Analysis II
Osterblatt
$7\frac{1}{2}$. Übung

Martin Schmidt, Ross Ogilvie — Frist: 13. April 2026

Dieses Blatt hat nur Zusatzpunkte.

$7\frac{1}{2}$.1. Gradient, Rotation, Divergenz.

(a) Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, $(a, b) \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $c : (a, b) \to \mathbb{R}^n$ eine Niveaulinie von f. Das heißt, dass die Funktion $f \circ c : (a, b) \to \mathbb{R}$ konstant ist. Zeige, dass für $t \in (a, b)$ dann gilt: $(\nabla f)(c(t)) \cdot (c'(t)1) = 0$. *(2 Zusatzpunkte)*

Interpretation. Der Gradient $(\nabla f)(x)$ steht senkrecht auf der "Niveaufläche" von f.

(b) Sei $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ das Vektorfeld

$$F(x, y, z) = (0, x, 0).$$

Berechne $\operatorname{rot} F$. *(1 Zusatzpunkt)*

Interpretation. Stell dir vor, dass F den Fluss von Wasser beschreibt und irgendwo ein Objekt schwimmt. Wenn das Wasser vorbeifließt, dreht es das Objekt wegen der Reibung. Das Wasser ist auf der rechten Seite schneller als auf der linken, daher dreht sich das Objekt nach linksherum. Der Rotationsvektor beschreibt die Achse der Rotation und die Rotationsgeschwindigkeit.

(c) Sei $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ das Vektorfeld

$$F(x, y, z) = (-x, -y, 0).$$

Berechne $\operatorname{div} F$. *(1 Zusatzpunkt)*

Interpretation. Stell dir vor, dass F den Fluss von Gas beschreibt. Das Gas zieht sich zusammen. Die Divergenz ist negativ für kontrahierendes Gas und positiv für expandierendes Gas.

(d) Sei $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein zweimal stetig differenzierbares Vektorfeld. Berechne $\operatorname{div}(\operatorname{rot} F)$. *(1 Zusatzpunkt)*

(e) Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Berechne $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f)$. *(1 Zusatzpunkt)*

(f) Es sei

$$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y, z) \mapsto (2 + 3y^2 + z(8x + y), x(6y + z), x(4x + y)).$$

(i) Zeige $\operatorname{rot}(g) = 0$. *(1 Zusatzpunkt)*

(ii) Finde eine Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, deren Gradient das Vektorfeld g ist. *(1 Zusatzpunkt)*

$7\frac{1}{2}$.2. Die Matrixexponentialfunktion

Vor Definition 9.64 im Skript haben wir die Exponentialfunktion auf Matrizen definiert:

$$\exp(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n.$$

(a) Sei

$$A = \begin{bmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{bmatrix}.$$

Berechne A^2, A^3. *(1 Zusatzpunkt)*

(b) Zeige, dass

$$\exp(A) = \begin{bmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix}.$$

(2 Zusatzpunkte)

(c) Zeige, dass

$$\frac{d}{dt}\exp(A) = A' \exp(A).$$

(2 Zusatzpunkte)

Bemerkung. Diese Regel gilt nicht für alle A. Es gilt aber, wenn $A'A = AA'$.

$7\frac{1}{2}$.3. Eine konstruktive Alternative.

In Analysis I Schnitt 2.6 haben wir $\mathbb{N}, \mathbb{Z}.$ und $\mathbb{Q}$ konstruiert. In dieser Aufgabe wollen wir $\mathbb{R}$ als die Vervollständigung von $\mathbb{Q}$ konstruieren.
Sei dazu $\mathfrak{C}$ die Menge der Cauchyfolgen in $\mathbb{Q}$. Das heißt, eine Cauchyfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \in \mathbb{Q}$ für alle n, aber der Grenzwert muss nicht in $\mathbb{Q}$ liegen.
Wir definieren für zwei Cauchyfolgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\tilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{C}$ die Relation $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (\tilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann, wenn $(x_n - \tilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist. Explizit: genau dann, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ mit $\varepsilon \in \mathbb{Q}$ ein N existiert, so dass $|x_n - \tilde{x}_n| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Nach Exodos, ist das äquivalent zu der normalen Definition von Nullfolgen.
Wenn die Grenzwerte von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\tilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleich sind, ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (\tilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Aber unsere Definition spricht nicht über den Grenzwert, also funktioniert es auch dann, wenn $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keinen Grenzwert in $\mathbb{Q}$ hat.

(a) Zeige, dass durch "$\sim$" eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Cauchyfolgen definiert ist. *(2 Zusatzpunkte)*

Die Äquivalenzklasse $[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}]$ ist die Menge aller Cauchyfolgen, denen zu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ äquivalent sind. Wir wollen noch keine Metrik auf der Menge der Äquivalenzklassen $\mathfrak{C}/\sim$ angeben, weil die Definition einer Metrik $\mathbb{R}$ benutzt. Aber wir können ihr die Struktur eines angeordneten Körpers (Analysis I Kapitel 2 Axiome A1-A4) geben, und zeigen, dass sie A5 auch erfüllt. Wir nennen dann $\mathbb{R} = \mathfrak{C}/\sim$, weil der Körper mit A1-A5 eindeutig ist.

(b) Zeige, dass die Addition und die Multiplikation von zwei Cauchyfolgen selbst eine Cauchyfolge ist. Benutze nicht Eigenschaften von $\mathbb{R}$.
[Tipp. Cauchyfolgen sind beschränkt] *(2 Zusatzpunkte)*

(c) Seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (\tilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (\tilde{y}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolgen. Zeige, dass $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (\tilde{x}_n + \tilde{y}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Zeige außerdem, dass $(x_n \cdot y_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (\tilde{x}_n \cdot \tilde{y}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. *(2 Zusatzpunkte)*

Zusammen zeigen (b) und (c), dass die Addition und Multiplikation definiert durch

$$\begin{cases} [(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] + [(y_n)_{n\in\mathbb{N}}] := [(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}] \\ [(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] \cdot [(y_n)_{n\in\mathbb{N}}] := [(x_n \cdot y_n)_{n\in\mathbb{N}}] \end{cases}$$

jeweils wohldefiniert auf der Menge der Äquivalenzklassen $\mathfrak{C}/\sim$ ist.

(d) Zeige, dass die Körperaxiome A1-A3 für $\mathfrak{C}/\sim$ erfüllt sind. *(2 Zusatzpunkte)*

(e) Wir definieren eine Ordnungsrelation auf $\mathfrak{C}/\sim$ wie folgt: Es gilt $[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] > [(y_n)_{n\in\mathbb{N}}]$, genau dann, wenn es ein $\varepsilon > 0$ und ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit $x_n - y_n \geq \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Zeige, dass dadurch eine wohldefinierte (!) Ordnungsrelation auf $\mathfrak{C}/\sim$ definiert, die Axiom A4 erfüllt. *(2 Zusatzpunkte)*

(f) Definiere die Einbettungsabbildung,

$$\begin{aligned}\Phi : \mathbb{Q} &\to \mathfrak{C}/\sim \\ q &\mapsto [(q)_{n\in\mathbb{N}}],\end{aligned}$$

wobei für jedes $q \in \mathbb{Q}$, $(q)_{n\in\mathbb{N}}$ die konstante (Cauchy-)folge $q_n = q$ bezeichnet. Diese Abbildung ist offenbar injektiv. Man kann ohne Beweis benutzt, dass die natürlichen Zahlen in $\mathfrak{C}/\sim$ (nach Definition 2.29) das Bild von $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$ unter Φ sind.

Zeige, dass $\mathfrak{C}/\sim$ archimedisch ist.
[Tipp. jede Cauchyfolge ist beschränkt.] *(2 Zusatzpunkte)*

(g) Zeige, dass $\mathfrak{C}/\sim$ das Intervallschachtelungsprinzip (Satz 2.50) erfüllt: Für alle Intervalle $I_n = [a_n, b_n] := \{c \in \mathfrak{C}/\sim \mid a_n \leq c \leq b_n\}$ mit:

- $a_n, b_n \in \mathfrak{C}/\sim$ und $a_n < b_n$. Das heißt: für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $a_n = [(a_{n,k})_{k\in\mathbb{N}}]$ eine Äquivalenzklasse von einer Cauchyfolge in $\mathbb{Q}$.
- $I_{n+1} \subset I_n$
- Für jedes $k \in \mathbb{N}$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $b_n - a_n < \Phi(k^{-1})$

folgt es, dass der Durchschnitt $\cap_{n\geq 1} I_n$ genau einen Punkt von $\mathfrak{C}/\sim$ enthält. *(3 Zusatzpunkte)*

[*Tipp:* Weil (f) zeigt, dass $\Phi(\mathbb{Q})$ dicht in $\mathfrak{C}$ ist, können wir $p_n, q_n \in \mathbb{Q}$ finden, so dass $a_n < \Phi(p_n) < a_{n+1}$ und $b_{n+1} < \Phi(q_n) < b_n$. Seien $J_n = [\Phi(p_n), \Phi(q_n)]$ Intervalle in $\mathfrak{C}/\sim$. Bemerke $\bigcap I_n = \bigcap J_n$ und $\{J_n\}$ hat die drei Eigenschaften als $\{I_n\}$. Zeige, dass $x = (p_k)$ eine Cauchyfolge ist und in dem Durchschnitt liegt.]

Das Intervallschachtelungsprinzip ist äquivalent zu Axiom A5 (Vollständigkeitsaxiom), also haben wir gezeigt, dass $\mathfrak{C}/\sim$ A5 erfüllt.

Bemerkung: Wegen der Funktionsvorschrift von Φ ist das Bild $\Phi[\mathbb{Q}]$ als eine "Kopie" von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ zu verstehen. In dem man also $\Phi[\mathbb{Q}]$ mit $\mathbb{Q}$ identifiziert, kann man daher $\mathbb{R}$ als eine Vervollständigung von $\mathbb{Q}$ auffassen. Diese ist eindeutig und daher hat man auf diese Weise $\mathbb{R}$ konstruktiv eingeführt.