

## Analysis II

### 3. Übung

Martin Schmidt, Ross Ogilvie

Frist: 2. März 2026

---

#### 3.1. Stetigkeit steckt in den Komponenten.

Sei  $n, m \in \mathbb{N}$ . Wir betrachten in dieser Aufgabe den  $\mathbb{K}^n$  und den  $\mathbb{K}^m$  jeweils mit der von einer Norm induzierten Metrik. Die Wahl der Norm ist dabei für die folgenden Stetigkeitsuntersuchungen beliebig, weil auf diesen Räumen nach Satz 9.37 je zwei Normen zueinander äquivalent sind.

- (a) Sei  $k \in \{1, \dots, n\}$ . Zeige, dass die “ $k$ -te Projektion”, d.h. die Abbildung

$$\text{pr}_k : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}, (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_k$$

Lipschitz-stetig ist.

(2 Punkte)

[Tipp: Beim betrachten einer bestimmten Norm auf  $\mathbb{K}^n$  ist diese Aufgabe schnell gelöst.]

- (b) Sei  $f : \mathbb{K}^m \rightarrow \mathbb{K}^n$  eine Abbildung. Für  $k \in \{1, \dots, n\}$  sei  $f_k := \text{pr}_k \circ f : \mathbb{K}^m \rightarrow \mathbb{K}$  die “ $k$ -te Komponente” von  $f$ . Also  $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$ .

Zeige:  $f$  ist genau dann stetig, wenn  $f_k$  für alle  $k \in \{1, \dots, n\}$  stetig ist.

(4 Punkte)

- (c)

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{falls } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = y = 0 \end{cases}.$$

Zeige, dass  $f$  nicht in  $(0, 0)$  stetig ist.

(2 Punkte)

- (d) Zeige für die Funktion  $f$  aus Teil (c), dass  $x \mapsto f(x, 0)$  und  $y \mapsto f(0, y)$  Abbildungen in 0 stetig sind.

(1 Punkt)

Desmos Demo: <https://www.desmos.com/3d/yi2drpmojk>

#### 3.2. Funktionen auf endliche Mengen.

- (a) Sei  $X = \{1, 2, 3\}$  und betrachte die Menge der Funktionen  $\mathcal{F} := \{f : X \rightarrow \mathbb{R}\}$ . Erkläre, was für ein Vektorraum  $\mathcal{F}$  ist.

(2 Punkte)

- (b) Zeige, dass  $C([0, 1], \mathbb{R})$  unendlich dimensional ist.

(2 Punkte)

[Tipp. Betrachte die Polynomen.]

#### 3.3. Stone-Weierstraß-Bernstein

- (a) Analysis I Def 5.23:

$f_n$  konvergiert gleichmäßig gegen  $f$ , wenn  $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}$  mit  $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$  für alle  $n > N$  und alle  $x$ .

Wie schreibt man diese Bedingung mit der Supremumsnorm?

(1 Punkt)

- (b) Beweise  $|f(x) - f(y)| \leq 2\|f\|_\infty$  für alle  $x, y$ . (1 Punkt)

Definiere Polynome auf  $[0, 1]$

$$b_{n,k}(x) := \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

für  $n \geq 0$  und  $0 \leq k \leq n$ . z.B.  $b_{3,1}(x) = 3x(1-x)^2 = 3x - 6x^2 + 3x^3$ . Sie heißen Bernstein-Polynome. Sie haben die Eigenschaften:

- $\sum_{k=0}^n b_{n,k}(x) = 1$ ,
- $\sum_{k=0}^n \frac{k}{n} b_{n,k}(x) = x$ ,
- $\sum_{k=0}^n \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 b_{n,k}(x) = \frac{1}{n}x(1-x)$ ,
- $b_{n,k}(x) \geq 0$ ,

für  $x \in [0, 1]$ . Wir wollen eine stetige Funktion  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  approximieren. Sei

$$f_n(x) := \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) b_{k,n}(x).$$

Siehe mit diesem Beispiel

Desmos Demo: <https://www.desmos.com/calculator/bxowuw0hcy>

- (c) Nutze eine der Eigenschaften von  $b_{n,k}$ , um Folgendes zu zeigen:

$$|f(x) - f_n(x)| = \left| \sum_{k=0}^n [f(x) - f(k/n)] b_{k,n}(x) \right| \leq \sum_{k=0}^n |f(x) - f(k/n)| b_{k,n}(x). \quad (1 \text{ Punkt})$$

- (d) Nach Analysis I Satz 5.22 wissen wir, dass jede stetige Funktion auf einem kompakten Intervall gleichmäßig stetig ist. D.h. für jedes  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $\delta > 0$ , so dass  $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/2$  für alle  $y$  mit  $|x - y| < \delta$  gilt. Zeige,

$$\sum_{k: |x - \frac{k}{n}| < \delta} |f(x) - f(k/n)| b_{k,n}(x) \leq \frac{\varepsilon}{2}. \quad (1 \text{ Punkt})$$

- (e) Erkläre für ein  $\varepsilon > 0$  und das entsprechende  $\delta > 0$  aus (d) jeden Schritt im Folgenden:

$$\sum_{k: |x - \frac{k}{n}| \geq \delta} b_{k,n}(x) \leq \sum_{k: |x - \frac{k}{n}| \geq \delta} \delta^{-2} \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 b_{k,n}(x) \leq \delta^{-2} \frac{1}{n} x(1-x) \leq \delta^{-2} n^{-1}.$$

(1 Punkt)

- (f) Zusammen wird für die  $\varepsilon > 0$  und  $\delta > 0$  aus (d) und (e) gezeigt, dass

$$\begin{aligned} |f(x) - f_n(x)| &\leq \sum_{k: |x - \frac{k}{n}| < \delta} |f(x) - f(k/n)| b_{k,n}(x) + \sum_{k: |x - \frac{k}{n}| \geq \delta} |f(x) - f(k/n)| b_{k,n}(x) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{k: |x - \frac{k}{n}| \geq \delta} 2\|f\|_\infty b_{k,n}(x) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + 2\|f\|_\infty \delta^{-2} n^{-1} \end{aligned}$$

für alle  $n$  und  $x \in [0, 1]$ . Begründe, warum man für jedes  $\varepsilon > 0$  ein  $N \in \mathbb{N}$  wählen kann, so dass  $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$  für alle  $n > N$  und  $x \in [0, 1]$  gilt. (1 Punkt)

- (g) Warum zeigt diese Aufgabe, dass die Polynome in  $C([0, 1], \mathbb{R})$  dicht liegen? (1 Punkt)