Analysis II
13. Übung

Martin Schmidt, Ross Ogilvie Frist: 25. Mai 2026

13.1. Integralberechnung mit der Jacobischen Transformationsformel.

(a) Es sei A das rautenförmige Gebiet, welches durch die Geraden $x+2y=2$, $x-2y=2$, $x+2y=-2$ und $x-2y=-2$ berandet wird.

(i) Finde Koordinaten u, v so dass es eine lineare Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(u,v) \mapsto (x,y)$ gibt, so dass $A' = \Phi^{-1}[A]$ ein Quadrat der Seitenlänge 4 ist. Drücke (x,y) mit Hilfe der Koordinaten (u,v) aus. *(2 Punkte)*

(ii) Benutze diese Koordinaten, um $\int\limits_A (3x+6y)^2 \,\mathrm{d}\mu$ zu berechnen. *(2 Punkte)*

(b) Es sei

$$B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y > 0 \text{ und } x + y \leq 3\} .$$

Berechne $\int_B \exp\left(\frac{y-x}{y+x}\right) \mathrm{d}\mu$ mit Hilfe der Transformationsformel. *(4 Punkte)*

(c) Gegeben seien die Parabeln $P_1 : y = x^2$, $P_2 : y = 2x^2$, $P_3 : x = y^2$, $P_4 : x = 3y^2$ für $x, y > 0$. Wir betrachten die Fläche C zwischen den Stücken von P_1 und P_2, die jeweils Schnittpunkte mit P_3 und P_4 haben, und den Stücken von P_3 und P_4, die jeweils Schnittpunkte mit P_1 und P_2 haben.

Skizziere die Fläche C im $\mathbb{R}^2$ und berechne deren Flächeninhalt $\mu(C) = \int \chi_C \, d\mu$ mit Hilfe der Jacobischen Transformationsformel. *(4 Punkte)*

Tipp: Beachte, dass auf den Rändern von C gilt, dass entweder $\frac{y}{x^2}$ oder $\frac{x}{y^2}$ konstant ist und dass es ausreicht, die inverse Transformation $\Phi^{-1}(x,y)$ zu kennen, um $\det(\Phi(u,v))$ zu bestimmen.

(d) Es sei D das durch die Ellipsen $9x^2 + y^2 = 9$ und $9x^2 + y^2 = 81$ sowie die Geraden $y = -x$ und $y = 0$ eingeschlossene Gebiet im zweiten Quadranten der xy-Ebene.

(i) Bestimme das Gebiet D' der $r\varphi$-Ebene, in das D unter der Koordinatentransformation $x = r \cdot \cos(\varphi)$, $y = 3r \cdot \sin(\varphi)$ übergeht. *(1 Punkt)*

(ii) Skizziere D in der xy-Ebene sowie D' in der $r\varphi$-Ebene. *(1 Zusatzpunkt)*

(iii) Berechne die Jacobi-Matrix der Abbildung

$$\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (r, \varphi) \mapsto (x,y) = (r \cdot \cos(\varphi), 3r \cdot \sin(\varphi)) ,$$

die zu der Transformation aus (i) gehört, sowie ihre Determinante. *(1 Punkt)*

(iv) Berechne mit Hilfe von (i)–(iii) das Integral

$$\int_D \frac{xy}{9x^2 + y^2} \,\mathrm{d}\mu .$$

(2 Zusatzpunkte)

Tipp: Der Wert $\sin\left(\arctan\left(-\frac{1}{3}\right)\right) = -\frac{1}{\sqrt{10}}$ könnte nützlich sein.

Desmos Demo: https://www.desmos.com/3d/1tf1oqcq1b

13.2. Polarkoordinaten.

(a) Es sei $R \in (0, \infty]$, $B_R := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$ die abgeschlossene Kreisscheibe vom Radius R um Null in $\mathbb{R}^2$ und $f \in L^1(B_R)$ eine auf B_R beschränkte Funktion, deren Unstetigkeitsstellen eine Nullmenge bilden. Zeige, dass dann gilt:

$$\int_{B_R} f \, \mathrm{d}\mu = \int_0^R \int_{-\pi}^{\pi} r \cdot f(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)) \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}r \, .$$

Diese Formel beschreibt die sogenannte *Integration in Polarkoordinaten.* *(3 Punkte)*

Tipp: Sei $O := B_R \setminus ((-\infty, 0] \times \{0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = R^2\})$ und $U := (0, R) \times (-\pi, \pi)$ sowie $\Phi : U \to O$, $(r, \varphi) \mapsto (r \cos(\varphi), r \sin(\varphi))$. Man zeige, dass in dieser Situation die Voraussetzungen der Jacobischen Transformationsformel (Satz 12.33) erfüllt sind. Warum gilt $\int_{B_R} f \, \mathrm{d}\mu = \int_O f \, \mathrm{d}\mu$?

(b) Es sei

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \ (x, y) \mapsto \exp(-(x^2 + y^2)) \, .$$

Zeige, dass $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ ist und berechne $\int_{\mathbb{R}^2} f \, \mathrm{d}\mu$. *(3 Punkte)*

Tipp: Verwende Aufgabenteil (a) und betrachte zunächst $f \cdot \chi_{B_R}$.

(c) Verwende das Ergebnis von (b), um zu zeigen, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) \, \mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$$

gilt. *(2 Zusatzpunkte)*

13.3. Divergenzsatz

Es seien $Q = [-1, 1] \times [-1, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^3$ und $F(x, y, z) = (x^2 y, y^2 x, z^3)$.

(a) Berechne $\nabla \cdot F$ und $\int_Q \nabla \cdot F$. *(2 Zusatzpunkte)*

(b) $S_1 := [-1, 1] \times [-1, 1] \times \{0\} \subset \partial Q$ ist eine Oberfläche des Würfels Q. Ist $N_1 := (0, 0, -1)$ auf S_1 eine äußere oder innere Normale? *(1 Zusatzpunkt)*

(c) Berechne $\int_{\partial Q} F \cdot N \, d\sigma$. *(2 Zusatzpunkte)*

(d) Sind die Integrale gleich? Gilt Satz 12.40? Was kann man sagen? *(2 Zusatzpunkte)*