

Analysis II

5. Übung

Martin Schmidt, Ross Ogilvie

Frist: 16. März 2026

5.1. Beispiele von Ableitungen. Zeige, dass A die Ableitung von f in \mathbf{x}_0 (nach Definition 10.1) ist.

(a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x) = \begin{bmatrix} \cos x \\ \sin x \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}_0 = \pi/2$. (3 Punkte)

Desmos Demo: <https://www.desmos.com/3d/ryajlvqonu>

(b) $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $g\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = x^2 - y^2$, $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. (3 Punkte)

(c) $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $h\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x^2 + y^2 \\ x^2 - y^2 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. (3 Zusatzpunkte)

5.2. Beispiele von Ableitungen II.

(a) Schreibe jeweils die linearen Abbildungen

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = x \quad \text{und} \quad g\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = y$$

in der Form einer Matrix. (2 Punkte)

(b) Was sind deshalb ihre Ableitungen? Hängen sie von der Stelle ab? (1 Punkt)

(c) Warum dürften wir die Produktregel 10.4(ii) an $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$h\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = xy,$$

verwenden? (1 Punkt)

(d) Benutze die Produktregel, um die Ableitung $h'(\mathbf{x}_0)$ in einem beliebigen Punkt $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$ zu berechnen. (2 Punkte)

5.3. Nachfolger des Schrankensatzes.

Es seien X, Y normierte Vektorräume und $f : X \rightarrow Y$ eine differenzierbare Abbildung.

(a) Sei $U \subset X$. Sie ist konvex, wenn $\forall a, b \in U : \{(1-t)a + tb \mid t \in [0, 1]\} \subset U$. Erkläre das Konzept mit Worten oder Bildern. (1 Punkt)

- (b) Nehme an, dass f' konstant ist, d.h. gibt es ein $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ mit $f'(x) = A$ für jedes $x \in X$.
Erkläre, dass g die Voraussetzungen des Schrankensatzes 10.6 erfüllt. (2 Punkte)
- (c) Beweise: Ist $f'(x) = 0 \in \mathcal{L}(X, Y)$ für jedes $x \in X$, so ist f konstant. (2 Punkte)
- (d) Beweise: Ist f' konstant, so gibt es ein $c \in Y$ mit $f(x) = c + A(x)$. (2 Punkte)
- (e) Sei $U \subset X$ eine offene und konvexe Teilmenge und nehme an, dass $x \mapsto \|f'(x)\|_{\text{op}}$ auf U beschränkt ist. Beweise: f ist Lipschitz-stetig. (1 Punkt)