Analysis II
1. Übung

Martin Schmidt, Ross Ogilvie Frist: 16. Februar 2026

Abgabe

Die Lösungen müssen bis spätestens **Montag, den 16. Februar 2026, 12:00 Uhr** abgegeben werden. Das Datum auf dem Übungsblatt ist die Frist.

Wie in Analysis 1 ist die Abgabe durch ILIAS. Deshalb müssen Sie sich in Portal2 in einer Parallelgruppe anmelden. Die Veranstaltung in Portal heißt "MAT 302 Analysis II - Tutorium" (im Vergleich zu "Vorlesung" oder "Übung").

Mit der Wahl der Parallelgruppe legen Sie nur Ihre Abgabe fest. Sie legen sich damit nicht auf den Besuch des entsprehenden Totoriums fest! Sie können frei wählen, welches Tutorium Sie besuchen. Prüfen Sie außerdem die Homepage, ob für Ihre Parallelgruppe Einwurf oder Upload vorgesehen ist.

Wir bitten Sie, die Übungsblätter in Zweiergruppen abzugeben. Schreiben Sie in die obere rechte Ecke beide Namen und Matrikelnummern. Übungsblätter mit mehr als zwei Namen werden nicht bewertet. Nur eine Person des Paar muss das Blatt hochladen.

Punkte

Um die Zulassung zur Klausur zu bekommen, benötigen Sie mindestens 50% der insgesamt erreichbaren Punkte. Ein Übungsblatt hat in der Regel 20 Punkte. Dieses erste Blatt hat nur 10 Punkte, da die erste Woche oft etwas chaotisch ist.

Es gibt auch "Zusatzpunkte": die sind wie normale Punkte, zählen aber nicht zu den insgesamt erreichbaren Punkten. Aufgaben mit Zusatzpunkten sind schwieriger oder behandeln Themen, die nicht klausurrelevant sind.

1.1. Die Metrik aus einer Norm ist besonders

Seien $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum und $d(v,w) = \|v - w\|$ die induzierte Metrik.

(a) Zeige, dass d translationsinvariant ist. D.h. $\forall u, v, w \in V$ gilt $d(u+w, v+w) = d(u,v)$. *(1 Punkt)*

(b) Zeige, dass d homogen ist. D.h. $\forall v, w \in V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt $d(\lambda v, \lambda w) = |\lambda| d(v,w)$. *(1 Punkt)*

(c) Beweise: für jede Metrik d auf V mit diesen zwei Eigenschaften ist $\|v\| := d(v,0)$ eine Norm. (Das ist die Umkehrung von Satz 9.5) *(2 Punkte)*

(d) Definiere die diskrete Metrik. Wie kann man sehen, dass die diskrete Metrik auf $\mathbb{R}^2$ nicht von einer Norm induziert wird? *(2 Zusatzpunkte)*

1.2. Normen.

Sei V ein Vektorraum mit Norm $\|\cdot\|$. Dann bezeichnet man die Menge $\{v \in V \mid \|v\| = 1\}$ aller Vektoren von V mit der Norm 1 als Einheitskugel in $(V, \|\cdot\|)$.

(a) Beweise mit der Notation von Satz 9.5 und Definition 9.13 $B(0,1) = \{v \in V \mid \|v\| < 1\}$. *(1 Punkt)*

(b) Seien x, y in der Einheitskugel von $(V, \|\cdot\|)$. Was ist das Maximum von $d(x,y)$? *(1 Punkt)*

(c) Betrachte die Einheitskugeln von $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$, $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ und $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$.
Desmos Demo: https://www.desmos.com/calculator/zxqlpyuw6r
Wie kann man an diesen Bildern ablesen, dass diese drei Normen äquivalent sind? *(2 Punkte)*

(d) Sei $x \in \mathbb{R}^2$. Zeige, dass die Maximumsnorm der Grenzwert der p-Normen ist, d.h.

$$\|x\|_\infty = \lim_{p \to \infty} \|x\|_p \,.$$ *(2 Punkte)*

[*Tipp:* Ist $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ gegeben, so dividiere man den Ausdruck für $\|x\|_p$ durch $\|x\|_\infty$.]

Bemerkung: Diese Eigenschaften gilt nicht nur in $\mathbb{R}^2$ sondern für alle $\mathbb{R}^n$. Alle p-Normen auf $\mathbb{R}$ sind genau gleich. Nämlich für $x \in \mathbb{R}$, $\|x\|_p = \sqrt[p]{|x|^p} = |x|$ und $\|x\|_\infty = \max\{|x|\} = |x|$.