Analysis II
10. Übung

Martin Schmidt, Ross Ogilvie Frist: 4. Mai 2026

10.1. Über Quader, Treppenfunktionen und charakteristische Funktionen.

(a) Seien Q_1, Q_2 zwei Quader des $\mathbb{R}^d$.

(i) Zeige: $Q_1 \cap Q_2$ ist die leere Menge oder ein Quader des $\mathbb{R}^d$. *(2 Punkte)*

(ii) *Beweise oder widerlege:* $Q_1 \cup Q_2$ ist ein Quader des $\mathbb{R}^d$. *(1 Punkt)*

(b) Wie in der Vorlesung definieren wir zu einer jeden Menge $M \subset \mathbb{R}^d$ die *charakteristische Funktion* $\chi_M : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ durch

$$\chi_M(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in M, \\ 0 & \text{für } x \notin M. \end{cases}$$

Es seien nun A, B zwei Teilmengen des $\mathbb{R}^d$. Zeige:

(i) $\chi_{A \cap B} = \chi_A \cdot \chi_B$ *(1 Punkt)*

(ii) $\chi_{A \cup B} + \chi_{A \cap B} = \chi_A + \chi_B$ *(2 Punkte)*

(c) Es seien $f, g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ zwei Treppenfunktionen. Zeige, dass dann auch

$$f + g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) + g(x) \quad \text{und} \quad f \cdot g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) \cdot g(x)$$

Treppenfunktionen sind. *(2 Zusatzpunkte)*

10.2. Nullmengen.

(a) Die Teilmenge

$$H := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n = 0\}$$

des $\mathbb{R}^n$ heißt eine Hyperebene. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Betrachten Sie die offenen Quader

$$Q_k := (-k, k) \times \cdots \times (-k, k) \times (-a_k, a_k)$$

mit $a_k := \varepsilon\, 2^{-k-1}(2k)^{-n+1}$ für jedes $k \in \mathbb{N}$. Zeige, dass H eine Nullmenge ist. *(2 Punkte)*

(b) Seien $Q = [0,1]^{n-1}$ der Einheitsquader von $\mathbb{R}^{n-1}$, $f : Q \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und deren Graph sei gegeben durch

$$G(f) := \{(x, f(x)) \mid x \in Q\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Zeige, dass $G(f)$ eine Nullmenge ist. *(3 Punkte)*

Tipp: Was wissen wir über stetige Funktionen auf kompakten Mengen? Sie haben ja ein Maximum, aber was noch?! Um zu zeigen, dass $G(f)$ eine Nullmenge ist zerlege man diesen Quader in endlich viele Teilquader Q_k, auf denen man die Schwankung $\sup_{x,y \in Q_k} |f(x) - f(y)|$ kontrollieren kann.

Desmos Demo: https://www.desmos.com/3d/skpkwkoqnv

Bemerkung: Der Graph

$$G(f) := \{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R}^{n-1}\} \subset \mathbb{R}^n.$$

auf $\mathbb{R}^{n-1}$ ist auch eine Nullmenge. Der gesamte Graph ist die abzählbare Vereinigung der Graphen auf kompakten Quadern mit Kantenlänge 1 (Stell dir ein Schachbrett vor.) Nach Lemma 12.4 und Teil (b) folgt diese Bemerkung.

(c) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Warum ist U keine Nullmenge? *(2 Punkte)*

10.3. Lebesgue-integrierbare Funktionen.

(a) Zeige, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} 3 & \text{falls } x \in [0,2] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}), \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Lebesgue-integrabel (Kapitel 12), aber auf dem Intervall $[0, 2]$ nicht Riemann-integrabel (Kapitel 8) ist und berechne $\int f \, \mathrm{d}\mu$ im Sinne der Lebesgueschen Theorie.

(2 Punkte + 2 Zusatzpunkte + 1 Punkt)

(b) Seien die Funktionen

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} x & \text{falls } x \in [0,1], \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} k2^{-n} & \text{falls } x \in (k2^{-n}, (k+1)2^{-n}] \text{ für } k = 0, \ldots, 2^n - 1, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Zeige, dass g_n eine monoton wachsende Folge von Treppenfunktionen ist, die gegen g konvergiert.

(2 Zusatzpunkte)

(c) Berechne $\int g \, d\mu$. *(2 Punkte)*

(d) Zeige, dass die Funktion

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} n & \text{falls } x \in \left(\frac{1}{(n+1)!}, \frac{1}{n!}\right] \text{ für } n \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Lebesgue-integrabel ist. *(2 Punkte)*

(e) Berechne $\int h \, \mathrm{d}\mu$ für die Funktion h aus (d). *(2 Zusatzpunkte)*
[*Tipp:* Man benutze die Reihendarstellung von e.]

Desmos Demo: https://www.desmos.com/calculator/cnrhd0qs7h