad y_1'(1, \lambda) = 0.$$

Somit ist λ ein Neumann-Eigenwert. □

Die Funktionen

$$\lambda \mapsto y_2(1, \lambda) \quad \text{und} \quad \lambda \mapsto y_1'(1, \lambda)$$

identifizieren somit die Dirichlet- beziehungsweise Neumann-Eigenwerte als Nullstellen analytischer Funktionen. Diese Randwertprobleme sind jedoch nicht isoliert zu betrachten: Wie im folgenden Kapitel gezeigt wird, bilden sie das Rückgrat für das Verständnis der spektralen Struktur der Hill-Gleichung. Insbesondere ermöglicht die Kenntnis dieser speziellen Eigenwerte eine präzise Einordnung der (anti-)periodischen Eigenwerte und ist damit unerlässlich für den Beweis des Oszillationstheorems.

Kapitel 2

Periodische und antiperiodische Eigenwerte

Nachdem im ersten Kapitel die theoretische Basis der Floquet-Theorie geschaffen wurde, widmen wir uns nun der detaillierten Untersuchung des Spektrums. Das Ziel dieses Kapitels ist es, die in Kapitel 1 hergeleiteten Bedingungen

$$\Delta(\lambda) = 2 \quad \text{bzw.} \quad \Delta(\lambda) = -2$$

analytisch so weit zu durchdringen, dass eine vollständige Charakterisierung der Eigenwertfolge $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ möglich wird.

Ein wesentliches Element dieser Analyse ist die Verknüpfung zwischen der analytischen Gestalt der Diskriminante und den Oszillationseigenschaften der zugehörigen Lösungen. Da wir uns in dieser Arbeit im L^2 -Rahmen bewegen, ist eine einfache qualitative Betrachtung nicht ausreichend. Wir beginnen daher mit einer präzisen Untersuchung des asymptotischen Verhaltens der Fundamentallösungen, um die notwendigen Abschätzungen für den anschließenden Beweis der Monotonie- und Krümmungseigenschaften zu gewinnen.

2.1 Asymptotik der Fundamentallösungen

Um die Existenz von unendlich vielen Eigenwerten zu beweisen und das spätere Oszillationstheorem vorzubereiten, untersuchen wir zunächst das Verhalten der Lösungen für sehr große Parameter λ . Die grundlegende Idee besteht darin, dass für $\lambda \rightarrow \infty$ der Einfluss des Potentials $q(x)$ gegenüber λ vernachlässigbar wird. Die Gleichung verhält sich dann asymptotisch wie die ungestörte Gleichung $-y'' = \lambda y$.

Um dies für Potentiale $q \in L^2([0, 1], \mathbb{R})$ zu fassen, substituieren wir den Spektralparameter durch $\lambda = s^2$ mit $s \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Die ungestörte Gleichung besitzt die Fundamentallösungen $\cos(sx)$ und $\frac{\sin(sx)}{s}$. Mithilfe der Methode der Variation der Konstanten lässt sich die Hill-Gleichung in eine äquivalente Integralgleichung umschreiben.

Lemma 2.1. *(Volterra-Integralgleichungen, vgl. [PT87, Kapitel 1, Theorem 1]) Für $\lambda = s^2 \neq 0$ genügen die normierten Fundamentallösungen y_1 und y_2 der Hill-Gleichung (1.1) den Integralgleichungen*

$$y_1(x, s^2) = \cos(sx) + \frac{1}{s} \int_0^x \sin(s(x-t))q(t)y_1(t, s^2) dt, \quad (2.1)$$

$$y_2(x, s^2) = \frac{\sin(sx)}{s} + \frac{1}{s} \int_0^x \sin(s(x-t))q(t)y_2(t, s^2) dt. \quad (2.2)$$

Der große Vorteil dieser Formulierung ist, dass das Potential q nun unter einem Integral steht. Da $q \in L^2([0, 1])$, lassen sich diese Integrale hervorragend abschätzen (beispielsweise durch sukzessive Approximation oder die Cauchy-Schwarz-Ungleichung), was für reine Differentialgleichungen in dieser Form nicht möglich wäre.

Daraus resultieren die folgenden asymptotischen Abschätzungen für große $|s|$:

Lemma 2.2. *(Asymptotische Abschätzung, vgl. [PT87, Kapitel 1]) Für $s \rightarrow \infty$ (mit $s \in \mathbb{R}$) gelten gleichmäßig für $x \in [0, 1]$ die Abschätzungen*

$$y_1(x, s^2) = \cos(sx) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{s}\right), \quad (2.3)$$

$$y_2(x, s^2) = \frac{\sin(sx)}{s} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{s^2}\right). \quad (2.4)$$

Für die Diskriminante $\Delta(\lambda) = y_1(1, \lambda) + y_2'(1, \lambda)$ ergibt sich daraus insbesondere für reelle $s \rightarrow \infty$ das asymptotische Verhalten

$$\Delta(s^2) = 2 \cos(s) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{s}\right). \quad (2.5)$$

Die in Lemma 2.2 hergeleitete Asymptotik der Diskriminante liefert die entscheidende qualitative Erkenntnis: Für große Parameterwerte verhält sich $\Delta(\lambda)$ wie eine reine Kosinus-Funktion. Dies impliziert nicht nur, dass die Diskriminante die Schranken ± 2 unendlich oft durchkreuzen muss, sondern legt auch die Existenz unendlich vieler Stabilitäts- und Instabilitätsintervalle nahe.

Während diese asymptotische Betrachtung jedoch nur Aussagen für „hinreichend große“ λ erlaubt, liefert das im Folgenden formulierte Oszillationstheorem eine rigorose und globale Beschreibung der gesamten Eigenwertfolge – vom kleinsten Eigenwert λ_0 bis in den Grenzbereich der Asymptotik.

2.2 Oszillationstheorem

Das zentrale Ergebnis dieses Kapitels ist das folgende Theorem, das auf Liapounoff (1907) sowie Haupt (1914, 1918) zurückgeht; vgl. [MW66, Kapitel II, Theorem 2.1]. Es beschreibt vollständig, wie sich die periodischen und antiperiodischen Eigenwerte auf der reellen Achse anordnen, und charakterisiert zugleich die Stabilitätsbereiche der Hill-Gleichung.

Satz 2.3 (Oszillationstheorem). *Sei $q \in L^2([0, 1], \mathbb{R})$. Dann besitzt die Hill-Gleichung (1.1) zwei monoton wachsende Folgen reeller periodischer und antiperiodischer Eigenwerte*

$$\lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 < \lambda_3 \leq \lambda_4 < \dots \quad (2.6)$$

und

$$\lambda'_1 \leq \lambda'_2 < \lambda'_3 \leq \lambda'_4 < \dots, \quad (2.7)$$

die die Verschachtelungsungleichung

$$\lambda_0 < \lambda'_1 \leq \lambda'_2 < \lambda_1 \leq \lambda_2 < \lambda'_3 \leq \lambda'_4 < \lambda_3 \leq \lambda_4 < \dots \quad (2.8)$$

erfüllen. Ferner gilt $\lambda_n \rightarrow \infty$ sowie $\lambda'_n \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$. Die Lösungen der Hill-Gleichung sind genau dann stabil, wenn $|\Delta(\lambda)| < 2$, und die Stabilitätsintervalle sind

$$(\lambda_0, \lambda'_1), \quad (\lambda'_2, \lambda_1), \quad (\lambda_2, \lambda'_3), \quad (\lambda'_4, \lambda_3), \quad \dots$$

An den Randpunkten sind die Lösungen im Allgemeinen instabil; ausgenommen sind die Fälle, in denen zwei benachbarte Eigenwerte zusammenfallen ($\lambda_{2n-1} = \lambda_{2n}$ bzw. $\lambda'_{2n-1} = \lambda'_{2n}$).

2.2.1 Lage der Nullstellen

Der Beweis wird in mehreren Schritten geführt. Wir beginnen mit zwei vorbereitenden Lemmata.

Lemma 2.4. (vgl. [MW66, S. 13f.]) Für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\text{Im}(\lambda) \neq 0$ besitzt die Hill-Gleichung (1.1) keine stabile Lösung.

Beweis. Sei $\lambda = \mu + i\nu$ mit $\mu, \nu \in \mathbb{R}$ und $\nu \neq 0$. Angenommen, y sei eine stabile, also beschränkte Lösung von (1.1). Wir schreiben $y = u + iv$ mit reellen Funktionen u, v . Einsetzen in die Hill-Gleichung und Trennung von Real- und Imaginärteil liefert fast überall auf $\mathbb{R}$

$$u'' = (q(x) - \mu)u + \nu v, \tag{2.9}$$

$$v'' = (q(x) - \mu)v - \nu u. \tag{2.10}$$

Wir multiplizieren (2.9) mit v und (2.10) mit u und subtrahieren:

$$u''v - v''u = \nu(u^2 + v^2).$$

Da $(u'v - v'u)' = u''v - v''u$, folgt durch Integration über $[0, x]$ mittels des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung

$$u'(x)v(x) - v'(x)u(x) = \nu \int_0^x (u(t)^2 + v(t)^2) dt + c \tag{2.11}$$

für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$.

Angenommen, $y = u + iv$ sei eine stabile, also beschränkte Lösung. Nach der Floquet-Theorie [Eas73, Kapitel 1] lässt sich jede beschränkte Lösung der Hill-Gleichung schreiben als

$$y(x) = e^{i\alpha x} p(x),$$

wobei $\alpha \in \mathbb{R}$ und p eine 1-periodische Funktion ist. Da die Lösung y und ihre erste Ableitung y' nach unseren grundlegenden Definitionen absolut stetig und somit insbesondere stetig auf $\mathbb{R}$ sind, gilt dies auch für die periodischen Bausteine. Aus der Stetigkeit und der 1-Periodizität folgt direkt, dass y und y' auf ganz $\mathbb{R}$ global beschränkt sind. Somit sind auch der Real- und Imaginärteil u, v sowie deren Ableitungen u', v' beschränkt. Es gibt daher eine Konstante $C > 0$ mit

$$|u(x)|, |v(x)|, |u'(x)|, |v'(x)| \leq C \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Die linke Seite von (2.11) ist daher für alle $x \in \mathbb{R}$ beschränkt:

$$|u'(x)v(x) - v'(x)u(x)| \leq |u'(x)||v(x)| + |v'(x)||u(x)| \leq C \cdot C + C \cdot C = 2C^2.$$

Für das Integral auf der rechten Seite von (2.11) nutzen wir nun ebenfalls die Floquet-Darstellung. Da $|e^{i\alpha x}| = 1$ ist, gilt

$$u(t)^2 + v(t)^2 = |y(t)|^2 = |p(t)|^2.$$

Da y nicht die Nulllösung ist, gilt $p \not\equiv 0$, und daher

$$\kappa := \int_0^1 |p(t)|^2 dt > 0.$$

Wegen der 1-Periodizität von $|p|^2$ ergibt sich durch Substitution $s = t - k$ für jedes $k \in \mathbb{N}_0$

$$\int_k^{k+1} |p(t)|^2 dt = \int_0^1 |p(s+k)|^2 ds = \int_0^1 |p(s)|^2 ds = \kappa.$$

Durch Zerlegung des Integrationsintervalls folgt daher für alle $n \in \mathbb{N}$

$$I(n) := \int_0^n (u(t)^2 + v(t)^2) dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} |p(t)|^2 dt = n \kappa.$$

Da $\nu \neq 0$, gilt

$$|\nu I(n) + c| \geq |\nu| n \kappa - |c| \longrightarrow \infty \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Dies widerspricht der Beschränktheit der linken Seite von (2.11) durch $2C^2$.

Folglich besitzt die Hill-Gleichung für $\lambda \notin \mathbb{R}$ keine stabile Lösung. $\square$

Für den weiteren Beweis stützen wir uns auf die sogenannten *Basic Estimates* aus Pöschel und Trubowitz [PT87, Kapitel 1, Theorem 3]. Dabei bezeichnen wir mit

$$\|q\|_2 := \|q\|_{L^2([0,1])}$$

die L^2 -Norm des Potentials. Aus diesem Theorem benötigen wir konkret die folgenden beiden Abschätzungen:

Proposition 2.5 (Basic Estimates). *Für alle $x \in [0, 1]$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt*

$$|y_1(x, \lambda) - \cos(\sqrt{\lambda} x)| \leq \frac{1}{|\sqrt{\lambda}|} \exp(|\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}| x + \|q\|_2 \sqrt{x}), \quad (2.12)$$

$$|y_2'(x, \lambda) - \cos(\sqrt{\lambda} x)| \leq \frac{\|q\|_2}{|\sqrt{\lambda}|} \exp(|\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}| x + \|q\|_2 \sqrt{x}). \quad (2.13)$$

Lemma 2.6. (vgl. [MW66, Lemma 2.1]) *Es existiert ein $\lambda^* \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass für alle $\lambda \leq \lambda^*$ gilt*

$$\Delta(\lambda) > 2.$$

Beweis. Sei zunächst $\lambda < 0$ reell und schreibe

$$\lambda = -s^2, \quad s > 0.$$

Dann wählen wir

$$\sqrt{\lambda} = is,$$

sodass

$$\cos(\sqrt{\lambda}x) = \cos(isx) = \cosh(sx).$$

Mit der Wahl $\sqrt{\lambda} = is$ ergibt sich unmittelbar $|\sqrt{\lambda}| = s$ sowie $\operatorname{Im}\sqrt{\lambda} = s$. Unter Berücksichtigung von $\cos(is) = \cosh(s)$ folgt dann für $x = 1$ aus den Abschätzungen (2.12) und (2.13):

$$|y_1(1, \lambda) - \cosh(s)| \leq \frac{1}{s} \exp(s + \|q\|_2), \quad (2.14)$$

$$|y'_2(1, \lambda) - \cosh(s)| \leq \frac{\|q\|_2}{s} \exp(s + \|q\|_2). \quad (2.15)$$

Da

$$\Delta(\lambda) = y_1(1, \lambda) + y'_2(1, \lambda),$$

können wir schreiben

$$y_1(1, \lambda) = \cosh(s) + E_1(s), \quad y'_2(1, \lambda) = \cosh(s) + E_2(s),$$

wobei nach (2.14) und (2.15)

$$|E_1(s)| \leq \frac{1}{s} \exp(s + \|q\|_2), \quad |E_2(s)| \leq \frac{\|q\|_2}{s} \exp(s + \|q\|_2)$$

gilt. Somit folgt

$$\Delta(\lambda) = 2 \cosh(s) + E_1(s) + E_2(s)$$

und daher mit der Dreiecksungleichung

$$\Delta(\lambda) \geq 2 \cosh(s) - |E_1(s)| - |E_2(s)|.$$

Also erhalten wir die Abschätzung

$$\Delta(\lambda) \geq 2 \cosh(s) - \frac{1 + \|q\|_2}{s} \exp(s + \|q\|_2).$$

Mit

$$2 \cosh(s) = e^s + e^{-s}$$

wird daraus

$$\Delta(\lambda) \geq e^s + e^{-s} - \frac{1 + \|q\|_2}{s} e^{\|q\|_2} e^s = e^s \left(1 + e^{-2s} - \frac{1 + \|q\|_2}{s} e^{\|q\|_2} \right).$$

Da

$$1 + e^{-2s} - \frac{1 + \|q\|_2}{s} e^{\|q\|_2} \longrightarrow 1 \quad \text{für } s \rightarrow \infty,$$

existiert ein $s^* > 0$, so dass für alle $s \geq s^*$

$$e^s \left(1 + e^{-2s} - \frac{1 + \|q\|_2}{s} e^{\|q\|_2} \right) > 2$$

gilt. Damit folgt

$$\Delta(-s^2) > 2 \quad \text{für alle } s \geq s^*.$$

Setzt man schließlich

$$\lambda^* := -(s^*)^2,$$

so erhält man für alle $\lambda \leq \lambda^*$ tatsächlich

$$\Delta(\lambda) > 2.$$

Dies beweist die Behauptung. □

Bemerkung 2.7. Lemma 2.6 zeigt insbesondere, dass $\Delta(\lambda) - 2$ für hinreichend große negative reelle λ positiv ist. Diese Information bildet den Ausgangspunkt für die spätere Untersuchung der Nullstellen von

$$\Delta(\lambda) - 2 \quad \text{und} \quad \Delta(\lambda) + 2.$$

Lemma 2.8. (vgl. [MW66, Lemma 2.2]) *Alle Nullstellen der Gleichungen*

$$\Delta(\lambda) - 2 = 0 \quad \text{und} \quad \Delta(\lambda) + 2 = 0$$

sind reell und liegen im Bereich $\lambda > \lambda^$.*

Beweis. Da die Einträge der Monodromiematrix für jedes feste $x \in [0, 1]$ ganze Funktionen in λ sind, ist auch

$$\Delta(\lambda) = y_1(1, \lambda) + y_2'(1, \lambda)$$

eine ganze Funktion von λ , und folglich sind $\Delta(\lambda) - 2$ sowie $\Delta(\lambda) + 2$ ebenfalls ganze Funktionen.

Sei nun $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\text{Im}(\lambda) \neq 0$. Nach Lemma 2.4 besitzt die Hill-Gleichung (1.1) für dieses λ keine stabile Lösung. Da $\Delta(\lambda) = 2$ äquivalent dazu ist, dass $\rho = 1$ ein Floquet-Multiplikator ist, und $\Delta(\lambda) = -2$ äquivalent dazu, dass $\rho = -1$ ein Floquet-Multiplikator ist, würde beides eine beschränkte Lösung liefern. Dies steht im Widerspruch zu Lemma 2.4, sodass $\Delta(\lambda) = \pm 2$ für $\lambda \notin \mathbb{R}$ nicht gelten kann. Alle Nullstellen von $\Delta(\lambda) \pm 2$ sind daher reell.

Nach Lemma 2.6 gilt $\Delta(\lambda) > 2$ für alle $\lambda \leq \lambda^*$, sodass in diesem Bereich weder $\Delta(\lambda) = 2$ noch $\Delta(\lambda) = -2$ möglich ist. Alle Nullstellen von $\Delta(\lambda) \pm 2$ liegen folglich im Bereich $\lambda > \lambda^*$. □

Bemerkung 2.9. Die Nullstellen von $\Delta(\lambda) - 2$ sind genau die periodischen Eigenwerte λ_n , während die Nullstellen von $\Delta(\lambda) + 2$ genau die antiperiodischen Eigenwerte λ'_n sind. Satz 2.8 zeigt daher insbesondere, dass alle periodischen und antiperiodischen Eigenwerte reell und nach unten durch λ^* beschränkt sind.

Lemma 2.10. (vgl. [MW66, Lemma 2.3]) Die Hill-Gleichung (1.1) besitzt eine nichttriviale Lösung der Periode 1 genau dann, wenn $\Delta(\lambda) = 2$, und eine nichttriviale Lösung der Periode 2 genau dann, wenn $\Delta(\lambda) = -2$.

Beweis. Wir betrachten zunächst den Fall $\Delta(\lambda) = 2$. Da die Hill-Gleichung (1.1) keinen Term mit erster Ableitung enthält, folgt aus dem *Satz von Liouville*, dass die Wronski-Determinante

$$W(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)$$

konstant ist. Wegen der Anfangsbedingungen $y_1(0) = 1, y_2'(0) = 1$ sowie $y_1'(0) = 0, y_2(0) = 0$ gilt $W(0) = 1$ und somit für die Monodromiematrix $M(\lambda)$ an der Stelle $x = 1$ stets

$$\det M(\lambda) = W(1) = 1.$$

Unter Verwendung der Spur $\text{tr}(M(\lambda)) = \Delta(\lambda)$ ergibt sich das charakteristische Polynom von $M(\lambda)$ zu

$$P(\rho) = \det(M(\lambda) - \rho I) = \rho^2 - \Delta(\lambda)\rho + 1 = 0.$$

Im betrachteten Fall $\Delta(\lambda) = 2$ vereinfacht sich dies zu

$$\rho^2 - 2\rho + 1 = (\rho - 1)^2 = 0,$$

sodass $\rho_1 = \rho_2 = 1$ der einzige Floquet-Multiplikator ist. Nach der Floquet-Theorie existiert eine nichttriviale Lösung y mit

$$y(x+1) = \rho_1 y(x) = y(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R},$$

also eine Lösung der Periode 1. Umgekehrt impliziert die Existenz einer nichttrivialen Lösung mit $y(x+1) = y(x)$, dass $\rho = 1$ ein Eigenwert von $M(\lambda)$ ist. Wegen

$$\det(M(\lambda) - I) = 1 - \Delta(\lambda) + 1 = 0$$

folgt $\Delta(\lambda) = 2$.

Wir wenden uns nun dem Fall $\Delta(\lambda) = -2$ zu. Das charakteristische Polynom wird zu

$$\rho^2 + 2\rho + 1 = (\rho + 1)^2 = 0,$$

sodass $\rho_1 = \rho_2 = -1$ der einzige Floquet-Multiplikator ist. Nach der Floquet-Theorie existiert eine nichttriviale Lösung y mit

$$y(x+1) = -y(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Durch zweifache Anwendung dieser Eigenschaft ergibt sich

$$y(x+2) = -y(x+1) = -(-y(x)) = y(x),$$

sodass y eine Lösung der Periode 2 ist. Da $y(x+1) = -y(x)$, ist y zugleich antiperiodisch über dem Grundintervall $[0, 1]$. Umgekehrt impliziert die Existenz einer nichttrivialen Lösung mit $y(x+1) = -y(x)$, dass $\rho = -1$ ein Eigenwert von $M(\lambda)$ ist. Wegen

$$\det(M(\lambda) + I) = 1 + \Delta(\lambda) + 1 = 0$$

folgt $\Delta(\lambda) = -2$. □

Bemerkung 2.11. Dieses Lemma identifiziert die periodischen und antiperiodischen Eigenwerte als genau diejenigen Werte λ , für die $\Delta(\lambda) = 2$ beziehungsweise $\Delta(\lambda) = -2$ gilt. Zusammen mit Satz 2.8 folgt daraus, dass alle diese Eigenwerte reell sind und im Bereich $\lambda > \lambda^*$ liegen.

2.2.2 Analytische Hilfsmittel im L^2 -Rahmen

Um das Verhalten der Diskriminante innerhalb der Stabilitätsintervalle zu charakterisieren, formulieren wir nun das zentrale Monotonie-Resultat.

Satz 2.12. (vgl. [MW66, Lemma 2.4]) *[Monotonie in den Stabilitätsintervallen] Sei μ eine Nullstelle von $\Delta(\lambda) - 2 = 0$ mit $\Delta'(\mu) \leq 0$. Dann gilt $\Delta'(\lambda) < 0$ in jedem offenen Intervall $\mu < \lambda < \mu_1^*$, in dem $\Delta(\lambda) > -2$.*

Sei μ' eine Nullstelle von $\Delta(\lambda) + 2 = 0$ mit $\Delta'(\mu') \geq 0$. Dann gilt $\Delta'(\lambda) > 0$ in jedem offenen Intervall $\mu' < \lambda < \mu'_1$, in dem $\Delta(\lambda) < 2$.

Bevor wir Satz 2.12 beweisen, halten wir das folgende Resultat aus [PT87] fest, das im L^2 -Rahmen die Existenz und explizite Darstellung von Lösungen inhomogener Gleichungen sichert.

Proposition 2.13 ([PT87, Kapitel 1, Theorem 2]). *Sei $f \in L^2([0, 1], \mathbb{C})$ sowie $a, b \in \mathbb{C}$. Dann besitzt die inhomogene Gleichung*

$$-y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x) - f(x), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

mit den Anfangsbedingungen $y(0) = a$ und $y'(0) = b$ eine eindeutige Lösung, die gegeben ist durch

$$y(x) = a y_1(x) + b y_2(x) + \int_0^x (y_1(t) y_2(x) - y_1(x) y_2(t)) f(t) dt.$$

Um das Verhalten der Diskriminante $\Delta(\lambda)$ innerhalb der Stabilitätsintervalle (in denen $|\Delta(\lambda)| < 2$ gilt) vollständig zu charakterisieren, müssen wir zeigen, dass die Kurve dort strikt monoton verläuft und nicht umkehrt. Da der Beweis dieser Monotonieeigenschaft technisch anspruchsvoll ist, gliedern wir ihn in mehrere Schritte.

Wir stellen zunächst in zwei vorbereitenden Hilfslemmata die mathematischen Werkzeuge bereit: Das erste Lemma liefert uns durch Variation der Konstanten explizite Integraldarstellungen für die Ableitung $\Delta'(\lambda)$ sowie für den Ausdruck $\Delta^2(\lambda) - 4$. Darauf aufbauend leiten wir in einem zweiten Lemma durch quadratische Ergänzung eine Identität zur Bestimmung des Vorzeichens von $\Delta'(\lambda)$ ab (die sogenannte Signum-Formel).

Ausgestattet mit diesen beiden Bausteinen lässt sich das eigentliche Hauptresultat zur strengen Monotonie (Satz 2.12) anschließend auf sehr elegante Weise durch einen Widerspruchsbeweis führen.

Lemma 2.14 (Integralidentitäten der Diskriminante). *Seien $y_1(x, \lambda)$ und $y_2(x, \lambda)$ die Fundamentallösungen der Hill-Gleichung und $\Delta(\lambda) = y_1(1, \lambda) + y_2'(1, \lambda)$ die Diskriminante. Mit den Kurzschreibweisen für die Auswertungen am Rand $x = 1$,*

$$\eta_1 := y_1(1, \lambda), \quad \eta_2 := y_2(1, \lambda), \quad \eta_1' := y_1'(1, \lambda), \quad \eta_2' := y_2'(1, \lambda),$$

gelten die folgenden Identitäten:

$$\Delta'(\lambda) = (\eta_1 - \eta_2') \int_0^1 y_1(t) y_2(t) dt - \eta_2 \int_0^1 y_1^2(t) dt + \eta_1' \int_0^1 y_2^2(t) dt, \quad (2.16)$$

$$\Delta^2(\lambda) - 4 = (\eta_1 - \eta_2')^2 + 4\eta_1'\eta_2. \quad (2.17)$$

Beweis. Da die Fundamentallösungen y_i die Hill-Gleichung $-y_i'' + qy_i = \lambda y_i$ erfüllen, definieren wir ihre Ableitungen nach dem Parameter λ als

$$z_i(x, \lambda) := \frac{\partial}{\partial \lambda} y_i(x, \lambda), \quad i = 1, 2.$$

Differentiation der Hill-Gleichung nach λ liefert fast überall

$$-z_i'' + qz_i = y_i + \lambda z_i \implies -z_i'' + (q - \lambda)z_i = y_i.$$

Dies ist eine inhomogene Gleichung der Form aus Proposition 2.13 mit dem Störterm $f(x) = -y_i(x)$. Da die Anfangsbedingungen $y_1(0, \lambda) = 1, y_1'(0, \lambda) = 0$ sowie $y_2(0, \lambda) = 0, y_2'(0, \lambda) = 1$ konstant bezüglich λ sind, verschwinden die Anfangswerte der Ableitungen: $z_1(0) = z_1'(0) = 0$ und $z_2(0) = z_2'(0) = 0$.

Proposition 2.13 liefert für z_1 (mit $f = -y_1$) die eindeutige Lösung:

$$\begin{aligned} z_1(x) &= \int_0^x (y_1(t)y_2(x) - y_1(x)y_2(t))(-y_1(t)) dt \\ &= y_1(x) \int_0^x y_1(t)y_2(t) dt - y_2(x) \int_0^x y_1^2(t) dt, \end{aligned}$$

und durch Differentiation nach x :

$$z_1'(x) = y_1'(x) \int_0^x y_1(t)y_2(t) dt - y_2'(x) \int_0^x y_1^2(t) dt.$$

Analog ergibt sich für z_2 mit dem Störterm $f = -y_2$:

$$\begin{aligned} z_2(x) &= \int_0^x (y_1(t)y_2(x) - y_1(x)y_2(t))(-y_2(t)) dt \\ &= y_1(x) \int_0^x y_2^2(t) dt - y_2(x) \int_0^x y_1(t)y_2(t) dt, \end{aligned}$$

und dessen Ableitung:

$$z_2'(x) = y_1'(x) \int_0^x y_2^2(t) dt - y_2'(x) \int_0^x y_1(t)y_2(t) dt.$$

Werden wir nun die Ausdrücke für $z_1(x)$ und $z_2'(x)$ an der Stelle $x = 1$ aus, erhalten wir

mit $\Delta'(\lambda) = z_1(1) + z_2'(1)$ und den Kurzschreibweisen:

$$\begin{aligned}\Delta'(\lambda) &= \left(\eta_1 \int_0^1 y_1 y_2 dt - \eta_2 \int_0^1 y_1^2 dt \right) + \left(\eta_1' \int_0^1 y_2^2 dt - \eta_2' \int_0^1 y_1 y_2 dt \right) \\ &= (\eta_1 - \eta_2') \int_0^1 y_1(t) y_2(t) dt - \eta_2 \int_0^1 y_1^2(t) dt + \eta_1' \int_0^1 y_2^2(t) dt.\end{aligned}$$

Damit ist Gleichung (2.16) gezeigt.

Für die zweite Identität nutzen wir den Satz von Liouville, nach dem für die Wronski-Determinante der Monodromiematrix stets $\det M(\lambda) = \eta_1 \eta_2' - \eta_2 \eta_1' = 1$ gilt. Zusammen mit $\Delta = \eta_1 + \eta_2'$ formen wir den Ausdruck $\Delta^2 - 4$ um:

$$\begin{aligned}\Delta^2 - 4 &= (\eta_1 + \eta_2')^2 - 4(\eta_1 \eta_2' - \eta_2 \eta_1') \\ &= \eta_1^2 + 2\eta_1 \eta_2' + (\eta_2')^2 - 4\eta_1 \eta_2' + 4\eta_2 \eta_1' \\ &= \eta_1^2 - 2\eta_1 \eta_2' + (\eta_2')^2 + 4\eta_1' \eta_2 \\ &= (\eta_1 - \eta_2')^2 + 4\eta_1' \eta_2.\end{aligned}$$

Dies beweist Gleichung (2.17) und schließt den Beweis ab. $\square$

Lemma 2.15 (Die Signum-Formel). *Seien y_1, y_2 die Fundamentallösungen der Hill-Gleichung und $\Delta(\lambda)$ die Diskriminante. Für $\eta_1' \neq 0$ gilt:*

$$\Delta'(\lambda) = \operatorname{sgn}(\eta_1') \left\{ \int_0^1 \left(\sqrt{|\eta_1'|} y_2 + \operatorname{sgn}(\eta_1') \frac{\eta_1 - \eta_2'}{2\sqrt{|\eta_1'|}} y_1 \right)^2 dt - \frac{\Delta^2 - 4}{4|\eta_1'|} \int_0^1 y_1^2 dt \right\}. \quad (2.18)$$

Beweis. Mit der Identität für $\Delta^2 - 4$ lässt sich nun die Monotonie der Diskriminante innerhalb der Stabilitätsintervalle untersuchen. Um zu zeigen, dass $\Delta'(\lambda)$ in diesen Bereichen ein festes Vorzeichen besitzt, überführen wir die Integralform (2.11) unter Verwendung einer quadratischen Ergänzung in die von Magnus & Winkler angegebene Signum-Formel.

Dazu nutzen wir den zuvor hergeleiteten Zusammenhang zwischen der Diskriminante und den Endwerten der Fundamentallösungen, um die Äquivalenz der beiden Darstellungen explizit zu verifizieren:

$$\begin{aligned}\Delta'(\lambda) &= \eta_1' \int_0^1 y_2^2 dt + (\eta_1 - \eta_2') \int_0^1 y_1 y_2 dt - \eta_2 \int_0^1 y_1^2 dt \\ &= \eta_1' \int_0^1 y_2^2 dt + (\eta_1 - \eta_2') \int_0^1 y_1 y_2 dt + \operatorname{sgn} \eta_1' \left[\frac{-4\eta_1' \eta_2}{4|\eta_1'|} \right] \int_0^1 y_1^2 dt \\ &= \eta_1' \int_0^1 y_2^2 dt + (\eta_1 - \eta_2') \int_0^1 y_1 y_2 dt + \operatorname{sgn} \eta_1' \left[\frac{(\eta_1 - \eta_2')^2 - ((\eta_1 - \eta_2')^2 + 4\eta_1' \eta_2)}{4|\eta_1'|} \right] \int_0^1 y_1^2 dt \\ &= \eta_1' \int_0^1 y_2^2 dt + (\eta_1 - \eta_2') \int_0^1 y_1 y_2 dt + \operatorname{sgn} \eta_1' \left[\frac{(\eta_1 - \eta_2')^2 - (\Delta^2 - 4)}{4|\eta_1'|} \right] \int_0^1 y_1^2 dt \\ &= \int_0^1 \eta_1' y_2^2 + (\eta_1 - \eta_2') y_1 y_2 + \operatorname{sgn} \eta_1' \left[\frac{(\eta_1 - \eta_2')^2}{4|\eta_1'|} - \frac{\Delta^2 - 4}{4|\eta_1'|} \right] y_1^2 dt \\ &= \operatorname{sgn} \eta_1' \left\{ \int_0^1 |\eta_1'| y_2^2 + \operatorname{sgn} \eta_1' (\eta_1 - \eta_2') y_1 y_2 + \frac{(\eta_1 - \eta_2')^2}{4|\eta_1'|} y_1^2 dt - \frac{\Delta^2 - 4}{4|\eta_1'|} \int_0^1 y_1^2 dt \right\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \operatorname{sgn} \eta'_1 \left\{ \int_0^1 \left(|\eta'_1| y_2^2 + 2\sqrt{|\eta'_1|} y_2 \operatorname{sgn} \eta'_1 \frac{\eta_1 - \eta'_2}{2\sqrt{|\eta'_1|}} y_1 + \frac{(\eta_1 - \eta'_2)^2}{4|\eta'_1|} y_1^2 \right) dt - \frac{\Delta^2 - 4}{4|\eta'_1|} \int_0^1 y_1^2 dt \right\} \\
\Delta'(\lambda) &= \operatorname{sgn} \eta'_1 \left\{ \int_0^1 \left(\sqrt{|\eta'_1|} y_2 + \operatorname{sgn} \eta'_1 \frac{\eta_1 - \eta'_2}{2\sqrt{|\eta'_1|}} y_1 \right)^2 dt - \frac{\Delta^2 - 4}{4|\eta'_1|} \int_0^1 y_1^2 dt \right\}
\end{aligned}$$

Die hergeleitete Formel ist das entscheidende Werkzeug, um das Vorzeichen der Ableitung der Diskriminante zu bestimmen. $\square$

2.2.3 Verhalten der Diskriminante und Vielfachheit der Eigenwerte

Beweis von Satz 2.12. Die hergeleitete Formel ist das entscheidende Werkzeug, um das Vorzeichen der Ableitung der Diskriminante zu bestimmen:

$$\Delta'(\lambda) = \operatorname{sgn}(\eta'_1) \left\{ \int_0^1 \left(\sqrt{|\eta'_1|} y_2 + \operatorname{sgn}(\eta'_1) \frac{\eta_1 - \eta'_2}{2\sqrt{|\eta'_1|}} y_1 \right)^2 dt - \frac{\Delta^2 - 4}{4|\eta'_1|} \int_0^1 y_1^2 dt \right\} \quad (2.19)$$

Innerhalb eines Stabilitätsintervalls gilt $|\Delta(\lambda)| < 2$, was impliziert, dass $\Delta^2 - 4 < 0$ ist. In diesem Fall wird der Term $-\frac{\Delta^2 - 4}{4|\eta'_1|}$ strikt positiv. Da das erste Integral als Quadrat stets nicht-negativ ist, ist der gesamte Ausdruck in der geschweiften Klammer strikt positiv (sofern $\eta'_1 \neq 0$). Daraus folgt:

$$\operatorname{sgn}(\Delta'(\lambda)) = \operatorname{sgn}(\eta'_1) \neq 0$$

Dies bedeutet, dass die Diskriminante innerhalb der Stabilitätszonen strikt monoton verläuft und nicht umkehren kann.

Um das Lemma vollständig zu beweisen, betrachten wir den Fall $\Delta'(\mu) = 0$ an einer Stelle μ mit $\Delta(\mu) = 2$. Aus der Formel folgt für diesen Fall zwingend $\eta'_1(\mu) = 0$. Unter Verwendung der Identität

$$\Delta^2 - 4 = (\eta_1 - \eta'_2)^2 + 4\eta'_1\eta_2 = 0$$

ergibt sich bei $\eta'_1 = 0$ sofort $\eta_1 = \eta'_2$. Wegen $\Delta = \eta_1 + \eta'_2 = 2$ folgt daraus $\eta_1 = \eta'_2 = 1$. Die Wronski-Determinante liefert dann:

$$\eta_1\eta'_2 - \eta_2\eta'_1 = 1 \cdot 1 - \eta_2 \cdot 0 = 1$$

Setzt man diese Werte in die ursprüngliche Integralform ein, erhält man:

$$\Delta'(\mu) = -\eta_2 \int_0^1 y_1^2 dt = 0 \implies \eta_2(\mu) = 0$$

An einem solchen Punkt μ entspricht die Monodromiematrix somit der Einheitsmatrix.

Um den Beweis zu vervollständigen, muss gezeigt werden, dass $\Delta(\lambda)$ an einer Stelle μ mit $\Delta'(\mu) = 0$ ein striktes lokales Maximum besitzt. Da an diesem Punkt bereits die Identität der Monodromiematrix mit der Einheitsmatrix sowie die daraus resultierenden Randwerte $\eta_1 = 1, \eta'_2 = 1, \eta'_1 = 0$ und $\eta_2 = 0$ nachgewiesen wurden, vereinfacht sich

die Untersuchung der Krümmung erheblich. Wir nutzen hierzu die Ableitungen der η -Werte nach λ , welche den Endwerten der z -Funktionen entsprechen ($\dot{\eta}_1 = z_1(1)$, etc.). Unter Berücksichtigung der zuvor hergeleiteten Integralidentitäten für z_1 und z_2 lässt sich die zweite Ableitung wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned}
\Delta'(\lambda) &= \eta'_1 \int_0^1 y_2^2 dt + (\eta_1 - \eta'_2) \int_0^1 y_1 y_2 dt - \eta_2 \int_0^1 y_1^2 dt \\
\Delta''(\lambda) &= \dot{\eta}'_1 \int_0^1 y_2^2 dt + \eta'_1 \frac{d}{d\lambda} \int_0^1 y_2^2 dt + (\dot{\eta}_1 - \dot{\eta}'_2) \int_0^1 y_1 y_2 dt \\
&\quad + (\eta_1 - \eta'_2) \frac{d}{d\lambda} \int_0^1 y_1 y_2 dt - \dot{\eta}_2 \int_0^1 y_1^2 dt - \eta_2 \frac{d}{d\lambda} \int_0^1 y_1^2 dt \\
\Delta''(\mu) &= \dot{\eta}'_1 \int_0^1 y_2^2 dt + (\dot{\eta}_1 - \dot{\eta}'_2) \int_0^1 y_1 y_2 dt - \dot{\eta}_2 \int_0^1 y_1^2 dt \\
&= z'_1(1) \int_0^1 y_2^2 dt + (z_1(1) - z'_2(1)) \int_0^1 y_1 y_2 dt - z_2(1) \int_0^1 y_1^2 dt \\
&= \left(- \int_0^1 y_1^2 dt \right) \int_0^1 y_2^2 dt + \left(\int_0^1 y_1 y_2 dt + \int_0^1 y_1 y_2 dt \right) \int_0^1 y_1 y_2 dt - \int_0^1 y_2^2 dt \int_0^1 y_1^2 dt \\
&= 2 \left(\int_0^1 y_1 y_2 dt \right)^2 - 2 \int_0^1 y_1^2 dt \int_0^1 y_2^2 dt \\
\Delta''(\mu) &= 2 \left\{ \left(\int_0^1 y_1 y_2 dt \right)^2 - \int_0^1 y_1^2 dt \int_0^1 y_2^2 dt \right\}
\end{aligned}$$

Nach der Cauchy-Schwarz-Ungleichung ist dieser Ausdruck für linear unabhängige Funktionen y_1, y_2 stets strikt negativ:

$$\Delta''(\mu) < 0.$$

Dies beweist, dass Δ bei μ ein lokales Maximum hat und für $\lambda > \mu$ zwingend fallen muss.

Nachdem gezeigt wurde, dass $\Delta(\lambda)$ am Rand $\Delta = 2$ ein striktes Maximum besitzt und somit für $\lambda > \mu$ zunächst fallen muss, stellt sich die Frage, ob die Funktion innerhalb des Stabilitätsintervalls umkehren kann. Angenommen, es gäbe einen kleinsten Wert $\mu^* > \mu$, an dem die Ableitung erneut verschwindet ($\Delta'(\mu^*) = 0$), während die Diskriminante noch innerhalb der Schranken liegt ($\Delta(\mu^*) > -2$).

Für diesen hypothetischen Punkt μ^* gilt nach der Identität:

$$\Delta^2(\mu^*) - 4 = (\eta_1(\mu^*) - \eta'_2(\mu^*))^2 + 4\eta'_1(\mu^*)\eta_2(\mu^*) \quad (2.20)$$

Da wir uns laut Annahme im Bereich $-2 < \Delta(\mu^*) < 2$ befinden, ist die linke Seite der Gleichung zwingend negativ ($\Delta^2 - 4 < 0$). Dies erfordert:

$$(\eta_1 - \eta'_2)^2 + 4\eta'_1\eta_2 < 0 \quad (2.21)$$

Diese Ungleichung ist nur erfüllbar, wenn das Produkt $\eta'_1\eta_2$ negativ ist, was insbesondere impliziert, dass $\eta'_1(\mu^*) \neq 0$ sein muss.

Betrachtet man nun die Signum-Formel an der Stelle μ^* , ergibt sich ein Widerspruch. Da $\eta'_1 \neq 0$ und $\Delta^2 - 4 < 0$ ist, setzt sich der Ausdruck in der geschweiften Klammer

wie folgt zusammen:

- Das Integral über das Quadrat ist stets nicht-negativ (≥ 0).
- Der Term $-\frac{\Delta^2-4}{4|\eta_1|} \int_0^1 y_1^2 dt$ ist aufgrund der negativen Diskriminante und des Vorzeichens strikt positiv (> 0).

Somit folgt aus der Struktur der Formel zwingend:

$$\Delta'(\mu^*) \neq 0 \quad (2.22)$$

Dies steht im direkten Widerspruch zu unserer Annahme $\Delta'(\mu^*) = 0$.

Für den zweiten Teil des Satzes, also den Fall der unteren Schranke $\Delta(\mu') = -2$, verläuft der Beweis strukturell identisch: Hier ergibt sich durch die umgekehrten Vorzeichen ein striktes Minimum mit $\Delta''(\mu') > 0$, und die Betrachtung der Signum-Formel liefert analog $\Delta'(\lambda) > 0$ im Inneren des darauffolgenden Stabilitätsintervalls.

Damit ist vollständig bewiesen, dass die Diskriminante innerhalb der Stabilitätsintervalle nicht umkehren kann und die Monotonie-Aussage des Satzes für beide Schranken gilt. $\square$

Um die Struktur des Spektrums und insbesondere das mögliche Zusammenfallen von Eigenwerten vollständig zu verstehen, betrachten wir abschließend die Vielfachheit der Nullstellen der Gleichung $\Delta^2(\lambda) - 4 = 0$. Die Vorarbeit aus dem vorangegangenen Monotonie-Beweis liefert uns hierfür bereits die entscheidenden Argumente, welche die klassischen Resultate von Magnus & Winkler (vgl. [MW66] Lemma 2.5 und 2.6) für unseren L^2 -Rahmen bestätigen.

Lemma 2.16. (vgl. [MW66, Lemma 2.5]) *[Vielfachheit der Eigenwerte und Start des Spektrums] Für die Nullstellen der Gleichung $f(\lambda) := \Delta^2(\lambda) - 4 = 0$ gilt:*

1. *Jede Nullstelle ist entweder von der Ordnung $k = 1$ (einfach) oder $k = 2$ (zweifach).*
2. *Der kleinste Eigenwert λ_0 ist eine einfache Nullstelle mit $\Delta'(\lambda_0) < 0$.*

Beweis. Zu 1. (Vielfachheit): Sei μ eine Nullstelle von $f(\lambda)$. Die Ordnung einer Nullstelle ist durch die kleinste Ableitung bestimmt, die an dieser Stelle nicht verschwindet. Für die erste Ableitung von f gilt:

$$f'(\lambda) = 2\Delta(\lambda)\Delta'(\lambda).$$

Falls $\Delta'(\mu) \neq 0$ gilt, ist $f'(\mu) \neq 0$, woraus unmittelbar folgt, dass μ eine einfache Nullstelle ist.

Gilt hingegen $\Delta'(\mu) = 0$, so verschwindet die erste Ableitung $f'(\mu)$. Für die zweite Ableitung ergibt sich an dieser Stelle:

$$f''(\mu) = 2 \left(\Delta'(\mu)^2 + \Delta(\mu)\Delta''(\mu) \right) = 2\Delta(\mu)\Delta''(\mu).$$

Wie zuvor mittels der Integralidentitäten und der Cauchy-Schwarz-Ungleichung bewiesen wurde, gilt $\Delta''(\mu) < 0$ für $\Delta(\mu) = 2$ und $\Delta''(\mu) > 0$ für $\Delta(\mu) = -2$. In beiden Fällen folgt $f''(\mu) \neq 0$. Da die zweite Ableitung an allen kritischen Punkten nicht verschwindet, ist die Ordnung der Nullstellen auf maximal 2 begrenzt.

Zu 2. (*Start des Spektrums*): Aus der asymptotischen Untersuchung für $\lambda \rightarrow -\infty$ (vgl. Lemma 2.6) folgt $\Delta(\lambda) > 2$ für alle $\lambda < \lambda_0$. Wäre λ_0 eine doppelte Nullstelle, so müsste $\Delta'(\lambda_0) = 0$ gelten. Nach Teil 1 dieser Argumentation impliziert dies jedoch, dass Δ bei λ_0 ein striktes lokales Maximum besitzt ($\Delta''(\lambda_0) < 0$). Dies steht im Widerspruch dazu, dass $\Delta(\lambda)$ für $\lambda < \lambda_0$ ausschließlich Werte größer als 2 annimmt. Somit muss $\Delta'(\lambda_0) \neq 0$ gelten. Da die Funktion stetig differenzierbar ist und von Werten > 2 kommt, muss die Steigung beim Durchgang durch die Schranke negativ sein, also $\Delta'(\lambda_0) < 0$. $\square$

Diese analytische Eigenschaft hat direkte Auswirkungen auf die Dimension der zugehörigen Eigenräume.

Korollar 2.17 (Schließen von Instabilitätsintervallen, vgl. [MW66]). *Die Hill-Gleichung besitzt für einen Wert λ genau dann zwei linear unabhängige (anti-)periodische Lösungen, wenn λ eine doppelte Nullstelle von $\Delta^2(\lambda) - 4 = 0$ ist. In diesem Fall ist die geometrische Vielfachheit gleich der algebraischen Vielfachheit, und das entsprechende Instabilitätsintervall verschwindet.*

Beweis. Die Existenz zweier linear unabhängiger Lösungen mit der gleichen Periode ist äquivalent zu der Bedingung, dass die Monodromiematrix $M(\lambda)$ der Einheitsmatrix oder deren Negativen entspricht, $M(\lambda) = \pm I$. Dies erfordert $\Delta(\lambda) = \text{Spur}(M) = \pm 2$ sowie das Verschwinden der Nebendiagonalelemente $\eta'_1 = \eta_2 = 0$. Wie im Rahmen der Herleitung der Signum-Formel gezeigt wurde, ist die Bedingung $\Delta'(\mu) = 0$ an einer Stelle $\Delta(\mu) = \pm 2$ für $q \in L^2$ äquivalent zu jeder Identität $M(\lambda) = \pm I$. Dass umgekehrt aus $M(\lambda) = \pm I$ mit $\eta_2 = \eta'_1 = 0$ direkt $\Delta'(\lambda) = 0$ resultiert, folgt unmittelbar aus der Integralformel (vgl. Lemma 2.8). Da $\Delta'(\mu) = 0$ wiederum die notwendige und hinreichende Bedingung für eine algebraische Vielfachheit von 2 ist (da $\Delta'' \neq 0$), folgt die Behauptung. $\square$

2.2.4 Instabilitätsintervalle und Spektrallücken

Aus der Monotonie der Diskriminante und der maximal zweifachen Vielfachheit der Eigenwerte ergibt sich eine klare Einteilung der reellen Achse.

Definition 2.18 (Spektrallücken und Bänder). Die offenen Intervalle

$$I_n = (\lambda'_{2n-1}, \lambda'_{2n}) \quad \text{und} \quad J_n = (\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n})$$

heißen *Instabilitätsintervalle* oder *Spektrallücken* (Gaps). In diesen Bereichen gilt $|\Delta(\lambda)| > 2$. Die komplementären abgeschlossenen Intervalle, in denen $|\Delta(\lambda)| \leq 2$ gilt, werden als *Stabilitätsintervalle* oder *Spektralbänder* bezeichnet.

Bemerkung 2.19 (Stetigkeit und Oszillationseigenschaften). Zur Vervollständigung der spektralen Einordnung sind zwei fundamentale Eigenschaften hervorzuheben. Erstens hängen die Eigenwerte λ_n stetig vom Potential $q \in L^2$ ab. Da die Diskriminante eine analytische Funktion in λ ist, bilden die Eigenwertzweige stetige Kurven, was die strikte Sortierung und das paarweise Auftreten der Nullstellen absichert (vgl. [Eas73, Kapitel 2]).

Zweitens beruht die Zuordnung der Indizes n auf der Monotonie der Nullstellenanzahl der Eigenfunktionen. Mit wachsendem λ nimmt die Anzahl der Nullstellen einer Lösung $y(x, \lambda)$ im Intervall $[0, 1]$ monoton zu. Diese klassische Eigenschaft der Sturm-Liouville-Theorie stellt sicher, dass jedem Stabilitätsintervall eine eindeutige Oszillationszahl zugeordnet werden kann, was die Abzählung im Oszillationstheorem erst ermöglicht.

Fazit: Existenz der Eigenwertfolge und das Oszillationstheorem

Durch die Kombination der Monotonie-Analyse und der Untersuchung der Randextrema haben wir nun sichergestellt, dass die Diskriminante $\Delta(\lambda)$ geordnet zwischen den Werten $+2$ und -2 oszilliert. Dies beweist die Existenz einer unendlichen Folge von Eigenwerten mit der charakteristischen Verschachtelungsstruktur:

$$\lambda_0 < \lambda'_1 \leq \lambda'_2 < \lambda_1 \leq \lambda_2 < \lambda'_3 \dots$$

Dabei bilden die offenen Intervalle $(\lambda'_{2n-1}, \lambda'_{2n})$ und $(\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n})$ die Instabilitätszonen (Gaps), in denen $|\Delta(\lambda)| > 2$ gilt und die Lösungen der Hill-Gleichung unbeschränkt sind.

An dieser Stelle ist noch eine methodische Besonderheit des Beweises zu erwähnen: Die grundlegende und sehr anschauliche Beweisidee für die Monotonie orientiert sich an Magnus & Winkler. Deren Ansatz setzt allerdings glatte (oder zumindest stetige) Potentiale voraus. Ein wesentlicher Teil der Arbeit in diesem Abschnitt bestand daher darin, diese Beweisstruktur auf den allgemeineren Fall von L^2 -Potentialen zu übertragen. Um dies zu rechtfertigen, wurden die Integralidentitäten für $\Delta'(\lambda)$ und $\Delta''(\lambda)$ über die *Basic Estimates* und die Variation der Konstanten (nach Pöschel & Trubowitz) neu hergeleitet. So konnte sichergestellt werden, dass die elegante Signum-Formel auch im L^2 -Rahmen mathematisch sauber angewendet werden darf.

Die eigentliche Dynamik des Beweises beruht dann auf genau dieser Signum-Formel für die erste Ableitung:

$$\Delta'(\lambda) = \text{sgn}(\eta'_1) \left\{ \int_0^1 \left(\sqrt{|\eta'_1|} y_2 + \text{sgn}(\eta'_1) \frac{\eta_1 - \eta'_2}{2\sqrt{|\eta'_1|}} y_1 \right)^2 dt - \frac{\Delta^2 - 4}{4|\eta'_1|} \int_0^1 y_1^2 dt \right\} \quad (2.23)$$

Solange wir uns im Inneren der Stabilitätszonen befinden ($|\Delta(\lambda)| < 2$), ist der Term $\Delta^2 - 4 < 0$. Dadurch wird der zweite Term in der geschweiften Klammer strikt positiv. Da das Integral über das Quadrat ohnehin nicht-negativ ist, folgt daraus sofort, dass $\Delta'(\lambda)$ im Inneren der Stabilitätszonen niemals null werden kann. Ein Umkehren der Funktion (also ein lokales Extremum) ist dort somit ausgeschlossen.

Gleichzeitig zeigt die Untersuchung der Randpunkte (z. B. an einer Stelle μ mit $\Delta(\mu) = 2$ und $\Delta'(\mu) \leq 0$) mithilfe der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$\left(\int_0^1 y_1 y_2 dt \right)^2 < \int_0^1 y_1^2 dt \cdot \int_0^1 y_2^2 dt, \quad (2.24)$$

dass aus $\Delta'(\mu) = 0$ zwingend $\Delta''(\mu) < 0$ folgt. Es muss dort also ein striktes lokales Maximum vorliegen. Wenn wir nun annehmen würden, es gäbe einen weiteren Umkehrpunkt

$\mu^* > \mu$, bevor die untere Schranke -2 erreicht wird, liefert uns die Vorzeichenanalyse von $\Delta'(\lambda)$ direkt einen Widerspruch.

Folglich muss die Diskriminante in jedem Intervall mit $|\Delta(\lambda)| < 2$ strikt monoton von einer Schranke zur anderen verlaufen. Da die Argumentation für die untere Schranke ($\Delta = -2$) völlig analog funktioniert, ist das oszillierende Verhalten der Diskriminante und damit die Existenz der Eigenwertfolge gemäß Theorem 2.1 vollständig bewiesen.

Kapitel 3

Dirichlet- und Neumann-Eigenwerte im L^2 -Rahmen

Mit dem Oszillationstheorem und der formalen Definition der Spektrallücken wurde im vorangegangenen Kapitel das fundamentale Gerüst des Spektrums errichtet. Um die genaue Position und Breite dieser Instabilitätsintervalle zu erfassen, betrachten wir nun die klassischen Dirichlet- und Neumann-Randwertprobleme zur Hill-Gleichung. Ziel dieses Kapitels ist es, die entsprechenden Eigenwerte im L^2 -Rahmen präzise zu definieren und zu beweisen, dass sie stets im Inneren (bzw. auf dem Rand) dieser Spektrallücken liegen, woraus sich unmittelbar ihre strukturelle Einfachheit ergibt. Die grundlegende Methodik, die Spektrallücken über diese speziellen Randwertprobleme zu analysieren, folgt dabei den klassischen Überlegungen von Eastham (vgl. [Eas73, Kapitel 3]), welche hier auf den L^2 -Rahmen übertragen werden.

Im gesamten Kapitel sei $q \in L^2([0, 1], \mathbb{R})$. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$-y'' + qy = \lambda y \tag{3.1}$$

auf dem Intervall $[0, 1]$. Wie zuvor bezeichnen $y_1(\cdot, \lambda)$ und $y_2(\cdot, \lambda)$ das kanonische Fundamentalsystem von (3.1), welches durch die Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} y_1(0, \lambda) &= 1, & y_1'(0, \lambda) &= 0, \\ y_2(0, \lambda) &= 0, & y_2'(0, \lambda) &= 1 \end{aligned}$$

eindeutig festgelegt ist.

3.1 Definition und Charakterisierung der Randwertprobleme

Zunächst definieren wir die beiden klassischen Randwertprobleme und leiten deren charakteristische Gleichungen mithilfe des Fundamentalsystems her. Gemäß der gängigen Literatur bezeichnen wir die Dirichlet-Eigenwerte mit $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und die Neumann-Eigenwerte mit $(\nu_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$.

Definition 3.1 (Dirichlet- und Neumann-Eigenwerte). Ein Wert $\lambda \in \mathbb{R}$ heißt

1. *Dirichlet-Eigenwert* (μ_n) , falls eine nichttriviale Lösung y von (3.1) die Randbedingungen $y(0) = 0$ und $y(1) = 0$ erfüllt.
2. *Neumann-Eigenwert* (ν_n) , falls eine nichttriviale Lösung y von (3.1) die Randbedingungen $y'(0) = 0$ und $y'(1) = 0$ erfüllt.

Die Suche nach diesen Eigenwerten lässt sich auf die Bestimmung der Nullstellen der sogenannten charakteristischen Funktionen zurückführen.

Lemma 3.2. *Ein Wert $\lambda \in \mathbb{R}$ ist genau dann ein Eigenwert des jeweiligen Randwertproblems, wenn gilt:*

1. **Dirichlet:** $y_2(1, \lambda) = 0$
2. **Neumann:** $y_1'(1, \lambda) = 0$

Beweis. Jede Lösung y der Hill-Gleichung (3.1) lässt sich als Linearkombination $y(x, \lambda) = c_1 y_1(x, \lambda) + c_2 y_2(x, \lambda)$ darstellen.

Für das **Dirichlet-Problem** liefert die Bedingung $y(0) = 0$ wegen der Anfangswerte $y_1(0, \lambda) = 1$ und $y_2(0, \lambda) = 0$ die Gleichung $c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 = 0$, also $c_1 = 0$. Eine nichttriviale Lösung ($c_2 \neq 0$) erfüllt die zweite Randbedingung $y(1) = 0$ somit genau dann, wenn $y_2(1, \lambda) = 0$ gilt.

Analog betrachten wir für das **Neumann-Problem** die Ableitung $y'(x, \lambda) = c_1 y_1'(x, \lambda) + c_2 y_2'(x, \lambda)$. Hier liefert $y'(0) = 0$ aufgrund von $y_1'(0, \lambda) = 0$ und $y_2'(0, \lambda) = 1$ sofort $c_2 = 0$. Die Bedingung $y'(1) = 0$ ist für eine nichttriviale Lösung ($c_1 \neq 0$) folglich äquivalent zu $y_1'(1, \lambda) = 0$. $\square$

Definition 3.3 (Charakteristische Funktionen). Die Funktionen

$$d(\lambda) := y_2(1, \lambda) \quad \text{und} \quad n(\lambda) := y_1'(1, \lambda)$$

werden als charakteristische Funktionen des Dirichlet- bzw. Neumann-Problems bezeichnet.

3.2 Analyse der Dirichlet-Eigenwerte

3.2.1 Lage der Dirichlet-Eigenwerte

Um die Lage der Dirichlet-Eigenwerte bezüglich der Stabilitäts- und Instabilitätsintervalle zu bestimmen, untersuchen wir die charakteristischen Eigenschaften der Monodromiematrix

$$M(\lambda) = \begin{pmatrix} y_1(1, \lambda) & y_2(1, \lambda) \\ y_1'(1, \lambda) & y_2'(1, \lambda) \end{pmatrix}.$$

Die Diskriminante $\Delta(\lambda)$ der Hill-Gleichung ist durch die Spur dieser Matrix gegeben:

$$\Delta(\lambda) = y_1(1, \lambda) + y_2'(1, \lambda).$$

Da die Wronski-Determinante des Fundamentalsystems konstant 1 ist, gilt zudem für alle $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$y_1(1, \lambda) y_2'(1, \lambda) - y_2(1, \lambda) y_1'(1, \lambda) = 1. \quad (3.2)$$

Lemma 3.4. *(Lage der Dirichlet-Eigenwerte, vgl. [Eas73, Theorem 3.1.1]) Jeder Dirichlet-Eigenwert μ_n der Hill-Gleichung (3.1) liegt in einem Instabilitätsintervall oder exakt auf dessen Rand. Es gilt folglich*

$$|\Delta(\mu_n)| \geq 2 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Beweis. Sei μ ein Dirichlet-Eigenwert. Gemäß Lemma 3.2 gilt $y_2(1, \mu) = 0$. Setzen wir dies in die Determinantengleichung (3.2) ein, so entfällt der zweite Term und wir erhalten:

$$y_1(1, \mu)y_2'(1, \mu) = 1.$$

Daraus folgt, dass $y_1(1, \mu) \neq 0$ ist und $y_2'(1, \mu) = \frac{1}{y_1(1, \mu)}$ gilt. Für die Diskriminante an der Stelle des Eigenwerts μ ergibt sich somit:

$$\Delta(\mu) = y_1(1, \mu) + y_2'(1, \mu) = y_1(1, \mu) + \frac{1}{y_1(1, \mu)}.$$

Aus der elementaren Analysis ist bekannt, dass für jede reelle Zahl $x \neq 0$ die Ungleichung $|x + x^{-1}| \geq 2$ gilt. Wenden wir dies auf $x = y_1(1, \mu)$ an, so folgt unmittelbar:

$$|\Delta(\mu)| \geq 2.$$

□

Im Hinblick auf den darauffolgenden Existenzbeweis untersuchen wir zudem das Verhalten der Matrixeinträge an den Rändern dieser Instabilitätsintervalle, an denen $|\Delta(\lambda)| = 2$ gilt.

Lemma 3.5. *(Vorzeichenbeziehung an den Gap-Rändern, vgl. [Eas73, S. 38f.]) An den Rändern der Instabilitätsintervalle gilt für das Produkt der Nebendiagonalelemente der Monodromiematrix stets:*

$$y_2(1, \lambda)y_1'(1, \lambda) \leq 0.$$

Beweis. Wir betrachten den Fall, dass an einem Rand $\Delta(\lambda) = y_1(1, \lambda) + y_2'(1, \lambda) = 2$ gilt (der Beweis für $\Delta(\lambda) = -2$ verläuft völlig analog). Umstellen dieser Gleichung nach $y_2'(1, \lambda)$ liefert:

$$y_2'(1, \lambda) = 2 - y_1(1, \lambda).$$

Setzen wir diesen Ausdruck in die Determinantengleichung (3.2) ein, erhalten wir:

$$y_1(1, \lambda)(2 - y_1(1, \lambda)) - y_2(1, \lambda)y_1'(1, \lambda) = 1.$$

Durch Ausmultiplizieren und algebraische Umformung ergibt sich:

$$\begin{aligned} 2y_1(1, \lambda) - y_1(1, \lambda)^2 - 1 &= y_2(1, \lambda)y_1'(1, \lambda) \\ -(y_1(1, \lambda)^2 - 2y_1(1, \lambda) + 1) &= y_2(1, \lambda)y_1'(1, \lambda) \\ -(y_1(1, \lambda) - 1)^2 &= y_2(1, \lambda)y_1'(1, \lambda). \end{aligned}$$

Da das Quadrat reeller Zahlen stets nichtnegativ ist, also $(y_1(1, \lambda) - 1)^2 \geq 0$, muss das Produkt auf der rechten Seite zwingend kleiner oder gleich Null sein. □

3.2.2 Existenz der Dirichlet-Eigenwerte

Nachdem wir gezeigt haben, dass sich mögliche Dirichlet-Eigenwerte zwingend in den Instabilitätsintervallen (oder auf deren Rand) befinden müssen, beweisen wir nun, dass in jedem dieser Intervalle tatsächlich mindestens ein solcher Eigenwert existiert.

Hierzu analysieren wir das Verhalten der charakteristischen Funktion $y_2(1, \lambda)$ an den Rändern der Gaps.

Lemma 3.6. (vgl. [Eas73, S. 38]) *In jedem Instabilitätsintervall $(\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n})$ bzw. $(\lambda'_{2n-1}, \lambda'_{2n})$ existiert mindestens ein Dirichlet-Eigenwert μ .*

Beweis. Wir betrachten exemplarisch ein Instabilitätsintervall $(\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n})$, an dessen Rändern $\Delta(\lambda) = 2$ gilt (der Fall für -2 verläuft völlig analog).

Da es sich um ein Instabilitätsintervall handelt, gilt im Inneren $\lambda \in (\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n})$ strikt $\Delta(\lambda) > 2$. Die stetig differenzierbare Funktion $\Delta(\lambda)$ startet also am linken Rand bei 2, steigt an und fällt zum rechten Rand hin wieder auf 2 ab. Daraus ergeben sich zwingend die Vorzeichen der Ableitung an den Intervallgrenzen:

$$\Delta'(\lambda_{2n-1}) > 0 \quad \text{und} \quad \Delta'(\lambda_{2n}) < 0. \quad (3.3)$$

(Die strikte Ungleichheit gilt, da die periodischen Eigenwerte an den Rändern offener Gaps einfach sind).

Um eine direkte Verbindung zur charakteristischen Funktion $y_2(1, \lambda)$ herzustellen, nutzen wir die in Magnus & Winkler hergeleitete Integralidentität für die Ableitung der Diskriminante:

$$\Delta'(\lambda) = \left(y_1(1, \lambda) - y'_2(1, \lambda) \right) \int_0^1 y_1 y_2 \, dx - y_2(1, \lambda) \int_0^1 y_1^2 \, dx + y'_1(1, \lambda) \int_0^1 y_2^2 \, dx. \quad (3.4)$$

An den Rändern des Gaps gilt $\Delta(\lambda) = 2$, woraus $y'_2(1, \lambda) = 2 - y_1(1, \lambda)$ folgt. Aus dem Beweis zu Lemma 3.5 wissen wir zudem, dass dort $y'_1(1, \lambda) = -\frac{(y_1(1, \lambda) - 1)^2}{y_2(1, \lambda)}$ gilt, sofern $y_2(1, \lambda) \neq 0$ ist (wäre $y_2 = 0$, hätten wir den Dirichlet-Eigenwert bereits gefunden).

Setzen wir diese Randbedingungen in (3.4) ein und klammern den Vorfaktor $-\frac{1}{y_2(1, \lambda)}$ aus, lässt sich der Ausdruck durch quadratische Ergänzung zu einem vollständigen Quadrat zusammenfassen:

$$\begin{aligned} \Delta'(\lambda) &= -\frac{1}{y_2(1, \lambda)} \left[-2y_2(y_1 - 1) \int_0^1 y_1 y_2 \, dx + y_2^2 \int_0^1 y_1^2 \, dx + (y_1 - 1)^2 \int_0^1 y_2^2 \, dx \right] \\ &= -\frac{1}{y_2(1, \lambda)} \int_0^1 \left[y_2(1, \lambda) y_1(x, \lambda) - (y_1(1, \lambda) - 1) y_2(x, \lambda) \right]^2 \, dx. \end{aligned}$$

Da das Integral über das Quadrat einer nichttrivialen Lösung strikt positiv ist, erzwingt diese Identität an den Gap-Rändern eine klare Vorzeichenkopplung:

$$\operatorname{sgn}(\Delta'(\lambda)) = -\operatorname{sgn}(y_2(1, \lambda)).$$

Wenden wir dies auf unsere Erkenntnis aus (3.3) an, folgt sofort:

$$\begin{aligned} \Delta'(\lambda_{2n-1}) > 0 &\implies y_2(1, \lambda_{2n-1}) < 0, \\ \Delta'(\lambda_{2n}) < 0 &\implies y_2(1, \lambda_{2n}) > 0. \end{aligned}$$

Die stetige charakteristische Funktion $\lambda \mapsto y_2(1, \lambda)$ nimmt somit an den Rändern des Instabilitätsintervalls unterschiedliche Vorzeichen an. Nach dem Zwischenwertsatz der

Analysis muss folglich mindestens ein $\mu \in (\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n})$ existieren mit:

$$y_2(1, \mu) = 0.$$

Nach Lemma 3.2 ist dieses μ ein Dirichlet-Eigenwert der Hill-Gleichung. $\square$

3.2.3 Einfachheit der Dirichlet-Eigenwerte

Nachdem durch Lemma 3.6 die Existenz mindestens eines Dirichlet-Eigenwerts pro Instabilitätsintervall gesichert ist, bleibt zu zeigen, dass dieser Eigenwert eindeutig ist. Um die strikte Einfachheit für den allgemeinen Fall von L^2 -Potentialen zu garantieren, stützen wir uns im Folgenden auf die analytischen Eigenschaften der λ -Ableitungen der Fundamentallösungen, wie sie in der Literatur zur inversen Spektraltheorie (vgl. [PT87, Kapitel 2]) hergeleitet werden. Dies erfordert zunächst den Nachweis, dass der zugehörige Eigenraum eindimensional ist (geometrische Einfachheit) und die charakteristische Gleichung an der Stelle des Eigenwerts eine einfache Nullstelle besitzt (algebraische Einfachheit). Da dies allein jedoch nicht ausschließt, dass mehrere solcher einfachen Eigenwerte in derselben Lücke liegen, folgern wir daraus abschließend in Korollar 3.8 die Existenz von exakt einem Dirichlet-Eigenwert pro Spektrallücke.

Lemma 3.7 (Einfachheit der Dirichlet-Eigenwerte, vgl. [PT87]). *Jeder Dirichlet-Eigenwert $\mu \in \mathbb{R}$ der Hill-Gleichung ist einfach. Insbesondere gilt für die Ableitung nach dem Spektralparameter:*

$$\dot{y}_2(1, \mu) \neq 0.$$

Beweis. 1. Geometrische Einfachheit:

Sei μ ein Dirichlet-Eigenwert. Jede zugehörige Eigenfunktion y ist eine Linearkombination des Fundamentalsystems: $y(x) = c_1 y_1(x, \mu) + c_2 y_2(x, \mu)$. Die Randbedingung $y(0) = 0$ liefert wegen $y_1(0, \mu) = 1$ und $y_2(0, \mu) = 0$ zwingend $c_1 = 0$. Folglich ist jede Eigenfunktion ein skalares Vielfaches von $y_2(\cdot, \mu)$. Der Eigenraum ist somit eindimensional.

2. Algebraische Einfachheit:

Wir bezeichnen die Ableitung nach dem Spektralparameter λ im Folgenden mit einem Punkt, also $\dot{y} := \frac{\partial y}{\partial \lambda}$. Wir betrachten die Hill-Gleichung für die Funktion $y_2(x, \lambda)$ und differenzieren diese partiell nach λ :

$$-y_2'' + qy_2 = \lambda y_2 \tag{3.5}$$

$$-\dot{y}_2'' + q\dot{y}_2 = y_2 + \lambda \dot{y}_2 \tag{3.6}$$

Multiplizieren wir Gleichung (3.6) mit y_2 und subtrahieren davon die mit $\dot{y}_2$ multiplizierte Gleichung (3.5), so entfallen die Terme mit q und λ :

$$-\dot{y}_2'' y_2 + y_2'' \dot{y}_2 = y_2^2.$$

Um die linke Seite als vollständige Ableitung schreiben zu können, addieren wir eine

Nullergänzung, welche exakt den gemischten Termen der Produktregel entspricht:

$$\begin{aligned} y_2'' \dot{y}_2 - \dot{y}_2'' y_2 &= y_2^2 \\ y_2'' \dot{y}_2 + y_2' \dot{y}_2' - \dot{y}_2' y_2' - \dot{y}_2'' y_2 &= y_2^2 \\ \frac{d}{dx} (y_2' \dot{y}_2 - \dot{y}_2' y_2) &= y_2^2. \end{aligned}$$

Integration dieser Identität über das Intervall $[0, 1]$ liefert nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:

$$\int_0^1 y_2^2(x, \lambda) dx = \left[y_2'(x, \lambda) \dot{y}_2(x, \lambda) - \dot{y}_2'(x, \lambda) y_2(x, \lambda) \right]_0^1. \quad (3.7)$$

Nun werten wir diese Gleichung an der Stelle eines Dirichlet-Eigenwerts $\lambda = \mu$ aus. Am linken Rand ($x = 0$) gilt für alle λ konstant $y_2(0, \lambda) = 0$ und $y_2'(0, \lambda) = 1$. Die Ableitungen dieser Konstanten nach λ verschwinden, also $\dot{y}_2(0, \mu) = 0$ und $\dot{y}_2'(0, \mu) = 0$. Der gesamte Randterm bei $x = 0$ ist somit null. Am rechten Rand ($x = 1$) gilt aufgrund der Dirichlet-Randbedingung $y_2(1, \mu) = 0$.

Eingesetzt in (3.7) verbleibt lediglich:

$$\int_0^1 y_2^2(x, \mu) dx = y_2'(1, \mu) \dot{y}_2(1, \mu).$$

Da $y_2(\cdot, \mu)$ eine nichttriviale Eigenfunktion ist, ist das Integral strikt positiv ($\|y_2\|^2 > 0$). Folglich muss gelten:

$$y_2'(1, \mu) \dot{y}_2(1, \mu) > 0.$$

Dies impliziert zwingend, dass keiner der beiden Faktoren null sein darf. Insbesondere gilt $\dot{y}_2(1, \mu) \neq 0$. Die charakteristische Funktion besitzt an der Stelle μ somit eine einfache Nullstelle. $\square$

Die in Lemma 3.7 bewiesene Einfachheit der Nullstellen erlaubt es uns nun, im Zusammenspiel mit der Struktur der Monodromiematrix, eine weitreichende Aussage über die exakte Anzahl der Dirichlet-Eigenwerte pro Instabilitätsintervall zu treffen.

Korollar 3.8 (Exakte Anzahl der Dirichlet-Eigenwerte). *In jedem Instabilitätsintervall (einschließlich seiner Ränder) liegt exakt ein Dirichlet-Eigenwert.*

Beweis. Sei μ ein Dirichlet-Eigenwert, also $y_2(1, \mu) = 0$. Die Monodromiematrix an der Stelle μ nimmt dadurch die Form einer unteren Dreiecksmatrix an:

$$M(\mu) = \begin{pmatrix} y_1(1, \mu) & 0 \\ y_1'(1, \mu) & y_2'(1, \mu) \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte dieser Matrix sind exakt ihre Diagonaleinträge. Da die Wronski-Determinante stets $\det M(\mu) = 1$ erfüllt, folgt zwingend $y_1(1, \mu) = \frac{1}{y_2'(1, \mu)}$. Für die Diskriminante (die Spur der Matrix) ergibt sich somit:

$$\Delta(\mu) = y_2'(1, \mu) + \frac{1}{y_2'(1, \mu)}.$$

Diese Identität liefert eine entscheidende Vorzeichenkopplung: Das Vorzeichen von $y_2'(1, \mu)$ entspricht exakt dem Vorzeichen von $\Delta(\mu)$. Befinden wir uns in einem Instabilitätsintervall mit $\Delta(\mu) \geq 2$, so ist zwingend $y_2'(1, \mu) > 0$. Für Intervalle mit $\Delta(\mu) \leq -2$ gilt entsprechend $y_2'(1, \mu) < 0$.

Aus dem Beweis von Lemma 3.7 wissen wir zudem, dass für die Ableitung der charakteristischen Funktion nach dem Spektralparameter λ an der Stelle μ gilt:

$$\dot{y}_2(1, \mu) \cdot y_2'(1, \mu) = \int_0^1 y_2^2(x, \mu) dx > 0.$$

Dies bedeutet, dass $\dot{y}_2(1, \mu)$ und $y_2'(1, \mu)$ stets dasselbe Vorzeichen besitzen. Kombiniert man dies mit der Vorzeichenkopplung der Diskriminante, folgt unmittelbar:

$$\operatorname{sgn}(\dot{y}_2(1, \mu)) = \operatorname{sgn}(\Delta(\mu)).$$

Diese Gleichung bedeutet geometrisch, dass die charakteristische Funktion $\lambda \mapsto y_2(1, \lambda)$ in Instabilitätsintervallen mit $\Delta \geq 2$ die Nulllinie *ausschließlich* mit einer strikt positiven Steigung (von unten nach oben) kreuzen kann. In Intervallen mit $\Delta \leq -2$ kann sie die Nulllinie *ausschließlich* mit streng negativer Steigung kreuzen.

Da eine stetig differenzierbare Funktion zwischen zwei Nullstellen mit positiver Steigung zwingend eine Nullstelle mit negativer Steigung aufweisen muss (und umgekehrt), ist es unmöglich, dass mehr als ein Dirichlet-Eigenwert im selben Instabilitätsintervall liegt. Zusammen mit der Existenz mindestens einer Nullstelle pro Intervall (gesichert durch den Vorzeichenwechsel an den Rändern, vgl. Lemma 3.6), folgt die Behauptung: Es gibt exakt einen Dirichlet-Eigenwert pro Gap. Diese Argumentation vereint die Struktur der Instabilitätsintervalle elegant mit den analytischen Identitäten für L^2 -Potentiale und schließt den Beweis der Spektralstruktur für das Dirichlet-Problem ab. $\square$

3.3 Analyse der Neumann-Eigenwerte

Nachdem wir die Dirichlet-Eigenwerte untersucht haben, wenden wir uns nun dem Neumann-Randwertproblem zu. Die Struktur dieses Abschnitts verläuft weitgehend parallel, da sich die wesentlichen algebraischen Zusammenhänge direkt aus derselben Monodromiematrix ablesen lassen:

$$M(\lambda) = \begin{pmatrix} y_1(1, \lambda) & y_2(1, \lambda) \\ y_1'(1, \lambda) & y_2'(1, \lambda) \end{pmatrix}.$$

3.3.1 Charakterisierung und algebraische Lage

Gemäß Lemma 3.2 wissen wir bereits: Ein Wert ν ist genau dann ein Neumann-Eigenwert, wenn $y_1'(1, \nu) = 0$ gilt. (Zur begrifflichen Trennung bezeichnen wir Neumann-Eigenwerte im Folgenden mit ν).

Analog zu den Dirichlet-Eigenwerten zeigen wir zunächst, dass auch das Neumann-Spektrum zwingend an die Stabilitäts- und Instabilitätsintervalle der Hill-Gleichung gebunden ist.

Lemma 3.9. (*Lage der Neumann-Eigenwerte, vgl. [Eas73, S. 37f.]*) Jeder Neumann-Eigenwert ν der Hill-Gleichung liegt in einem Instabilitätsintervall oder exakt auf dessen Rand. Es gilt folglich

$$|\Delta(\nu)| \geq 2.$$

Beweis. Sei ν ein Neumann-Eigenwert. Es gilt folglich $y_1'(1, \nu) = 0$. Setzen wir dies in die grundlegende Determinantengleichung (Wronski-Determinante $y_1 y_2' - y_2 y_1' = 1$) ein, so entfällt der zweite Term und wir erhalten:

$$y_1(1, \nu) y_2'(1, \nu) = 1.$$

Daraus folgt $y_1(1, \nu) \neq 0$ und $y_2'(1, \nu) = \frac{1}{y_1(1, \nu)}$. Für die Spur der Matrix (die Diskriminante) an der Stelle ν ergibt sich somit:

$$\Delta(\nu) = y_1(1, \nu) + y_2'(1, \nu) = y_1(1, \nu) + \frac{1}{y_1(1, \nu)}.$$

Mit der bekannten Ungleichung $|x + x^{-1}| \geq 2$ für alle reellen $x \neq 0$ (angewandt auf $x = y_1(1, \nu)$) folgt direkt die Behauptung:

$$|\Delta(\nu)| \geq 2.$$

□

Für den nun folgenden Existenzbeweis der Neumann-Eigenwerte innerhalb dieser Intervalle greifen wir auf das Vorzeichenverhalten an den Intervallgrenzen zurück. Da wir in Lemma 3.5 bereits allgemein und unabhängig von speziellen Randbedingungen gezeigt haben, dass an den Rändern der Gaps stets

$$y_2(1, \lambda) y_1'(1, \lambda) \leq 0$$

gilt, steht uns das nötige algebraische Werkzeug für den Zwischenwertsatz unmittelbar zur Verfügung.

3.3.2 Existenz der Neumann-Eigenwerte

Wir beweisen die Existenz der Neumann-Eigenwerte durch Untersuchung der charakteristischen Funktion $y_1'(1, \lambda)$.

Lemma 3.10 (Existenz in den Instabilitätsintervallen). *In jedem Instabilitätsintervall $(\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n})$ bzw. $(\lambda'_{2n-1}, \lambda'_{2n})$ existiert mindestens ein Neumann-Eigenwert ν_n .*

Beweis. Sei $(\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n})$ ein Instabilitätsintervall. Wie im Beweis zu Lemma 3.6 gezeigt, nimmt die stetig differenzierbare Funktion $\Delta(\lambda)$ im Inneren des Gaps Werte betragsmäßig echt größer als 2 an, woraus zwingend folgt, dass die Ableitung $\Delta'(\lambda)$ an den Intervallgrenzen ihr Vorzeichen wechselt:

$$\Delta'(\lambda_{2n-1}) > 0 \quad \text{und} \quad \Delta'(\lambda_{2n}) < 0 \tag{3.8}$$

(Der Fall für Intervalle mit $\Delta \leq -2$ verläuft völlig analog).

Im Rahmen der quadratischen Ergänzung im Existenzbeweis für Dirichlet-Eigenwerte (vgl. Beweis zu Lemma 3.6) haben wir für die Ränder dieser Intervalle bereits die fundamentale Vorzeichenkopplung

$$\operatorname{sgn}(\Delta'(\lambda)) = -\operatorname{sgn}(y_2(1, \lambda))$$

hergeleitet. Gleichzeitig garantiert unsere allgemeine Vorzeichenbeziehung aus Lemma 3.5 an exakt diesen Rändern die Ungleichung $y_2(1, \lambda)y_1'(1, \lambda) \leq 0$.

Da wir annehmen können, dass die Intervallränder nicht bereits selbst die gesuchten Neumann-Eigenwerte sind (andernfalls wäre die Existenz mit $y_1' = 0$ trivialerweise gezeigt), ist das Produkt strikt negativ. Dies erzwingt, dass $y_1'(1, \lambda)$ stets das entgegengesetzte Vorzeichen von $y_2(1, \lambda)$ besitzt. Kombinieren wir diese beiden Erkenntnisse, folgt unmittelbar:

$$\operatorname{sgn}(y_1'(1, \lambda)) = -\operatorname{sgn}(y_2(1, \lambda)) = \operatorname{sgn}(\Delta'(\lambda)).$$

Da $\Delta'(\lambda)$ gemäß (3.8) an den Grenzen λ_{2n-1} und λ_{2n} das Vorzeichen wechselt, muss folglich auch die stetige charakteristische Funktion $y_1'(1, \lambda)$ an diesen Stellen unterschiedliche Vorzeichen annehmen. Nach dem Zwischenwertsatz existiert somit mindestens ein $\nu_n \in (\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n})$ mit $y_1'(1, \nu_n) = 0$. $\square$

Lemma 3.11. *(Existenz des Grundzustandes ν_0 , vgl. [Eas73, Kapitel 3]) Es existiert ein erster Neumann-Eigenwert ν_0 , der auf der Halbachse der Instabilität vor dem ersten periodischen Eigenwert liegt. Es gilt:*

$$\nu_0 \leq \lambda_0.$$

Beweis. Wir betrachten das asymptotische Verhalten von $y_1'(1, \lambda)$ für $\lambda \rightarrow -\infty$. Mit der Substitution $\lambda = -k^2$ ($k \rightarrow \infty$) geht die Hill-Gleichung asymptotisch in $-y'' + k^2y = 0$ über. Die Fundamentallösung $y_1(x, \lambda)$ lässt sich durch Hyperbelfunktionen approximieren:

$$y_1(x, \lambda) \approx \cosh(kx) \implies y_1'(x, \lambda) \approx k \sinh(kx).$$

Für den rechten Rand $x = 1$ divergiert diese Ableitung ins positiv Unendliche:

$$\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} y_1'(1, \lambda) = +\infty. \quad (3.9)$$

An der Stelle des ersten periodischen Eigenwerts λ_0 (Beginn des Spektrums, $\Delta(\lambda_0) = 2$) besitzt die zugehörige Eigenfunktion keine Nullstellen in $(0, 1)$. Nach den Standardresultaten der Oszillationstheorie (vgl. [MW66]) ist die Auswertung von y_1' an diesem Punkt nicht-positiv:

$$y_1'(1, \lambda_0) \leq 0. \quad (3.10)$$

Aus (3.9) und (3.10) folgt, dass die stetige Funktion $y_1'(1, \lambda)$ auf dem Intervall $(-\infty, \lambda_0]$ das Vorzeichen wechselt. Nach dem Zwischenwertsatz existiert somit ein $\nu_0 \in (-\infty, \lambda_0]$ mit $y_1'(1, \nu_0) = 0$. $\square$

3.3.3 Einfachheit und Eindeutigkeit der Neumann-Eigenwerte

Nachdem durch Lemma 3.10 die Existenz mindestens eines Neumann-Eigenwerts pro Instabilitätsintervall gesichert ist, bleibt zu zeigen, dass dieser Eigenwert eindeutig ist. Um die strikte Einfachheit für den allgemeinen Fall von L^2 -Potentialen zu garantieren, stützen wir uns im Folgenden analog zum Dirichlet-Problem auf die analytischen Eigenschaften der λ -Ableitungen der Fundamentallösungen (vgl. [PT87, Kapitel 2]). Dies erfordert zunächst den Nachweis, dass der zugehörige Eigenraum eindimensional ist (geometrische Einfachheit) und die charakteristische Gleichung an der Stelle des Eigenwerts eine einfache Nullstelle besitzt (algebraische Einfachheit). Da dies allein jedoch nicht ausschließt, dass mehrere solcher einfachen Eigenwerte in derselben Lücke liegen, folgern wir daraus abschließend in Korollar 3.13 die Existenz von exakt einem Neumann-Eigenwert pro Spektrallücke.

Lemma 3.12 (Einfachheit der Neumann-Eigenwerte, vgl. [PT87]). *Jeder Neumann-Eigenwert $\nu \in \mathbb{R}$ der Hill-Gleichung ist einfach. Insbesondere besitzt die charakteristische Funktion an dieser Stelle eine einfache Nullstelle:*

$$\dot{y}_1'(1, \nu) \neq 0.$$

Beweis. 1. Geometrische Einfachheit:

Sei ν ein Neumann-Eigenwert. Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ist $y(x) = c_1 y_1(x, \nu) + c_2 y_2(x, \nu)$. Die Neumann-Randbedingung $y'(0) = 0$ zwingt jede Lösung wegen der festen Anfangswerte $y_1'(0, \nu) = 0$ und $y_2'(0, \nu) = 1$ zwingend zu $c_2 = 0$. Jede Eigenfunktion ist somit ein skalares Vielfaches von $y_1(\cdot, \nu)$. Der Eigenraum ist folglich eindimensional.

2. Algebraische Einfachheit:

Wir nutzen die Notation $\dot{y} := \frac{\partial y}{\partial \lambda}$ für die Ableitung nach dem Spektralparameter. Die Differenziation der Hill-Gleichung für die Fundamentallösung y_1 nach λ liefert:

$$-y_1'' + qy_1 = \lambda y_1 \tag{3.11}$$

$$-\dot{y}_1'' + q\dot{y}_1 = y_1 + \lambda \dot{y}_1 \tag{3.12}$$

Multiplizieren wir (3.12) mit y_1 und subtrahieren davon die mit $\dot{y}_1$ multiplizierte Gleichung (3.11), entfallen die Terme mit q und λ :

$$-\dot{y}_1'' y_1 + y_1'' \dot{y}_1 = y_1^2.$$

Durch eine Nullergänzung, welche exakt den fehlenden Termen der Produktregel entspricht, lässt sich die linke Seite als vollständige Ableitung zusammenfassen:

$$\begin{aligned} y_1'' \dot{y}_1 - \dot{y}_1'' y_1 &= y_1^2 \\ y_1'' \dot{y}_1 + y_1' \dot{y}_1' - \dot{y}_1' y_1' - \dot{y}_1'' y_1 &= y_1^2 \\ \frac{d}{dx} (y_1' \dot{y}_1 - \dot{y}_1' y_1) &= y_1^2. \end{aligned}$$

Die Integration dieser Identität über das Intervall $[0, 1]$ ergibt nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:

$$\int_0^1 y_1^2(x, \lambda) dx = \left[y_1'(x, \lambda) \dot{y}_1(x, \lambda) - \dot{y}_1'(x, \lambda) y_1(x, \lambda) \right]_0^1. \quad (3.13)$$

Nun werten wir diese Gleichung an der Stelle eines Neumann-Eigenwerts $\lambda = \nu$ aus. Am linken Rand ($x = 0$) gelten für alle λ konstant die Anfangswerte $y_1(0, \lambda) = 1$ und $y_1'(0, \lambda) = 0$. Folglich verschwinden deren Ableitungen nach λ : $\dot{y}_1(0, \nu) = 0$ und $\dot{y}_1'(0, \nu) = 0$. Der gesamte Randterm bei $x = 0$ entfällt.

Am rechten Rand ($x = 1$) nutzen wir die Neumann-Randbedingung der Eigenfunktion. Es gilt definitionsgemäß $y_1'(1, \nu) = 0$. Setzen wir dies in Gleichung (3.13) ein, so reduziert sich die rechte Seite auf einen einzigen Term (beachte das verbleibende negative Vorzeichen):

$$\int_0^1 y_1^2(x, \nu) dx = 0 \cdot \dot{y}_1(1, \nu) - \dot{y}_1'(1, \nu) y_1(1, \nu) = -\dot{y}_1'(1, \nu) y_1(1, \nu).$$

Da $y_1(\cdot, \nu)$ eine nichttriviale Eigenfunktion ist, ist das Integral strikt positiv. Multiplikation der Gleichung mit -1 liefert:

$$\dot{y}_1'(1, \nu) y_1(1, \nu) < 0.$$

Damit dieses Produkt strikt negativ sein kann, darf keiner der beiden Faktoren null sein. Daraus folgt zwingend:

$$\dot{y}_1'(1, \nu) \neq 0.$$

Die charakteristische Funktion $\lambda \mapsto y_1'(1, \lambda)$ besitzt an der Stelle ν somit eine einfache Nullstelle. Zusammen mit der geometrischen Einfachheit ist der Neumann-Eigenwert damit vollständig als einfach bewiesen. $\square$

Korollar 3.13 (Exakte Anzahl der Neumann-Eigenwerte). *In jedem Instabilitätsintervall (einschließlich seiner Ränder) liegt exakt ein Neumann-Eigenwert.*

Beweis. Sei ν ein Neumann-Eigenwert, also $y_1'(1, \nu) = 0$. Die Monodromiematrix an der Stelle ν nimmt dadurch die Form einer oberen Dreiecksmatrix an:

$$M(\nu) = \begin{pmatrix} y_1(1, \nu) & y_2(1, \nu) \\ 0 & y_2'(1, \nu) \end{pmatrix}.$$

Die Wronski-Determinante liefert $\det M(\nu) = y_1(1, \nu) y_2'(1, \nu) = 1$, woraus zwingend $y_2'(1, \nu) = \frac{1}{y_1(1, \nu)}$ folgt. Für die Diskriminante ergibt sich somit:

$$\Delta(\nu) = y_1(1, \nu) + \frac{1}{y_1(1, \nu)}.$$

Daraus folgt unmittelbar, dass das Vorzeichen von $y_1(1, \nu)$ exakt dem Vorzeichen von $\Delta(\nu)$ entspricht: In Instabilitätsintervallen mit $\Delta(\nu) \geq 2$ ist $y_1(1, \nu) > 0$, für $\Delta(\nu) \leq -2$ ist $y_1(1, \nu) < 0$.

Aus dem Beweis von Lemma 3.12 wissen wir zudem für die Ableitung der charakteristischen Funktion nach dem Spektralparameter:

$$\dot{y}'_1(1, \nu)y_1(1, \nu) < 0.$$

Dies erzwingt, dass die Steigung $\dot{y}'_1(1, \nu)$ und der Auswertungswert $y_1(1, \nu)$ stets entgegengesetzte Vorzeichen besitzen. Kombinieren wir dies mit der Diskriminanten-Bedingung, erhalten wir:

$$\operatorname{sgn}(\dot{y}'_1(1, \nu)) = -\operatorname{sgn}(\Delta(\nu)).$$

Geometrisch bedeutet dies: In Gaps mit $\Delta \geq 2$ kreuzt die charakteristische Funktion $y'_1(1, \lambda)$ die Nulllinie *ausschließlich* mit streng negativer Steigung (von oben nach unten). In Gaps mit $\Delta \leq -2$ kreuzt sie *ausschließlich* mit streng positiver Steigung.

Da eine stetig differenzierbare Funktion die Nulllinie nicht mehrfach in dieselbe Richtung kreuzen kann, ohne zwischendurch mit umgekehrtem Vorzeichen zurückzukehren, ist mehr als eine Nullstelle pro Intervall ausgeschlossen. Zusammen mit dem reinen Existenzbeweis aus Lemma 3.10 folgt die Behauptung. Diese Argumentation vereint die Struktur der Instabilitätsintervalle elegant mit den analytischen Identitäten für L^2 -Potentiale und schließt den Beweis der Spektralstruktur für das Neumann-Problem ab. $\square$

Kapitel 4

Physikalische und technische Anwendungsbereiche

Nachdem in den vorherigen Kapiteln die abstrakte Spektraltheorie der Hill-Gleichung bewiesen wurde, stellt sich die Frage: Wofür braucht man diese fundamentale Verschachtelung von Spektrallücken (Gaps) und Stabilitätszonen in der Praxis?

Tatsächlich ist die Hill-Gleichung nicht nur ein rein mathematisches Konstrukt, sondern das theoretische Rückgrat für wichtige physikalische und ingenieurtechnische Phänomene unseres Alltags. Die zentrale Erkenntnis aus unserer Arbeit, dass periodische Koeffizienten zwingend zu abwechselnden Zonen von Stabilität und Instabilität führen, lässt sich direkt auf reale Systeme übersetzen.

4.1 Festkörperphysik: Warum wir Computer bauen können

Eine sehr wichtige Anwendung findet sich in der Quantenmechanik, genauer gesagt im sogenannten Kronig-Penney-Modell der Festkörperphysik. Es beschreibt, wie sich ein einzelnes Elektron durch das periodische Atomgitter eines Kristalls bewegt.

Da die positiv geladenen Atomkerne im Kristall in exakten Abständen angeordnet sind, erfährt das Elektron ein periodisches elektrisches Potenzial $V(x)$ mit einer Gitterkonstante T , also $V(x + T) = V(x)$. Die stationäre Schrödinger-Gleichung für die Wellenfunktion $\psi(x)$ des Elektrons lautet:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi''(x) + V(x)\psi(x) = E\psi(x), \quad (4.1)$$

wobei $\hbar$ das reduzierte Plancksche Wirkungsquantum, m die Masse des Elektrons und E seine Energie bezeichnet. Durch einfache algebraische Umformungen lässt sich diese Gleichung exakt in die Form der Hill-Gleichung überführen:

$$\psi''(x) + (\lambda - q(x))\psi(x) = 0. \quad (4.2)$$

Hierbei ist unser mathematischer Spektralparameter λ direkt proportional zur physikalischen Energie E des Elektrons, und unser Potenzial $q(x)$ repräsentiert das Atomgitter.

Die Übersetzung in die Realität: Die in dieser Arbeit bewiesenen *Stabilitätsintervalle* entsprechen exakt den sogenannten Energiebändern, also den Energiezuständen, in denen sich das Elektron frei durch den Kristall bewegen kann. Das Material leitet elektrischen Strom. Die *Instabilitätsintervalle* (*Gaps*) hingegen sind die verbotenen Zonen (Bandlücken). Hat das Elektron eine Energie, die genau in einen Gap fällt, ist seine Wellenfunktion instabil und es kann sich nicht ausbreiten; das Material wirkt als Isolator. Die gezielte Manipulation genau dieser Bandlücken macht aus einem Material einen Halbleiter und bildet damit das physikalische Fundament für jeden modernen Computerchip.

4.2 Optik: Das Einsperren von Licht

Ein mathematisch identisches Prinzip findet sich in der Optik, wenn sich Licht durch sogenannte photonische Kristalle bewegt. Das sind Strukturen, bei denen der Brechungsindex räumlich periodisch moduliert ist (ähnlich wie das Atomgitter für Elektronen).

Die Ausbreitung der elektromagnetischen Welle wird durch die eindimensionale Helmholtz-Gleichung beschrieben:

$$u''(x) + \omega^2 \varepsilon(x) u(x) = 0. \quad (4.3)$$

Dabei ist ω die Frequenz des Lichts und $\varepsilon(x)$ die periodische Dielektrizitätsfunktion.

Die Übersetzung in die Realität: Auch hier korrespondieren unsere mathematischen Instabilitätszonen mit echten, physikalischen Lücken (sogenannten *photonic band gaps*). Fällt Licht mit einer Frequenz, die exakt in einem Gap liegt, auf dieses Material, gibt es für die Lichtwelle keine stabile Lösung. Das bedeutet anschaulich: Das Licht kann nicht in das Material eindringen und wird stattdessen zu 100 % reflektiert. Ingenieure nutzen dieses Phänomen heute, um perfekte Spiegel zu bauen, Licht hochpräzise zu filtern oder es nahezu verlustfrei durch die Glasfaserkabel unseres Internets zu leiten.

4.3 Mechanik: Brückenbau und Resonanzkatastrophen

Während in der Quantenphysik und Optik die *räumliche* Periodizität $q(x)$ im Fokus steht, taucht die Hill-Gleichung im Maschinenbau und Bauingenieurwesen häufig mit *zeitlich* periodischen Parametern auf (x wird durch die Zeit t ersetzt). Ein klassisches Beispiel ist eine Brücke unter rhythmischer Windlast oder ein Bauteil in einer rotierenden Maschine.

Die Übersetzung in die Realität: In der Mechanik bedeutet eine stabile Lösung unserer Differentialgleichung schlichtweg, dass ein System normal schwingt (wie ein Pendel). Fällt die Frequenz der äußeren Einwirkung (z. B. der Wind) jedoch in eines unserer mathematischen *Instabilitätsintervalle*, so wächst die Amplitude der Schwingung theoretisch exponentiell an. Dieses Phänomen nennt man parametrische Resonanz. Für den Ingenieur bedeutet ein Gap in der Hill-Gleichung höchste Gefahr: Trifft er mit seinem System dieses Intervall, kommt es zur Materialermüdung oder sogar zur Resonanzkatastrophe (dem Einsturz der Brücke). Die in Kapitel 2 durchgeführte Analyse der Floquet-Multiplikatoren liefert somit das Handwerkszeug, um mechanische Konstruktionen von vornherein sicher zu dimensionieren.

Fazit: Das vollständige Oszillationstheorem und die Verschachtelung der Spektren

Nach dem kurzen Ausblick auf die physikalischen Anwendungsbereiche fügen sich nun die analytischen Resultate der mathematischen Kernkapitel zu einem vollständigen Bild der Spektraltheorie der Hill-Gleichung zusammen.

Wir haben in Kapitel 3 gezeigt, dass sowohl das Dirichlet- als auch das Neumann-Randwertproblem unendlich viele Eigenwerte (μ_n und ν_n) besitzen. Durch die Nutzung der Wronski-Determinante und der Symmetrieeigenschaften der Monodromiematrix konnte nachgewiesen werden, dass diese Eigenwerte niemals im Inneren der Stabilitätszonen liegen können. Stattdessen sind sie untrennbar an die Instabilitätsintervalle (Gaps) gebunden.

Besonders bemerkenswert ist die strenge Eindeutigkeit, die wir aus der Einfachheit der Nullstellen und der Vorzeichenkopplung mit der Diskriminante $\Delta(\lambda)$ folgern konnten: Jedes durch die periodischen und anti-periodischen Eigenwerte aufgespannte Instabilitätsintervall enthält exakt einen Dirichlet- und exakt einen Neumann-Eigenwert. Ergänzt durch die Asymptotik für $\lambda \rightarrow -\infty$, welche die Existenz eines ersten Neumann-Eigenwerts $\nu_0 \leq \lambda_0$ vor dem eigentlichen Beginn des periodischen Spektrums sichert, erhalten wir eine hochgradig geordnete Struktur.

Führen wir nun die Resultate aus der Monotonie-Analyse der Diskriminante (Kapitel 2) mit den Lage-Eigenschaften der Randwertprobleme aus diesem Kapitel zusammen, so erhalten wir exakt die fundamentale Verschachtelung, deren Beweis das zentrale Ziel dieser Arbeit darstellt:

Für jedes Potential $q \in L^2([0, 1], \mathbb{R})$ bilden die periodischen (λ_n), anti-periodischen (λ'_n), Dirichlet- (μ_n) und Neumann-Eigenwerte (ν_n) reelle Folgen, welche die strikte Ungleichungskette

$$\lambda_0 < \lambda'_1 \leq \lambda'_2 < \lambda_1 \leq \lambda_2 < \lambda'_3 \leq \lambda'_4 < \lambda_3 \leq \lambda_4 \dots$$

erfüllen. Dabei sind die Dirichlet- und Neumann-Eigenwerte präzise in die Gaps eingebettet, sodass stets gilt:

$$\nu_0 \leq \lambda_0, \quad \mu_{2n-1}, \nu_{2n-1} \in [\lambda'_{2n-1}, \lambda'_{2n}] \quad \text{und} \quad \mu_{2n}, \nu_{2n} \in [\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}] \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Die stabilen Eigenwerte, für die die Lösungen der Differentialgleichung beschränkt bleiben, setzen sich folglich genau aus der disjunkten Vereinigung der dazwischenliegenden Intervalle zusammen:

$$[\lambda_0, \lambda'_1] \cup [\lambda'_2, \lambda_1] \cup [\lambda_2, \lambda'_3] \cup [\lambda'_4, \lambda_3] \cup \dots$$

Damit ist das Hauptziel dieser Arbeit erreicht. Es konnte nicht nur der klassische Satz über das oszillierende Verhalten der Hill-Gleichung detailliert und anschaulich bewiesen werden. Vielmehr wurde durch die eigenständige Kombination verschiedener mathematischer Zugänge gezeigt, dass sich die klassischen geometrischen Argumente (wie zum Beispiel die Vorzeichenanalyse von Magnus & Winkler) durch die Verwendung der *Basic Estimates* nach Pöschel & Trubowitz mathematisch lückenlos auf die weitaus größere Klasse der L^2 -Potentiale übertragen lassen.

Literaturverzeichnis

- [Eas73] Michael S. P. Eastham. *The Spectral Theory of Periodic Differential Equations*. Scottish Academic Press, 1973.
- [MW66] Wilhelm Magnus and Stanley Winkler. *Hill's Equation*. Interscience Publishers, 1966.
- [PT87] Jürgen Pöschel and Eugene Trubowitz. *Inverse Spectral Theory*. Academic Press, 1987.