

Analysis II

8. Übung

Martin Schmidt, Ross Ogilvie

Frist: 20. April 2026

8.1. Ein Kriterium für die Definitheit symmetrischer (2×2) -Matrizen.

Es sei $A := \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ eine symmetrische (2×2) -Matrix. Bekanntlich ist dann die Determinante von A

$$\det(A) := ad - b^2.$$

Wir nennen A positiv bzw. negativ definit, wenn die durch A beschriebene symmetrische Bilinearform $\beta(v, w) := v \cdot Aw = v^t Aw$ diese Eigenschaft hat. Das heißt, $v^t Av > 0$ bzw. $v^t Av < 0$ für alle $v \neq 0$. Ähnlich nennen wir A und β indefinit, wenn es $v, \tilde{v} \in \mathbb{R}^2$ mit $v^t Av = \beta(v, v) > 0$ und $\tilde{v}^t A\tilde{v} = \beta(\tilde{v}, \tilde{v}) < 0$ gibt.

Desmos Demo: <https://www.desmos.com/3d/suzp3tf92d>

In dieser Aufgabe entwickeln wir einen Test, die Definitheit von A zu identifizieren. Du darfst $a \neq 0$ annehmen, um eine Falluntersuchung zu vermeiden. Man kann die Fälle mit $a = 0$ untersuchen, um zu sehen, dass die obigen Ergebnisse weiter gelten.

- (a) Lass $v = (x, y)$, schreibe

$$v^t Av = ax^2 + 2bxy + dy^2 = y^2 \left[a \left(\frac{x}{y} \right)^2 + 2b \left(\frac{x}{y} \right) + d \right].$$

Zeige, dass die Diskriminante Δ des obigen quadratischen Polynoms gleich $-4 \det(A)$ ist.

(1 Punkt)

- (b) Erkläre, warum es folgt, dass A indefinit ist, wenn $\det(A) < 0$ ist.

(1 Punkt)

- (c) Begründe, dass A positiv definit bzw. negativ definit ist, wenn $\det(A) > 0$ und $a > 0$ bzw. $a < 0$ ist.

(2 Punkte)

8.2. FSK-18

Nach Satz 10.27 und Aufgaben 7.4(d) und 8.1 haben wir ein hilfreiches Kriterium:

Seien $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ eine zweimal differenzierbare Funktion und x_0 ein kritischer Punkt von f . Sei $H = \text{Hess}(f)(x_0)$ die Matrix der zweiten Ableitung in x_0 . Dann

- $\det H < 0$ impliziert, dass x_0 ein Sattelpunkt ist.
- $\det H > 0$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0) > 0$ impliziert, dass x_0 ein striktes lokales Minimum ist.
- $\det H > 0$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0) < 0$ impliziert, dass x_0 ein striktes lokales Maximum ist.

Verwende dieses Kriterium, um die folgenden kritischen Punkte zu klassifizieren.

- (a) $f(x, y) = x^3 - 3xy^2 + y^4 - 3x$, $x_0 = (1, 0)$.

(2 Punkte)

- (b) $g(x, y) = e^x (x^2 + xy + y^2)$, $x_0 = (0, 0)$.

(3 Punkte)

- (c) $h(x, y) = \sin(x) + \sin(y) + \sin(x + y)$, $x_0 = \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$. (2 Zusatzpunkte)

Desmos Demo: <https://www.desmos.com/3d/rm8cnbrzma>

8.3. Fixiere die Nullstelle.

- (a) Sei $F : [1, 10] \rightarrow [1, 10]$ mit $F(x) = 1 + \frac{1}{x}$. Zeige, dass F eine Lipschitzkonstante $L = \frac{100}{121}$ hat. Approximiere daher eine Lösung von $x^2 = x + 1$. (3 Punkte)
- (b) Kann man mit dem Banachschen Fixpunktsatz zeigen, dass die Volterra-Gleichung (Übung 17) eine Lösung hat? (2 Punkte)

8.4. Satz der Inversen.

In dieser Aufgabe betrachten wir die Funktion $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, definiert durch $f(x) = x^x = e^{x \ln x}$, sowie ihre Umkehrfunktion f^{-1} , sofern diese existiert.

Desmos Demo: <https://www.desmos.com/calculator/2gyy29qeg6>

- (a) Erkläre, warum die Ableitung einer Funktion einer reellen Veränderlichen in x_0 genau dann “invertierbar” ist (im Sinne von Satz 11.9), wenn $f'(x_0) \neq 0$ gilt. (1 Punkt)
- (b) Berechne die Ableitung von f und bestimme alle Punkte, in denen f' nicht invertierbar ist. (2 Punkte)
- (c) Berechne die Ableitung von f^{-1} . (1 Punkt)
- (d) Nutze das Taylorpolynom erster Ordnung in $4 = 2^2$ von f^{-1} , um eine Lösung von $x^x = 4.1$ zu approximieren. (2 Punkte)