

## Analysis II

### 6. Übung

Martin Schmidt, Ross Ogilvie

Frist: 23. März 2026

---

#### 6.1. Partielle Ableitungen.

Betrachte die Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch  $f(x, y) = x^2 + 2xy - y^2 - x + y + 1$ . Außerdem sei  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben als  $g(x) = f(x, 1)$ .

- (a) Rechne  $g'(x)$  im Sinne einer reellen Funktion (Analysis I Ableitung). *(0 Punkt)*
- (b) Rechne  $\frac{\partial f}{\partial x}$ . *(1 Punkt)*
- (c) Was ist der Zusammenhang zwischen  $g'(x)$  und  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, 1)$ ? *(1 Punkt)*
- (d) Nach Korollar 10.17 hat die Ableitung  $f'$ , wenn sie existiert, die Formel

$$f' = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

Wende sie auf die spezifische Funktion  $f$  dieser Aufgabe an. *(2 Punkte)*

#### 6.2. Kritische Punkte.

Für die Funktionen unten: (i) berechne die Ableitungen, (ii) bestimme alle kritischen Punkte, und (iii) nutze Desmos, um zu sehen, welche der kritischen Punkte lokale Maxima oder Minima sind.

- (a)  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$  *(4 Punkte)*
- (b)  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto y \sin(x)$  *(4 Punkte)*

Desmos Demo: <https://www.desmos.com/3d/e682kgrcy5>

#### 6.3. Wärmer!

Die Temperatur eines Zimmers ist durch die Funktion

$$T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto x^3 + e^y \sin z$$

beschrieben. Du stehst an der Stelle  $x_0 = (1, \log 3, \frac{\pi}{2})$ . Wenn du dich in der Richtung  $v = (3, -2, 6)$  ein bisschen bewegst, sinkt oder steigt die Temperatur? Antworte mithilfe der Richtungsableitung. *(4 Punkte)*

Desmos Demo: <https://www.desmos.com/3d/iqv9imrlj2>

#### 6.4. Rechenregeln für die partiellen Ableitung.

(a) Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar. Zeige, dass die partiellen Ableitung von dem Produkt  $f \cdot g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$\frac{\partial}{\partial x_k}(f \cdot g) = f \cdot \frac{\partial g}{\partial x_k} + \frac{\partial f}{\partial x_k} \cdot g$$

sind. (2 Punkte)

Seien  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  und  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar. Zeige, dass die Ableitung von der Verkettung  $g \circ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\frac{d(g \circ f)}{dt}(t) = \frac{\partial g}{\partial x_1}(f(t)) \frac{\partial f_1}{\partial t}(t) + \cdots + \frac{\partial g}{\partial x_n}(f(t)) \frac{\partial f_n}{\partial t}(t)$$

ist. (2 Punkte)