Analysis II
4. Übung

Martin Schmidt, Ross Ogilvie Frist: 9. März 2026

4.1. Stetigkeit und Linearität

Untersuche die folgenden Abbildungen auf Linearität und Stetigkeit.

(a) Seien $0 < r \in \mathbb{R}$ und $t \in \mathbb{R}$.

$$f : (\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_2) \longrightarrow (\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_2)$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} rx \\ r\cos(t)y - r\sin(t)z \\ r\sin(t)y + r\cos(t)z \end{pmatrix}.$$

(3 Punkte)

(b)

$$g : (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2) \longrightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{cases} \frac{\sqrt{|x|}y}{|x|+|y|} & \text{für} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(3 Punkte)

4.2. Der Funktionenraum $B([0,1],\mathbb{R})$.

Mit $B([0,1],\mathbb{R})$ bezeichnen wir den Banachraum der beschränkten Funktionen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. Für $f \in B([0,1],\mathbb{R})$ definieren wir eine Funktion $F(f) : [0,1] \to \mathbb{R}$ durch

$$F(f)(x) := f(\tfrac{x}{3}) \quad \text{für } x \in [0,1]. \tag{$\diamond$}$$

(a) Zeige $F(f) \in B([0,1],\mathbb{R})$. *(2 Punkte)*

(b) Wegen (a) wird durch ($\diamond$) eine Abbildung

$$F : B([0,1],\mathbb{R}) \to B([0,1],\mathbb{R}),\ f \mapsto F(f)$$

definiert. Zeige, dass F linear ist. *(2 Punkte)*

(c) Zeige: F ist Lipschitz-stetig *(2 Punkte)*

4.3. Affine Funktionen

(a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Bei $x = 0$ nimmt sie den Wert 1 an. Für jede Erhöhung von x nimmt die Funktion um 2 ab. Schreibe eine Formel für diese Funktion in der Form $f(x) = f_0 + ax$ für Konstanten $f_0, a \in \mathbb{R}$. *(1 Punkt)*

(b) Was ist $f'(0)$? *(1 Punkt)*

(c) Sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Bei $(x, y) = (0, 0)$ nimmt sie den Wert 1 an. Für jede Erhöhung von x nimmt die Funktion um 2 ab. Für jede Erhöhung von y nimmt die Funktion um 3 zu. Schreibe eine Formel für diese Funktion in der Form $g(x, y) = g_0 + ax + by$ für Konstanten $g_0, a, b \in \mathbb{R}$.

(1 Punkt)

(d) Schreibe die Funktion in Vektornotation, indem du die unterstrichenen Stellen ausfüllst:

$$g\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \_\_ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \_\_ & \_\_ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

(1 Punkt)

(e) Was ist $g'(0)$? *(1 Punkt)*

(f) Sei $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$. Bei $t = 0$ nimmt sie den Wert $(1, 0)$ an. Für jede Erhöhung von t nimmt die Funktion in der ersten Komponente um 2 ab und in der zweiten Komponente um 3 zu. Schreibe eine Formel für diese Funktion in der Form $h(t) = (h_{01} + at, h_{02} + bt)$ für Konstanten $h_{01}, h_{02}, a, b \in \mathbb{R}$. *(1 Punkt)*

(g) Schreibe die Funktion in Vektornotation, indem du die unterstrichenen Stellen ausfüllst:

$$h\left(t\right) = \begin{bmatrix} \_\_ \\ \_\_ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \_\_ \\ \_\_ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \end{bmatrix}$$

(1 Punkt)

(h) Was ist $h'(0)$? *(1 Punkt)*