Analysis II
12. Übung

Martin Schmidt, Ross Ogilvie Frist: 18. Mai 2026

12.1. Schwierig.

Betrachte die Funktion $f(x,y) = (x+y)\chi_{[0,1]^2}$. Dies ist ein 2-dimensionales Analogon zu 10.3(b), und ähnlich können wir sie mit Treppenfunktionen integrieren. Definiere

$$f_n(x,y) = \begin{cases} k2^{-n} + l2^{-n} & \text{falls } x \in (k2^{-n}, (k+1)2^{-n}] \text{ für } k = 0, \ldots, 2^n - 1, \\ & \text{und } y \in (l2^{-n}, (l+1)2^{-n}] \text{ für } l = 0, \ldots, 2^n - 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Desmos Demo: https://www.desmos.com/3d/0ch2e3ol0z

(a) Zeige, dass f_n eine monoton wachsende Folge von Treppenfunktionen ist, die gegen f konvergiert. *(2 Zusatzpunkte)*

(b) Berechne $\int f\, d\mu$. *(2 Punkte)*

12.2. Integralberechnung mit dem Satz von Fubini.

Berechne $\int (f \cdot \chi_M)\, \mathrm{d}\mu$ für die folgenden Mengen $M \subset \mathbb{R}^d$ und Funktionen $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$:

(a) $M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x\}, \quad f(x,y) := xy + y^2.$ *(3 Punkte)*

(b) $M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1,\ x^2 \le y \le x\}, \quad f(x,y) := \frac{xe^y}{y}$ *(4 Punkte)*

(c) $M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le 1\}, \quad f(x,y) := \sin(x) + y + 6.$ *(5 Punkte)*

(d) $M := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \le 1\}, \quad f(x,y,z) := 1.$ *(3 Zusatzpunkte)*

[*Tipp:* Man überlege sich, welche Integrationsreihenfolge die sinnvollere ist.]

Desmos Demo: https://www.desmos.com/3d/lex3a5dqg2

12.3. Eine Funktion, die nicht Lebesgue-integrierbar ist.

Es sei

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{x-y}{(x+y)^3} & \text{für } (x,y) \in ([0,1] \times [0,1]) \setminus \{(0,0)\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Desmos Demo: https://www.desmos.com/3d/vhwldwis61

(a) Berechne $\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x$ und $\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$. *(4 Punkte)*

(b) Folgere aus dem Ergebnis von (a), dass f nicht Lebesgue-integrierbar ist. *(2 Punkte)*

12.4. Weitere Grenzwertaussagen für das Lebesgue-Integral.

Es sei (f_n) eine Folge in $L^1(\mathbb{R}^d)$, die fast überall gegen eine Funktion f konvergiert.

(a) Es existiere ein $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, so dass fast überall $|f| \leq g$. *Zeige,* dass dann auch $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ ist.

(3 Zusatzpunkte)

[*Tipp:* Man wende Lebesgues Satz der beschränkten Konvergenz (Korollar 12.24) auf die Folge (g_n), wobei

$$g_n := \max\{-g, \min\{f_n, g\}\}, \quad \text{d.h.} \quad g_n(x) \overset{a.e.}{=} \begin{cases} g(x) & \text{für } f_n(x) > g(x) \\ f_n(x) & \text{für } -g(x) \leq f_n(x) \leq g(x) \\ -g(x) & \text{für } f_n(x) < -g(x) \end{cases}$$

an. Die Formeln $\max\{x, y\} = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$ und $\min\{x, y\} = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|)$ für $x, y \in \mathbb{R}$ sind vielleicht nützlich.]

(b) Es existiere ein $h \in L^1(\mathbb{R}^d)$, so dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ fast überall $|f_n - f| \leq h$ gilt. Zeige, dass dann auch $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ ist und dass $\int f \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\mu$ gilt.

(3 Zusatzpunkte)

[*Tipp:* Man verwende zunächst (a), um $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ zu zeigen und dann Lebesgues Satz, um die Vertauschbarkeit von Integral und Grenzwert zu beweisen.]