Analysis II
11. Übung

Martin Schmidt, Ross Ogilvie

Frist: 11. Mai 2026

11.1. Integralberechnungen auf offenen und geschlossenen Intervallen.

(a) Betrachte $f(x) = x^2 \cdot \chi_{[-1,2]}(x)$, $g(x) = \sin x \cdot \chi_{[0,\pi)}(x)$ und $h(x) = e^x \cdot \chi_{(0,1)}(x)$. Warum sind sie $L^1(\mathbb{R})$? *(1 Punkt)*

(b) Berechne mit dem Lebesguekriterium (Satz 12.17)

$$\int x^2 \cdot \chi_{[-1,2]} \, \mathrm{d}\mu, \qquad \int \sin x \cdot \chi_{[0,\pi)} \, \mathrm{d}\mu, \qquad \text{und} \int e^x \cdot \chi_{(0,1)} \, \mathrm{d}\mu.$$

(3 Punkte)

Desmos Demo: https://www.desmos.com/calculator/eug4a2mug6

11.2. Eine Integralberechnung auf $\mathbb{R}$.

(a) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n(x) := e^{-|x|} \cdot \chi_{[-n,n]}$. Berechne $\int f_n \, \mathrm{d}\mu$. *(2 Punkte)*

(b) Sei $f(x) := e^{-|x|}$. Folgere aus (a) mit Hilfe des Satzes der monotonen Konvergenz von Beppo Levi (Satz 12.22), dass $f \in L^1(\mathbb{R})$ ist und berechne $\int f \, \mathrm{d}\mu$. *(2 Punkte)*

Desmos Demo: https://www.desmos.com/calculator/zxjciv8fql

11.3. Eine Lebesgue-integrierbare Funktion, die nicht beschränkt ist.

Wir zeigen in mehreren Schritten, dass

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ x \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \text{für } x \in [0,1) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Lebesgue-integrabel ist, obwohl $f(x)$ in der Nähe von $x = 1$ nicht beschränkt ist.

(a) Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right] \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeige, dass f_n eine monoton wachsende Folge Lebesgue-integrierbarer Funktionen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $\mathbb{R}$ ist, die fast überall (punktweise) gegen f konvergiert. *(2 Punkte)*

(b) Berechne $\int f_n \, \mathrm{d}\mu$. *(1 Punkt)*

(c) Folgere mittels des Satzes der monotonen Konvergenz von Beppo Levi, dass f Lebesgue-integrierbar ist und berechne den Wert des Integrals $\int f \, \mathrm{d}\mu$. *(2 Punkte)*

Desmos Demo: https://www.desmos.com/calculator/pucklamnbu

11.4. Warnung vor bedenkenlosem Vertauschen von Integration und Grenzwertbildung.

Betrachte die Funktionenfolgen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n := \frac{1}{n} \cdot \chi_{[0,n]}$

(a) Zeige, dass die Funktionenfolgen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus Lebesgue-integrierbaren Funktionen bestehen und gegen $f \equiv 0$ konvergieren. *(1 Punkt)*

(b) Untersuche, ob

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\mu = 0$$

gilt. *(1 Punkt)*

(c) Gebe an, welche der Voraussetzungen des Satzes der monotonen Konvergenz von Beppo Levi (Satz 12.22) und des Satzes der beschränkten Konvergenz von Lebesgue (Korollar 12.24) erfüllt bzw. nicht erfüllt sind und begründe dieses. *(2 Punkte)*

Desmos Demo: https://www.desmos.com/calculator/x3lfd3pdap

11.5. Eine Funktion, die nicht Lebesgue-integrierbar aber uneigentlich Riemann-integrierbar ist

Seien

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ \frac{1}{k+1} & \text{für } k \in \mathbb{N}_0 \text{ und } 2k \leq x < 2k+1 \\ -\frac{1}{k+1} & \text{für } k \in \mathbb{N}_0 \text{ und } 2k+1 \leq x < 2k+2. \end{cases}$$

und $f_n := f \cdot \chi_{[-n,n]}$.

(a) Zeige, dass

$$\int f_n \, d\mu = \begin{cases} 0 & \text{für gerade } n \\ \frac{2}{n+1} & \text{für ungerade } n. \end{cases}$$

(2 Zusatzpunkte)

Du darfst dieses Ergebnis im Folgenden benutzen.

Desmos Demo: https://www.desmos.com/calculator/6efqupohkl

(b) Warum ist f uneigentlich Riemann-integrierbar auf $\mathbb{R}$? *(1 Punkt)*

(c) Berechne $\int |f_n| \, d\mu$. Zeige, dass $|f| \notin L^1(\mathbb{R})$. *(1 Punkt)*

(d) Warum ist f nicht Lebesgue-integrierbar? *(1 Punkt)*