

Analysis II

9. Übung

Martin Schmidt, Ross Ogilvie

Frist: 27. April 2026

9.1. Zum Satz über die implizite Funktion.

Wir betrachten eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

- (a) Zeige, dass die durch $f(x, y) = c$ lokal bestimmte implizite Funktion $y = h(x)$ einen kritischen Punkt in $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ besitzt, wenn

$$f(x_0, y_0) = c, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0. \quad (2 \text{ Punkte})$$

[*Tipp:* Warum muss $h(x)$ existieren? Man differenziere die Abbildung $x \mapsto f(x, h(x))$ mit Hilfe der Kettenregel und benutze, dass $f(x, h(x)) = c$.]

- (b) Zeige, dass in (x_0, y_0) ein lokales Maximum vorliegt, wenn

$$\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)} > 0. \quad (3 \text{ Punkte})$$

Bemerkung: Analog zeigt man dieselbe Aussage auch für ein lokales Minimum mit “ < 0 ” anstelle von “ > 0 ”.

9.2. Extremwertsuche.

Im Folgenden definieren die Nebenbedingungen kompakte Mengen ohne Singularitäten. Verwende die Methode der Lagrangemultiplikatoren, um Maximum und Minimum der Funktionen unter den gegebenen Nebenbedingungen zu finden.

- (a) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x - 6y$ unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 4$, (3 Punkte)
- (b) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$ unter der Nebenbedingung $x^2 - xy + y^2 = 3$, (3 Punkte)
- (c) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto 5x + y - 3z$ unter der Nebenbedingung $x + y + z = 0$ und $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. (2 Zusatzpunkte)

Desmos Demo: <https://www.desmos.com/3d/bggo7mlrnn>

9.3. Niveaumengen und Singularitäten.

Es sei

$$g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto 4 - 3x^2 + x^3 + y^2 + xy^2.$$

Desmos Demo: <https://www.desmos.com/3d/8f0tldwudp>

- (a) Untersuche die Niveaumengen von g daraufhin, ob sie glatte Teilmengen von \mathbb{R}^2 sind, und bestimme andernfalls ihre Singularitäten. (2 Punkte)

(b) Schreibe eine Formel $y = h(x)$ von der Kurve $g(x, y) = 4$ in der Nähe von $(1, -1)$. (1 Punkt)

(c) Überprüfe, dass $(2, 0) \in g^{-1}[0]$ liegt. Wo auf $g^{-1}[0]$ nimmt $f(x, y) = x$ den Maximumwert?
(1 Punkt und 2 Zusatzpunkte)

9.4. Die ganze Speisekarte

Die vorangegangenen Aufgaben bilden zusammen eine Methode, die Extrema einer differenzierbaren Funktion findet. Eine solche Funktion auf einer kompakten Menge muss Extrema (Maximum und Minimum) haben; die Frage ist wo? Die Kandidaten sind

- Auf dem Inneren M°
 - Kritische Punkte
 - Nicht-differenzierbare Punkte
- Auf dem Rand
 - Singularitäten
 - Andere nicht-differenzierbare Punkte des Randes
 - Kritische Punkte aus Lagrangemultiplikatoren.

Man kann kurz sagen: kritische Punkte (auf dem Inneren oder dem Rand), plus Punkte, die nicht von der Ableitung untersucht werden können.

Begründe, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^2 + y^2 - 4x + 4$$

auf der Menge

$$M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 27y^2 \leq x^3, x \leq 3\}$$

Maximum und Minimum annimmt und bestimme den maximalen und den minimalen Wert.

(5 Punkte)

[Tipp: Betrachte das Innere $M^\circ := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 27y^2 < x^3, x < 3\}$ und den Rand $\partial M := M_1 \cup M_2$ einzeln, für $M_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 27y^2 = x^3\} \cap M$ und $M_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 3\} \cap M$.]

Desmos Demo: <https://www.desmos.com/3d/23xbq4bly6>