

Analysis II

7. Übung

Martin Schmidt, Ross Ogilvie

Frist: 13. April 2026

7.1. Interpretation von ∇f

Es sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ in $x \in \mathbb{R}^n$ differenzierbar. Dann ist der Zeilenvektor $\nabla f(x)$ eine Darstellungsmatrix von $f'(x)$ bezüglich der Standardbasis von \mathbb{R}^n . Wende die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung an, um zu zeigen, dass

$$-\|\nabla f(x)\| \leq \nabla f(x) \cdot v \leq \|\nabla f(x)\|$$

für jeden Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ mit $\|v\| = 1$ gilt.

Zeige zudem, dass für $\nabla f(x) \neq 0$ in der linken bzw. rechten Ungleichung Gleichheit gilt, wenn $v = -\frac{\nabla f(x)}{\|\nabla f(x)\|}$ bzw. $v = \frac{\nabla f(x)}{\|\nabla f(x)\|}$ ist. (2 Punkte)

Interpretation: $\nabla f(x)$ gibt die Richtung und den Betrag des größten Anstiegs von f .

7.2. Bilinearformen

Eine Bilinearform ist eine Funktion $\beta : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, die in beiden Argumenten linear ist. Der Begriff "Form" ist ein alter Ausdruck für eine Funktion mit Werten in den Skalaren. In einer Vorlesung zur linearen Algebra werden sie nicht immer ausführlich behandelt.

In dieser Aufgabe zeigen wir, dass Bilinearformen genau diejenigen Abbildungen sind, die sich durch eine Matrix B darstellen lassen, sodass $\beta(x, y) = x^t B y$ in der Matrizenrechnung gilt.

(a) Zeige, dass $(x, y) \mapsto x^t B y$ bilinear ist. (1 Punkt)

(b) Für diesen Teil und den nächsten, setzen wir nun $n = 2$ und $m = 3$, um konkret zu sein; dasselbe Argument gilt für allgemeine Werte von n, m .

Schreibe $x = x_1 e_1 + x_2 e_2$ und $y = y_1 e_1 + y_2 e_2 + y_3 e_3$. Erkläre, warum

$$\begin{aligned} \beta(x, y) &= x_1 \beta(e_1, y) + x_2 \beta(e_2, y) \\ &= x_1 \beta(e_1, e_1) y_1 + x_1 \beta(e_1, e_2) y_2 + x_1 \beta(e_1, e_3) y_3 \\ &\quad + x_2 \beta(e_2, e_1) y_1 + x_2 \beta(e_2, e_2) y_2 + x_2 \beta(e_2, e_3) y_3. \end{aligned} \quad (1 \text{ Punkt})$$

(c) Multipliziere

$$x^t \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \end{bmatrix} y$$

aus und vergleiche mit Teil (b), um zu zeigen, wie sich b darstellen lässt. (2 Punkte)

(d) Stelle die Bilinearform $\beta : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch $\beta(x, y) = x \cdot y$, durch eine Matrix B dar. (1 Punkt)

7.3. Weitere Untersuchung.

Betrachten Sie die Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ aus Aufgabe 6.2(a):

$$f(x, y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2.$$

Die kritischen Punkte von f sind $(0, 0), (-5/3, 0), (-1, 2), (-1, -2)$. Schreiben wir in dieser Aufgabe $\mathbf{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Das Taylorpolynom ist im Satz 10.29 definiert. Das Taylorpolynom in \mathbf{x}_0 der Ordnung 0 ist einfach der Wert $f(\mathbf{x}_0)$. Das Taylorpolynom in \mathbf{x}_0 der Ordnung 1 ist

$$\begin{aligned} T_{1, \mathbf{x}_0}(\mathbf{x}) &:= \frac{1}{0!} f^{(0)}(\mathbf{x}_0) + \frac{1}{1!} f^{(1)}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \\ &= f(\mathbf{x}_0) + f'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \end{aligned}$$

Es hat die geometrische Interpretation als die Tangentialebene von f in \mathbf{x}_0 .

(a) Zeige, dass das Taylorpolynom von f in $\mathbf{x}_0 = (0, 1)$ der Ordnung 1 ist

$$T_{1, (0,1)}(x, y) = -1 + \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -1 + x + 2y. \quad (1 \text{ Punkt})$$

Das Taylorpolynom in \mathbf{x}_0 der Ordnung 2 ist

$$\begin{aligned} T_{2, \mathbf{x}_0}(\mathbf{x}) &:= \frac{1}{0!} f^{(0)}(\mathbf{x}_0) + \frac{1}{1!} f^{(1)}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \frac{1}{2!} f^{(2)}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0, \mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \\ &= f(\mathbf{x}_0) + f'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \frac{1}{2} f''(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0, \mathbf{x} - \mathbf{x}_0). \end{aligned}$$

Nach Definition 10.26 ist die Darstellungsmatrix von $f''(x)$ bezüglich der Standardbasis von \mathbb{R}^n die Hessematrix:

$$\text{Hess}(f)(\mathbf{x}_0) := \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0) \right) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\mathbf{x}_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\mathbf{x}_0) \end{bmatrix}$$

Also gilt mit Matrizen

$$T_{2, \mathbf{x}_0}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + f'(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^t \cdot \text{Hess}(f)(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$$

Die Graphen der Taylorpolynome erster und zweiter Ordnung sind hier:

Desmos Demo: <https://www.desmos.com/3d/keoergtaue>

(b) Zeige, in $\mathbf{x}_0 = (a, b)$ ist $\text{Hess}(f)(\mathbf{x}_0) = \begin{bmatrix} 12a + 10 & 2b \\ 2b & 2a + 2 \end{bmatrix}$ (2 Punkte)

(c) Berechne daher $T_{2, \mathbf{x}_0}(\mathbf{x})$ in $\mathbf{x}_0 = (0, 0), \mathbf{x}_0 = (-1, 2)$. (2 Punkte)

(d) Was kann man über $T_{2, \mathbf{x}_0}(\mathbf{x})$ sagen, wenn \mathbf{x}_0 ein kritischer Punkt ist? (1 Punkt)

(e) Sei $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ eine bilineare Abbildung. Was bedeutet "positiv definit"? (1 Punkt)

(f) Zeige, dass $\text{Hess}(f)(0, 0)$ positiv definit ist. (1 Punkt)

(g) Zeige, dass $\text{Hess}(f)(-1, 2)$ nicht positiv definit ist. (1 Punkt)

7.4. Zu Satz 10.27: Hinreichendes Kriterium für lokale Extremwerte.

Es sei $\beta : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform nach Definition 10.20 und Satz 10.22.

- (a) Warum muss β stetig sein? (1 Zusatzpunkt)
- (b) Setze voraus, dass β positiv definit ist. Betrachten $W = \{\beta(v, v) \mid v \in \mathbb{R}^n \text{ mit } \|v\| = 1\}$. Warum hat diese Menge ein Minimum ε mit $\varepsilon > 0$? (2 Punkte)
- (c) Zeige nach (b), dass $\beta(x, x) \geq \varepsilon \|x\|^2$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. (2 Punkte)
- (d) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion und $x_0 \in U$ ein kritischer Punkt von f . Wir wissen, dass $f''(x_0)$ eine symmetrische Bilinearform ist. Verwende Satz 10.27, um zu beweisen: Wenn $f''(x_0)(x, x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt, so besitzt f in x_0 ein striktes lokales Minimum. (1 Punkt)

Bemerkung 1. Wenn $f''(x_0)(x, x) < 0$ für einen kritischen Punkt x_0 , betrachte $g(x) = -f(x)$. Dann ist $g' = -f'$ und $g'' = -f''$. Es folgt dann, dass x_0 auch ein kritischer Punkt von g ist und ein lokales Minimum von g . Deshalb ist es ein striktes lokales Maximum von f .

Bemerkung 2. Diese Verschärfung von Satz 10.27 gilt nicht, wenn f auf einem unendlich-dimensionalen normierten Vektorraum definiert ist, siehe Beispiel 10.28.