Analysis II
2. Übung

Martin Schmidt, Ross Ogilvie Frist: 23. Februar 2026

2.1. Offen für Neues.

(a) Sei (X, d) ein metrischer Raum. Zeige, dass jeder offene Ball in (X, d) eine offene Menge in (X, d) ist. *(2 Punkte)*

(b) Beweise oder widerlege: Ist $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung zwischen metrischen Räumen X und Y und ist $K \subset Y$ kompakt, so ist auch $f^{-1}[K] \subset X$ kompakt. *(1 Punkt)*

(c) Beweise oder widerlege: Für jede Menge X ist die diskrete Metrik auf X (siehe Beispiel 9.2(i)) vollständig. *(2 Punkte)*

(d) Gib explizit eine offene Überdeckung des Intervalls $(0, 1)$ an, die keine endliche Teilüberdeckung besitzt. *(1 Punkt)*

2.2. Wie man's macht, man macht's richtig!

(a) Es sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge im $\mathbb{R}^3$. Wir schreiben das Element $x_k \in \mathbb{R}^3$ jeweils in "Komponenten", d.h. in der Form $x_k = (a_k, b_k, c_k)$ mit $a_k, b_k, c_k \in \mathbb{R}$. Die erste "Komponentenfolge" $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist eine Folge in $\mathbb{R}$. (b_k) und (c_k) heißen natürlich die zweite und dritte Komponentenfolge.

Zeige: Die Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann in $\mathbb{R}^3$ bezüglich der Maximumnorm $\|\cdot\|_\infty$, wenn die Komponentenfolgen konvergieren. Ist dies der Fall, so gilt

$$\lim_{k\to\infty} x_k = \Big(\lim_{k\to\infty} a_k,\ \lim_{k\to\infty} b_k,\ \lim_{k\to\infty} c_k\Big) \in \mathbb{R}^3 .$$

(4 Punkte)

(b) Untersuche, ob die Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit

$$x_k := \Big(\sqrt[k]{k}\,,\ (1 + \tfrac{1}{k})^k\,,\ \tfrac{1}{k}\Big) \in \mathbb{R}^3$$

in $\mathbb{R}^3$ konvergiert und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.
Desmos Demo: https://www.desmos.com/3d/1hdsesonuq *(2 Punkte)*

Bemerkung 1. Es ist klar, dass der Beweis von (a) in allen Dimensionen $\mathbb{R}^n$ gilt. Für die Komponenten von einer Folge $(x_k) \in \mathbb{R}^n$ kann man $x_k = (x_{k,1}, x_{k,2}, \ldots, x_{k,n})$ oder $x_k = (x_k^1, x_k^2, \ldots, x_k^n)$ (hoch-Index, nicht Potenz) schreiben.
Bemerkung 2. In Satz 9.37 haben wir gesehen, dass je zwei Normen auf dem $\mathbb{R}^n$ äquivalent sind. Die obige Aussage gilt deshalb nicht nur bezüglich der Maximumnorm, sondern auch bezüglich jeder beliebigen anderen Norm auf dem $\mathbb{R}^n$. Wenn also von der "Konvergenz im $\mathbb{R}^n$" (ohne ausdrückliche Angabe einer Norm) die Rede ist, sind damit die Konvergenz bezüglich aller möglichen Normen beziehungsweise der Konvergenz der Komponentenfolgen gemeint.

2.3. Stetig in 2D.

In einem normierten Raum ist die Bedingung $y \in B(x, \delta)$ äquivalent zu $\|x - y\| < \delta$. Deshalb lautet Definition 9.29, dass eine Funktion $f : (X, \|\cdot\|_X) \to (Y, \|\cdot\|_Y)$ stetig in $x \in X$ ist, wenn

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ so dass } \forall y \in X \text{ mit } \|y - x\|_X < \delta \text{ auch } \|f(y) - f(x)\|_Y < \varepsilon \text{ erfüllt.}$$

Das sieht genauso aus wie die Definition der Stetigkeit aus Analysis 1, aber mit allgemeinen Normen $\|\cdot\|_X, \|\cdot\|_Y$ anstatt des Betrags $|\cdot|$ und $x, y \in X$ sind Elemente aus einem Vektorraum (oder metrischen Raum) X.

Zeige, dass diese Funktionen stetig in 0 oder $(0, 0)$ sind:

(a) $f : (\mathbb{R}, |\cdot|) \to (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2),\ t \mapsto (2t, t - 1).$ *(2 Punkte)*
Desmos Demo: https://www.desmos.com/calculator/h2u7howaey

(b) $g : (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2) \to (\mathbb{R}, |\cdot|),\ (x, y) \mapsto x + y.$ *(2 Punkte)*

(c) $h : (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2) \to (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2),\ (x, y) \mapsto (-y, x).$ *(2 Punkte)*

Zeige, dass diese Funktion nicht stetig in $(0, 0)$ ist:

(d) $j : (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2) \to (\mathbb{R}, |\cdot|),\ (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{x}{y} & \text{für } y \neq 0, \\ 1 & \text{für } y = 0. \end{cases}$ *(2 Punkte)*
Desmos Demo: https://www.desmos.com/3d/fbymlbyhal

[Tipp. Wie mann Desmos3d nutzen kann:
Desmos Demo: https://www.desmos.com/3d/a89ukjavhw]