# Kapitel 2

# Stabilität von dynamischen Systemen

Es ist das Hauptziel dieses Kapitels, ein möglichst gutes Verständnis des qualitativen Verhaltens des von einer gewöhnlichen Differentialgleichung erzeugten Flusses in der Nähe eines kritischen Punktes zu gewinnen. Diese Fragestellung steht in engem Zusammenhang mit dem Langzeitverhalten, der sog. Stabilitätstheorie.

Zuerst führen wir die wichtigsten Stabilitätsbegriffe ein und betrachten als den einfachsten Fall zweidimensionale lineare Flüsse. Danach beweisen wir das "Prinzip der linearisierten Stabilität", welches es erlaubt, aus dem Spektrum des in einem kritischen Punkt linearisierten Vektorfeldes Aufschluß über die Ljapunovstabilität dieses kritischen Punktes zu bekommen. Im letzten Paragraphen dieses Kapitels betrachten wir, in Analogie zur Klassifizierung linearer Flüsse, hyperbolische kritische Punkte eines differenzierbaren Vektorfeldes. Wir beweisen den Linearisierungssatz von Grobman und Hartmann sowie den Satz über die lokalen stabilen und instabilen Mannigfaltigkeiten.

**Definition 2.1.** *Sei $\Phi : W \to X$ ein lokaler Fluss auf einem metrischen Raum $X$ und $x_0$ ein Fixpunkt von $\Phi$. Dann heißt $x_0$*

**stabil,** *wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass $\Phi(t,x) \in B(x_0,\epsilon)$ für alle $(t,x) \in [0,\infty) \times B(x_0,\delta) \cap W$ gilt.*

**instabil,** *wenn $x_0$ nicht stabil ist.*

**attraktiv,** *wenn es ein $\delta > 0$ gibt, so dass $[0,\infty) \times B(x_0,\delta)$ in $W$ enthalten ist und $\Phi(t,x)$ für alle $x \in B(x_0,\delta)$ im Grenzwert $t \to \infty$ gegen $x_0$ konvergiert.*

**asymptotisch stabil,** *wenn $x_0$ stabil und attraktiv ist.*

**Beispiel 2.2.** **(i)** $G = \mathbb{Z}$, $X = \mathbb{C}$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\Phi(t,x)) = \lambda^t \cdot x$.

*Für* $|\lambda| \leq 1$ *ist* $0 \in X$ *stabil.*

*Für* $|\lambda| < 1$ *ist* $0 \in X$ *asymptotisch stabil.*

**(ii)** $G = \mathbb{R}$, $X = \mathbb{C}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\Phi(t,x)) = \exp(t\lambda) \cdot x$.

*Für* $\mathrm{Re}(\lambda) \leq 0$ *ist* $0 \in X$ *stabil.*

*Für* $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$ *ist* $0 \in X$ *asymptotisch stabil.*

**(iii)** *Wir parametrisieren* $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ *durch Polarkoordinaten* $(r,\varphi)$ *mit* $(x,y) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ *und betrachten den lokalen Fluss zu*

$$\dot{r}(t) = r(t)(1 - r(t)), \qquad \dot{\varphi}(t) = 1 - \cos\varphi(t).$$

*Offenbar ist* $(r,\varphi) = (1,0)$ *die enizige Ruhelage. Wir können die Lösungen der Anfangswertprobleme für* $r$ *und* $\varphi$ *unabhängig voneinander lösen. Für* $0 < r < 1$ *ist* $t \mapsto r(t)$ *streng monoton wachsend und für* $1 < r$ *streng monoton fallend. Für* $0 < r(0) \leq 1$ *bleibt die Integralkurve für* $t \geq 0$ *in dem kompakten Kreisring* $r(0) \leq r(t) \leq 1$, *und für* $1 < r(0)$ *in dem kompakten Kreisring* $1 \leq r(t) \leq r(0)$. *Daraus folgt, dass für alle Anfangswerte die maximale Integralkurve für alle* $t \in [0,\infty)$ *existiert. Außerdem gilt* $\lim_{t\to\infty} r(t) = 1$, *weil sonst* $|\dot{r}(t)| > \epsilon$ *für ein* $\epsilon > 0$ *gelten würde. Offenbar gilt auch* $\dot{\varphi} \geq 0$. *Also ist* $\varphi$ *monoton wachsend und* $\varphi(t)$ *bleibt für alle Anfangswerte* $\varphi(0) \in (-2\pi, 0)$ *in* $[\varphi(0), 0)$. *Dann gilt wieder* $\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = 0$. *Damit konvergieren die Integralkurven im Grenzwert* $t \to \infty$ *für alle Anfangswerte gegen die Ruhelage bei* $(r,\varphi) = (1,0)$, *und diese Ruhelage ist attraktiv. Weil aber für* $r(0) = 1$ *und alle* $\varphi(0) \in (-2\pi, -2\pi + \epsilon)$ *die Integralkurve den Einheitskreis fast einmal umrundet, ist die Ruehelage nicht stabil. Die maximalen Integralkurven mit Anfanswerten* $r(0) = 1$ *und* $\varphi(0) \neq 0$ *konvergieren für beide Grenzwerte* $t \to \pm\infty$ *gegen die gleiche Ruhelage. Solche Bahnkurven heißen homoklinische Orbits.*

**Lemma 2.3.** *Sei* $x_0$ *ein stabiler kritischer Punkt des lokalen Flusses* $\Phi : W \to X$. *Dann ist* $[0,\infty) \times B(x_0,\epsilon)$ *für ein* $\epsilon > 0$ *in* $W$ *enthalten.*

**Beweis:** Weil $W$ offen ist und $(0, x_0)$ enthält, liegt $(-\epsilon,\epsilon) \times B(x_0,\epsilon)$ für ein $\epsilon > 0$ in $W$. Weil $x_0$ stabil ist, gibt es ein $\delta > 0$, so dass $\Phi(t,x)$ für alle $(t,x) \in [0,\infty) \times B(x_0,\delta) \cap W$ in $B(x_0,\epsilon)$ liegt. Für $x \in B(x_0, \min\{\epsilon,\delta\})$ liegt dann $[0,\epsilon) \times \{\Phi(t,x) \mid (t,x) \in [0,\infty) \times \{x\} \cap W\}$ in $W$. Wegen der Bedingung (ii) in Definition 1.32 ist dann $[0, n\epsilon) \times \{x\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ in $W$ enthalten. Also liegt $[0,\infty) \times B(x_0, \min\{\epsilon,\delta\})$ in $W$. **q.e.d.**

## 2.1 Die Klassifikation linearer ebener Flüsse

In diesem Abschnitt untersuchen wir zunächst die Stabilität von dynamischen Systemen, die dem Fluss linearer Vektorfelder auf einem endlichdimensionalen Vektorraum $V$ entsprechen. Solche dynamischen Systeme haben immer die Null als Fixpunkt. Wir werden später sehen, dass in einer Umgebung von Fixpunkten, das Verhalten von allgemeineren dynamischen Systemen durch solche Systeme beschrieben werden kann. Deshalb ist es sinnvoll sich zunächst auf solche Systeme einzuschränken. Die entsprechenden dynamischen Systeme sind dann durch einen linearen Fluss gegeben:

$$\Phi(t,x) = e^{tA}x \quad \text{mit} \quad A \in \mathcal{L}(V).$$

Wir betrachten zuerst zweidimensionale reelle Systeme

$$\dot{x} = Ax \quad \text{für} \quad x \in \mathbb{R}^2 \quad \text{und} \quad A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2).$$

Aus dem ersten Kapitel wissen wir, daß die Lösungen durch das Spektrum $\sigma(A)$ und die algebraischen Vielfachheiten der Eigenwerte charakterisiert sind und daß wir sinnvollerweise $A$ diagonalisieren bzw. auf Jordansche Normalform bringen:

$$\dot{y} = Jy \quad \text{mit} \quad y = B^{-1}x \quad \text{und} \quad J = B^{-1}AB$$

mit einem invertierbaren $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$. Wir unterscheiden zwischen folgenden Fällen:
**1. Fall:** $A$ hat reelle nichtverschwindende Eigenwerte verschiedenen Vorzeichens. In diesem Fall ist $A$ diagonalisierbar und es existiert ein invertierbares $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ mit

$$J = B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, \quad \lambda < 0 < \mu.$$

In den Koordinaten $y = B^{-1}x$ erzeugt $J$ den Fluss $t \to (e^{\lambda t}y_1, e^{\mu t}y_2)$. In diesem Fall heißt der Nullpunkt Sattel.
**2.Fall:** Alle Eigenwerte haben negative Realteile. Dann benutzen wir das folgende Stabilitätskriterium. In diesem Fall heißt der Nullpunkt Senke oder asymptotisch stabil.

**Satz 2.4** (Stabilitätskriterium)**.** *Für $A \in \mathcal{L}(V)$ auf einem endlichdimensionalen Banachraum $V$ konvergiert $\exp(tA)$ in $\mathcal{L}(V)$ im Grenzwert $t \to \infty$ genau dann gegen Null, wenn alle komplexen Nullstellen des charakteristischen Polynoms von $A$ negativen Realteil haben.*

**Beweis:** Wir betrachten die Komplxzifizierung $A_{\mathbb{C}}$ von $A$ auf $V_{\mathbb{C}} = V + iV$, mit $A_{\mathbb{C}}(v + iw) = Av + iAw$ und bringen $A$ auf Jordansche Normalform. Weil alle Normen eines endlichdimensionalen Vektorraumes äquivalent sind, genügt es die Aussage für die Jordansche Normalform von $A$ zu beweisen. Offenbar sind $\lim_{t\to\infty}\exp(tA_{\mathbb{C}}) = 0$, und $\lim_{t\to\infty}\exp(tA) = 0$ äquivalent. Wegen Übungsaufgabe 1.57 sind dann alle Lösungen von $\dot{x} = A_{\mathbb{C}}x$ Linearkombinationen von $x(t) = t^n \exp(t\lambda)x$, wobei $\lambda$ ein Eigenwert von $A$ ist. Weil $|\exp(t\lambda)| = \exp(t\,\mathrm{Re}(\lambda))$ gilt, konvergieren diese Lösungen für $t \to \infty$ genau dann gegen Null, wenn die Realteile von allen Eigenwerten negativ sind. **q.e.d.**

Wir betrachten nun verschiedene Unterfälle:

**(a) Die Eigenwerte sind reell:** $\lambda \le \mu < 0$. Wenn $A$ diagonalisierbar ist, dann folgt

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

für ein relles invertierbares $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$. Dann erhält man $y(t) = (e^{\lambda t}y_1, e^{\mu t}y_2)$. Ist $A$ nicht diagonalisierbar, dann muß $\lambda = \mu$ sein. Und $A$ hat die Jordansche Normalform

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \lambda < 0$$

für ein relles invertierbares $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$. Die transformierte Gleichung $\dot{y} = Jy$ hat die Lösung $y(t) = (y_1(t), y_2(t))$ mit

$$y_1(t) = \alpha e^{\lambda t} + \beta t e^{\lambda t}, \qquad y_2(t) = \beta e^{\lambda t}, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Für $\beta \ne 0$ haben $y_2 \ne 0$ und $\beta$ das gleiche Vorzeichen und $y_1$ ist ein Funktion von $y_2$:

$$y_1 = \frac{\alpha y_2}{\beta} + \frac{y_2}{\lambda}\ln\left(\frac{y_2}{\beta}\right) \quad \text{mit} \quad \lambda < 0.$$

In beiden Fällen heißt 0 ein stabiler Knoten, wobei man im zweiten Fall von einem falschen Knoten spricht.

**(b) Die Eigenwerte sind komplex:** also konjugiert komplex. Ist $A_{\mathbb{C}} \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$ die Komplexifizierung von $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$, so folgt aus $A_{\mathbb{C}}u = \lambda u$ durch Konjugation $A_{\mathbb{C}}\bar{u} = \bar{\lambda}\bar{u}$, d.h. $A_{\mathbb{C}}v = \lambda u \Leftrightarrow A_{\mathbb{C}}\bar{u} - \bar{\lambda}\bar{u}$. Mit diesem Eigenvektor $u$ von $A_{\mathbb{C}}$ zum Eigenwert $\lambda$ bilden dann $u$ und $\bar{u}$ eine Basis von $\mathbb{C}^2$, und der Realteil $v$ und der Imaginärteil $w$ von $u$ eine Basis von $\mathbb{R}^2$. Seien $\alpha$ und $\omega$ Realteil und Imginärteil von $\lambda$. Dann gilt:

$$Av + iAw = A_{\mathbb{C}}(v + iw) = (\alpha + i\omega)(v + iw) = \alpha v - \omega w + i(\alpha w + \omega v),$$

$$Av = \alpha v - \omega w \qquad Aw = \omega v + \alpha w.$$

Wir sehen: hat $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ einen nichtreellen Eigenwert $\lambda = \alpha + i\omega$, mit $\omega \ne 0$, so ist auch $\bar{\lambda} = \alpha - i\omega$ ein Eigenwert und es existiert ein invertierbares $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ mit

$$J = B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \alpha & -\omega \\ \omega & \alpha \end{pmatrix}, \quad \omega > 0.$$

Um $e^{tJ}$ zu berechnen, identifizieren wir $\mathbb{R}^2$ mit $\mathbb{C}$ durch $(x, y) \leftrightarrow x + iy$. Wegen

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\omega \\ \omega & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x - \omega y \\ \omega x + \alpha y \end{pmatrix} \leftrightarrow (\alpha + i\omega)(x + iy),$$

entspricht bei dieser Identifikation $J$ der Multiplikation mit $\lambda = \alpha + i\omega$. Wenn wir $\mathcal{L}(\mathbb{C})$ mit $\mathbb{C}$ wie üblich durch $M \in \mathcal{L}(\mathbb{C}) \leftrightarrow m = M1 \in \mathbb{C}$ identifizieren, erhalten wir einen $\mathbb{R}$-Algebraisomorphismus $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2) \leftrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$. Folglich entspricht $J^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ der Matrix zu $\lambda^n$ und somit $e^{tJ}$ der Matrix zu $e^{\lambda t} = e^{\alpha t}(\cos(\omega t) + i \sin(\omega t))$, also

$$e^{tJ} = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t \\ \sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix}.$$

Geometrisch bewirkt also $e^{tJ}$ eine Streckung mit dem Faktor $e^{\lambda t}$ und eine Drehung im mathematisch positiven Sinn um den Winkel $\omega$. In diesem Fall heißt 0 stabile Spirale.
**3.Fall: Alle Eigenwerte haben positive Realteile.** Durch die Zeitumkehr können wir diesen Fall in den zweiten transformieren. Es folgt für jede nichttriviale Lösung

$$\lim_{t\to\infty} |u(t)| = \infty \text{ und } \lim_{t\to-\infty} u(t) = 0$$

Der Ursprung heißt Quelle. Wegen $e^{tA} = e^{-t(-A)}$ erhält man die Phasenporträts von Fall 2 durch Umkehren der Pfeile. Man spricht dann von instabilen Knoten und Spiralen.
**4.Fall: Die Eigenwerte sind rein imaginär.** In diesem Fall kann $A$ auf die Form

$$J = B^{-1}AB = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}, \quad \omega > 0,$$

transformiert werden. Folglich gilt

$$e^{tJ} = \begin{pmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t \\ \sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix},$$

und alle Lösungen sind periodisch mit der Periode $2\pi/\omega$. In den $y$-Koordinaten sind die Bahnen Kreise um 0, in den $x$-Koordinaten Ellipsen. In diesem Fall heißt 0 Zentrum.

Die Eigenwerte von $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$\det(A - \lambda) = \lambda^2 - \text{Spur}(A)\lambda + \det(A).$$

Mit der Diskriminante $\text{Dis} = \text{Spur}^2(A) - 4\det(A)$ sind die Eigenwerte gegeben durch $\frac{1}{2}(\text{Spur}(A) \pm \sqrt{\text{Dis}})$. Folglich sind die Eigenwerte reell, wenn $\text{Dis} \geq 0$ gilt, und sie sind komplex mit negativem Realteil für $\text{Spur}(A) < 0$ und $\text{Dis} < 0$, usw.. Also kann man die geometrische Information über die Phasenporträts von $\dot{x} = Ax$, die vom charakteristischen Polynom abgeleitet werden kann, zusammenfassen:

**Sattel:** $\det(A) < 0$.

**Senken:** $\det(A) > 0$ und $\mathrm{Spur}(A) < 0$.

**Knoten:** $\mathrm{Spur}^2(A) \geq 4\det(A)$.

**Spirale:** $\mathrm{Spur}^2(A) < 4\det(A)$.

**Zentren:** $\det(A) > 0$ und $\mathrm{Spur}(A) = 0$.

**Quellen:** $\det(A) > 0$ und $\mathrm{Spur}(A) > 0$.

**Knoten:** $\mathrm{Spur}^2(A) \geq 4\det(A)$.

**Spirale:** $\mathrm{Spur}^2(A) < 4\det(A)$.

## 2.2 Hyperbolische lineare Flüsse

Im Folgenden wollen wir die sogenannten hyperbolischen linearen Flüsse einführen. Sie sind im wesentlichen dadurch charakterisiert, dass sie keine Grenzfälle enthalten die durch sehr kleine Störungen ihr Verhalten dramatisch verändern können. Wir betrachten dafür den allgemeinen Fall eines beliebigen $\mathbb{K}$- Vektorraums $V$ der Dimension $m < \infty$ mit Norm $\|\cdot\|_V$. Die entsprechende Norm auf $\mathcal{L}(V)$ bezeichnen wir auch mit $\|\cdot\|_V$. Für $A \in \mathcal{L}(V)$ bezeichnen wir mit $e^{tA}$ den von $A$ erzeugten linearen Fluß auf $V$

$$\Phi : \mathbb{R} \times V \to V, \quad (t, x) \mapsto e^{tA}x.$$

Der Nullpunkt von $e^{tA}$ ist ein Fixpunkt und heißt eine Senke (bzw. Quelle), wenn

$$\lim_{t\to\infty} e^{tA}x = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad \lim_{t\to-\infty} e^{tA}x = 0 \qquad \text{für alle } x \in V \text{ gilt.}$$

Wegen dem Stabilitätskriterium ist 0 genau dann eine Senke (bzw. Quelle), wenn gilt

$$\mathrm{Re}(\lambda) < 0 \quad \text{bzw.} \quad \mathrm{Re}(\lambda) > 0 \quad \text{für alle} \quad \lambda \in \sigma(A).$$

Ist 0 eine Senke (bzw. Quelle), so sagt man auch, der lineare Fluß $e^{tA}$ sei eine Kontraktion (bzw. Expansion). Wir wollen nun zeigen, daß bei einer Kontraktion (bzw. Expansion) jede Bahn $t \mapsto e^{tA}x$ mit $x \neq 0$ für $t \to \infty$ exponentiell gegen 0 (bzw. "gegen $\infty$") konvergiert. Dazu benötigen wir das folgende wichtige Lemma.

Ist $M \subset \mathbb{C}$ nicht leer und ist $\beta \in \mathbb{R}$, so schreiben wir im folgenden

$$\mathrm{Re}(M) < \beta,$$

wenn $\mathrm{Re}(m) < \beta$ für alle $m \in M$ gilt. Analog sind verwandte Ungleichungen zu interpretieren. Ferner verstehen wir unter einer Hilbertnorm $\|\cdot\|$ eine aus einem Skalarprodukt abgeleitete Norm, d.h. für ein geeignetes Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ auf $V$ gilt $\|x\|^2 = \langle x, x\rangle$.

**Lemma 2.5.** *Für $A \in \mathcal{L}(V)$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ gelte $\mathrm{Re}(\sigma(A)) < \alpha$. Dann existiert eine Hilbertnorm $\|\cdot\|_A$ auf $V$ mit $\|e^{tA}\|_A \le e^{\alpha t}$ für alle $t \ge 0$.*

**Beweis:** Für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ wissen wir, daß $A$ bzgl. einer geeigneten Basis die Form

$$A = D + N \quad \text{mit} \quad D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_2, \ldots, \lambda_k, \ldots, \lambda_k) = \mathrm{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_m)$$

und $N^m = 0$ sowie $DN = ND$. Außerdem können wir die Basis $\{e_1, \ldots, e_m\}$ von $V$ so wählen, daß gilt: $Ne_j = e_{j-1}$ oder 0. Ersetzen wir $e_j$ durch $a_j = \delta^j e_j$ mit $\delta > 0$, so bleibt $D$ unverändert, und für $N$ gilt: $Na_j = \delta a_{j-1}$ oder 0. Also hat die Matrix von $N$ bezüglich der Basis $\{a_1, \ldots, a_m\}$ höchstens in der oberen Nebendiagonalen von Null verschiedene Elemente, und zwar die Zahlen $\delta$. Wenn wir nun die zu dieser Basis gehörige euklidische Norm verwenden, erhalten wir zu jedem $\epsilon > 0$ eine Hilbertnorm $\|\cdot\|_A$ auf $V$ mit $\|N\|_A \le \epsilon$. Für $D = \mathrm{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_m)$ und $e^{tD}$ gilt offensichtlich

$$\|D\|_A = \max_{1\le j\le m} |\mu_j|, \qquad \|e^{tD}\|_A = \max_{1\le j\le m} |e^{t\mu_j}| = \max_{1\le j\le m} e^{t\,\mathrm{Re}(\mu_j)} \le e^{t(\alpha-\epsilon)},$$

wenn wir $\epsilon > 0$ so wählen, daß $\mathrm{Re}(\lambda) \le \alpha - \epsilon$ für alle $\lambda \in \sigma(A)$ ist. Also gilt für $t \ge 0$

$$\|e^{tA}\|_A = \|e^{tD+tN}\|_A = \|e^{tD}e^{tN}\|_A \le \|e^{tD}\|_A \cdot \|e^{tN}\|_A \le e^{t(\alpha-\epsilon)}e^{t\|N\|_A} \le e^{t(\alpha-\epsilon)}e^{t\epsilon} = e^{\alpha t}$$

Da der Realteil eines komplexen Skalarproduktes ein reelles Skalarprodukt ist, induziert eine Hilbertnorm $\|\cdot\|_{A_\mathbb{C}}$, die auf der Komplexifizierung $V_\mathbb{C} = V \oplus iV$ eines reellen Vektorraumes $V$ definiert ist, auf dem reellen Untervektorraum $V$ eine Hilbertnorm $\|\cdot\|_A$. Da $\|Ax\|_A = \|A_\mathbb{C}x\|_{A_\mathbb{C}}$ für $A \in \mathcal{L}(V)$ und $x \in V$ gilt, folgt $\|A\|_A = \|A\|_{A_\mathbb{C}}$. Also folgt die Behauptung im reellen Fall durch Anwenden der obigen Resultate auf die Komplexifizierung. **q.e.d.**

**Korollar 2.6. (i)** *Gilt $\mathrm{Re}(\sigma(A)) < \alpha$, so existiert eine Konstante $\beta \ge 0$ mit*

$$\|e^{tA}\|_V \le \beta e^{\alpha t} \quad \textit{für alle} \quad t \ge 0.$$

**(ii)** *Gilt $\mathrm{Re}(\sigma(A)) > \alpha$, so existiert eine Konstante $\gamma > 0$ mit*

$$\|e^{tA}x\|_V \ge \gamma e^{\alpha t}\|x\|_V \quad \textit{für} \quad x \in V \textit{ und } t \ge 0.$$

**Beweis:** (i) folgt aus der Äquivalenz aller Normen auf dem endlichdimensionalen Raum $\mathcal{L}(V)$ und dem vorangehenden Lemma. In (ii) folgt aus dem vorangehenden Lemma wegen $\sigma(-A) = -\sigma(A)$ für eine geeignete Hilbertnorm $\|\cdot\|_{-A}$

$$\|e^{-tA}\|_{-A} = \|e^{t(-A)}\|_A \leq e^{-\alpha t} \quad \text{für} \quad t \geq 0.$$

$$\|x\|_{-A} = \|e^{-tA}e^{tA}x\|_{-A} \leq \|e^{-tA}\|_{-A}\|e^{tA}x\|_{-A} \leq e^{-\alpha t}\|e^{tA}x\|_{-A} \quad \text{für} \quad x \in V \text{ und } t \geq 0.$$

Daraus folgt (ii) wieder wegen der Äquivalenz der Normen. **q.e.d.**

Nach diesen Vorbereitungen erhalten wir das folgende Theorem über das exponentielle Abklingen bzw. Anwachsen der Flußlinien im Falle einer Senke bzw. Quelle.

**Satz 2.7.** *Sei $A \in \mathcal{L}(V)$. Dann sind äquivalent:*

**(i)** *Der Nullpunkt ist eine Senke.*

**(ii)** *Es existieren $\alpha > 0$ und $\beta \geq 0$ mit $\|e^{tA}x\|_V \leq \beta e^{-\alpha t}\|x\|_V$ für alle $t \geq 0$ und $x \in V$.*

**(iii)** *Es existieren eine Hilbertnorm $\|\cdot\|_A$ und $\alpha > 0$ mit $\|e^{tA}\|_A \leq e^{-\alpha t}$ für $t \geq 0$.*

*Ebenso sind äquivalent:*

**(i')** *Der Nullpunkt ist eine Quelle.*

**(ii')** *Es existieren $\alpha > 0$ und $\beta \geq 0$ mit $\|e^{tA}x\|_V \geq \beta e^{\alpha t}\|x\|_V$ für alle $t \geq 0$ und $x \in V$.*

**(iii')** *Es existieren eine Hilbertnorm $\|\cdot\|_{-A}$ und $\alpha > 0$ mit $\|e^{tA}x\|_{-A} \geq e^{\alpha t}\|x\|_{-A}$ für $t \geq 0$.*

**Beweis:** Die Behauptung folgt unmittelbar aus dem vorangehenden Korollar. **q.e.d.**

Im Folgenden bezeichnen wir mit $m(\lambda)$ die algebraische Vielfachheit des Eigenwertes $\lambda$ von $A \in \mathcal{L}(V)$. Außerdem zerlegen wir das Spektrum $\sigma(A)$ disjunkt,

$$\sigma(A) = \sigma_s(A) \cup \sigma_n(A) \cup \sigma_u(A),$$

| | |
|---|---|
| in das “stabile Spektrum”: | $\sigma_s(A) = \{\lambda \in \sigma(A) \mid \mathrm{Re}(\lambda) < 0\}$, |
| das “neutrale Spektrum”: | $\sigma_n(A) = \{\lambda \in \sigma(A) \mid \mathrm{Re}(\lambda) = 0\}$, |
| und das “instabile Spektrum”: | $\sigma_u(A) = \{\lambda \in \sigma(A) \mid \mathrm{Re}(\lambda) > 0\}$. |

**Definition 2.8.** *Der von $A$ erzeugte Fluß $e^{tA}$ heißt hyperbolisch, wenn $\sigma_n(A) = \emptyset$, also*

$$\sigma(A) = \sigma_s(A) \cup \sigma_u(A).$$

Der folgende Satz verallgemeinert den zweidimensionalen Sattel:

**Satz 2.9.** *Sei $e^{tA}$ ein hyperbolischer linearer Fluß. Dann gibt es eine Zerlegung*

$$V = V_s \oplus V_u \qquad \mathit{mit} \quad A = A_s \oplus A_u \qquad \mathit{und} \quad e^{tA} = e^{tA_s} \oplus e^{tA_u},$$

*derart, daß $e^{tA_s}$ eine Kontraktion und $e^{tA_u}$ eine Expansion sind. Sie ist eindeutig mit*

$$dim(V_s) = \sum_{\lambda \in \sigma_s(A)} m(\lambda) \qquad dim(V_u) = \sum_{\lambda \in \sigma_u(A)} m(\lambda).$$

**Beweis:** Wir betrachten zuerst den komplexen Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Wir setzen

$$V_s = \bigoplus_{\lambda \in \sigma_s(A)} V_\lambda \quad V_u = \bigoplus_{\lambda \in \sigma_u(A)} V_\lambda \quad \text{mit} \quad V_\lambda = \{x \in V \mid (A - \lambda \mathbb{1}_V)^{m(\lambda)} x = 0\}.$$

Hierebei bezeichnet $m(\lambda)$ die Ordnung der Nullstelle $\lambda$ des charakteristischen Polynoms von $A$. Wir zerlegen also jeden Vektor von $V$ bezüglich der Basis, in der $A$ Jordansche Normalform hat. Dann wird $V_\lambda$ von den Basisvektoren aufgespannt, die zu einem Jordanblock mit Eigenwert $\lambda$ gehören. Entsprechend werden $V_s$ und $V_u$ von den Basisvektoren aufgespannt, die zu einem Jordanblock mit einem Eigenwert in $\sigma_s(A)$ bzw. in $\sigma_u(A)$ gehören.v Aufgrund der Jordanschen Normalform sind die Unterräumen $V_\lambda$ und damit auch die Unterräume $V_s$ und $V_u$ invariant unter $A$. Dann ist $V = V_s \oplus V_u$, und diese Zerlegung zerlegt $A = A_s \oplus A_u$. Offenbar gilt

$$\sigma(A_s) = \sigma_s(A), \qquad \sigma(A_u) = \sigma_u(A).$$

Aus dem Stabilitätskriterium folgt, daß $e^{tA_s}$ eine Kontraktion bzw. $e^{tA_u}$ eine Expansion ist. Offenbar gelten die Formeln für die Dimensionen. Es bleibt noch, die Eindeutigkeit zu zeigen. Sie folgt aus folgender Charakterisierung derUnterräume $V_s$ und $V_u$:

$$V_s = \{x \in V \mid \lim_{t\to\infty} e^{tA}x = 0\}, \qquad V_u = \{x \in V \mid \lim_{t\to-\infty} e^{tA}x = 0\}.$$

Im reellen Fall komplxifizieren wir zuerst den Vektorraum $V$ und die lineare Abbildung $A$: Wir definieren den komplexen Vektorraum $V_\mathbb{C} = V \oplus iV$ mit der natürlichen Skalarmultiplikation von komplexen Zahlen und $A_\mathbb{C}(u \oplus iv) = Au \oplus iAv$. Dann ist $A_\mathbb{C}$ eine komplexlineare Abbildung in $\mathcal{L}(V_\mathbb{C})$. Die Anwendung obiger Zerlegung auf $A_\mathbb{C}$ ergibt:

$$V_\mathbb{C} = (V_\mathbb{C})_s \oplus (V_\mathbb{C})_u, \qquad A_\mathbb{C} = (A_\mathbb{C})_s \oplus (A_\mathbb{C})_u,$$

derart, daß $e^{t(A_\mathbb{C})_s}$ eine Kontraktion und $e_u^{t(A_\mathbb{C})}$ eine Expansion sind. Die Abbildung

$$V_\mathbb{C} \to V_\mathbb{C}, \qquad u \oplus iv \mapsto u \oplus -iv$$

heisst komplexe Konjugation von $V_{\mathbb{C}}$. Ihre Fixpunktmenge besteht aus den rein reellen Vektoren, die wir mit $V$ identifizieren. Aus dem selben Grund, aus dem die komplexe Konjugation von $\mathbb{C}$ ein Algebrahomomorphismus ist, ist der komplex kunjugierte Vektor von $\lambda \cdot (u \oplus iv)$ gleich $\bar{\lambda} \cdot (u \oplus -iv)$. Deshalb bildet die komplexe Konjugation $V_\lambda$ auf $V_{\bar{\lambda}}$ ab. Weil die komplexe Konjugation $\sigma_s(A)$ und $\sigma_u(A)$ invariant lassen, lässt die komplexe Konjugation von $V_{\mathbb{C}}$ die Unterräume $(V_{\mathbb{C}})_s$ und $(V_{\mathbb{C}})_u$ invariant. Deshalb können wir die Fixpunkte der komplexen Konjugation $V$ zerlegen in $V = V_s \oplus V_u$ mit

$$V_s = (V_{\mathbb{C}})_s \cap V, \qquad\qquad V_u = (V_{\mathbb{C}})_u \cap V.$$

Diese Unterräume sind invariant unter $A$, und $A$ zerfällt in $A = A_s \oplus A_u$. Dann folgt die Behauptung aus der entsprechenden Aussage im komplexen Fall. **q.e.d.**

Die invarianten Untervektorräume $V_s$ bzw. $V_u$ des hyperbolischen linearen Flusses $e^{tA}$ heißen stabile bzw. instabile Untervektorräume des Flusses. Ein hyperbolischer linearer Fluß kann eine Kontraktion ($\sigma_u = \emptyset$) oder eine Expansion ($\sigma_s = \emptyset$) sein.

Es erhebt sich die Frage, was an den Phasenporträts dieses Abschnitts charakteristisch ist. Ist es möglich, durch Einführen geeigneter nichtlinearer Koordinaten einen Sattel in einen Knoten oder einen stabilen Knoten in eine instabile Spirale zu verwandeln? Wir werden zeigen, daß dies nicht der Fall ist, daß es aber wohl möglich ist, einen stabilen Knoten in einen stabilen Strudel zu transformieren. Dazu müssen wir zuerst den Begriff äquivalenter Flüsse präzisieren.

**Definition 2.10.** *Seinen $\Phi$ und $\tilde{\Phi}$ zwei lokale Flüsse auf den metrischen Räumen $X$ und $\tilde{X}$, mit den Definitionsbereichen $W \subset \mathbb{R} \times X$ und $\tilde{W} \subset \mathbb{R} \times \tilde{X}$. Die Lokalen Flüsse $\Phi$ und $\tilde{\Phi}$ heißen flußäquivalent, wenn $\mathbb{1}_{\mathbb{R}} \times \Psi$ für einen Homöomorphismus $\Psi$ von $X$ auf $\tilde{X}$ ein Hoöomorphismus von $W$ auf $\tilde{W}$ ist, und $\Psi \circ \Phi = \tilde{\Phi} \circ (\mathbb{1}_{\mathbb{R}} \times \Psi)$ auf $W$ gilt.*

Jedes $\Psi$ mit diesen Eigenschaften heißt eine (topologische) Flußäquivalenz. Folglich ist $\Psi$ genau dann eine topologische Flußäquivalenz, wenn das folgende Diagramm kommutiert:

$$W \subset \mathbb{R} \times X \Gamma > \Phi >> X$$

$$\Gamma V V \mathbb{1}_{\mathbb{R}} \times \Psi V \Gamma V V \Psi V$$

$$\tilde{W} \subset \mathbb{R} \times \tilde{X} \Gamma > \tilde{\Phi} >> \tilde{X}.$$

Hierbei ist $\mathbb{1}_{\mathbb{R}} \times \Psi : W \to \mathbb{R} \times X$ definiert als $(\mathbb{1}_{\mathbb{R}} \times \Psi)(t, x) = (t, \Psi(x))$.

Sind $X$ und $\tilde{X}$ offene Teilmengen eines Banchraumes, und $\Psi$ stetig differenzierbar mit stetig differenzierbarer Umkehrabbildung, so heißen $\Phi$ und $\tilde{\Phi}$ stetig differenzierbar äquivalent und $\Psi$ ist eine $C^1$-Flußäquivalenz. Sind $X$ und $\tilde{X}$ Banachräume und $\Psi$ linear, so heißen $\Phi$ und $\tilde{\Phi}$ linear äquivalent und $\Psi$ ist eine lineare Flußäquivalenz. Offenbar sind (topologische) Flußäquivalenz bzw. $C^1$-Flußäquivalenz bzw. lineare Flußäquivalenz Äquivalenzrelationen. Außerdem bildet eine Flussäquivalenz $\Psi$ die Orbits von $\Phi$ auf die

Orbits von $\tilde{\Phi}$ ab, und zwar unter Erhaltung der Orientierung. Wir klassifizieren zuerst lineare Flüsse linear und bestimmen die Äquivalenzklassen der linearen Flußäquivalenz.

**Satz 2.11.** *Seien $A$ und $B$ lineare Abbildungen auf endlichdimensionalen Vektorräumen. Dann sind $e^{tA}$ und $e^{tB}$ genau dann linear flußäquivalent, wenn die beiden linearen Abbildungen $A$ und $B$ die gleiche Jordansche Normalform haben.*

**Beweis:** Für eine lineare Flußäquivalenz $\Psi$ zwischen $e^{tA}$ und $e^{tB}$ gilt folgendes:

$$\Psi \circ e^{tA} = e^{tB} \circ \Psi \quad \Longleftrightarrow \quad e^{t\Psi\circ A\circ\Psi^{-1}} = e^{tB} \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Bilden wir nämlich links und rechts die Ableitung nach $t$ an der Stelle $t = 0$, so folgt $\Psi \circ A \circ \Psi^{-1} = B$. Also haben $A$ und $B$ die gleiche Jordansche Normalform. Umgekehrt folgt daraus, dass $A$ und $B$ die gleiche Jordansche Normalform haben, dass es ein invertierbares $\Psi$ gibt mit $B = \Psi \circ A \circ \Psi^{-1}$. **q.e.d.**

Der nächste Satz zeigt, daß die differenzierbare Klassifizierung nichts neues ergibt.

**Satz 2.12.** *Für lineare Abbildungen $A$ und $B$ auf endlichdimensionalen Vektorräumen sind $e^{tA}$ und $e^{tB}$ genau dann $C^1$-flußäquivalent, wenn sie linear flußäquivalent sind.*

**Beweis:** Es sei $\Psi$ eine $C^1$-Flußäquivalenz zwischen $e^{tA}$ und $e^{tB}$ und $V$ der Vektorraum auf dem $A$ wirkt. Dann führt der stetig differenzierbare Homöomorphismus $\Psi \in C^1$ dem kritischen Punkt $x = 0$ des Flusses $e^{tA}$ in einen kritischen Punkt $y = \Psi(0)$ des Flusses $e^{tB}$ über, d.h. $e^{tB}y = y$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Bezeichnen wir mit $T$ die Translation $x \to x - y$, so ist $T \circ \Psi$ eine Flußäquivalenz zwischen $e^{tA}$ und $e^{tB}$, wegen

$$\begin{aligned} T \circ \Psi \circ e^{tA}x &= \Psi \circ e^{tA}x - y = e^{tB}\Psi(x) - y \\ &= e^{tB}\Psi(x) - e^{tB}y = e^{tB}(T \circ \Psi)(x) \quad \text{für alle } x \in V \text{ und } t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Außerdem ist $T \circ \Psi(0) = 0$ und $(T \circ \Psi)'(0)$ eine invertierbare lineare Abbildung. Durch Differenzieren der Beziehung in $x = 0$ folgt

$$(T \circ \Psi)'(0) \circ e^{tA}x = e^{tB}(T \circ \Psi)'(0)(x) \quad \text{für alle} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Also ist $(T \circ \Psi)'(0)$ eine lineare Flußäquivalenz zwischen $e^{tA}$ und $e^{tB}$. Die Umkehrung ist offensichtlich. **q.e.d.**

Für die topologische Klassifizierung linearer Flüsse benötigen wir das folgende

**Lemma 2.13.** *Die Realteile aller Eigenwerte von $A \in \mathcal{L}(V)$ auf einem endlichdimensionalen Vektorraum $V$ seien negativ, und $\Phi$ sei der von $A$ erzeugte lineare Fluß auf $V$, d.h. $\Phi(t, \cdot) = e^{tA}$ für $t \in \mathbb{R}$. Mit der Hilbertnorm $\|\cdot\|_A$ auf $V$ aus Lemma 2.5 ist*

$$\hat{\Phi} : \mathbb{R} \times \mathbb{S}^{d-1}_A \to V \setminus \{0\}, \quad (t, x) \mapsto \Phi(t, x)$$

*auf $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{d-1}_A = \mathbb{R} \times \{x \in V \mid \|x\|_A = 1\}$ ein Homöomorphismus.*

**Beweis:** Mit $\Phi$ ist auch $\hat{\Phi}$ stetig. Wähle ein $\alpha > 0$ mit $\operatorname{Re}\sigma(A) < -\alpha$. Dann existiert nach Satz 2.7 eine Hilbertnorm $\|\cdot\|_A$ auf $V$ mit

$$e^{-t\alpha}\|x\|_A \leq \|e^{tA}x\|_A \quad \text{für } t \leq 0 \quad \text{und} \quad \|e^{tA}x\|_A \leq e^{-t\alpha}\|x\|_A \quad \text{für } t \geq 0.$$

Also liegt für jedes $x \in \mathbb{S}_A^{d-1}$ und $t \neq 0$ $e^{tA}x$ nicht in $\mathbb{S}_A^{d-1}$. Also folgt aus $\hat{\Phi}(t,x) = \hat{\Phi}(t',x')$ zuerst $1 = \|x'\|_A = \|e^{(t-t')A}x\|_A$, also $t = t'$ und $x = x'$. Damit ist $\hat{\Phi}$ injektiv. Für $y \in V \setminus \{0\}$ gibt es wegen dem Zwischenwertsatz und wegen $\lim_{t\to-\infty} e^{-t\alpha}\|y\|_A = \infty$ und $\lim_{t\to\infty} e^{-t\alpha}\|y\|_A = 0$ ein $t \in \mathbb{R}$ mit $\|\Phi(-t,y)\|_A = 1$. Also ist $\hat{\Phi}$ auch surjektiv und damit bijektiv. Für $x \in \mathbb{S}_A^{d-1}$ folgt $t \geq -\frac{1}{\alpha}\ln\|\hat{\Phi}(t,x)\|_A$ aus $t \leq 0$ und $t \leq -\frac{1}{\alpha}\ln\|\hat{\Phi}(t,x)\|_A$ aus $t \geq 0$. Deshalb gilt $|t| \leq \frac{1}{\alpha}|\ln\|\hat{\Phi}(t,x)\|_A|$. Dann ist das Urbild einer kompakten Teilmenge von $V \setminus \{0\}$ unter $\hat{\Phi}$ beschränkt und kompakt. Insbesondere ist $\hat{\Phi}^{-1}[U]$ für eine kompakten Umgebung $U \subset V \setminus \{0\}$ eines $y \in V \setminus \{0\}$ eine kompakte Umgebung von $\hat{\Phi}^{-1}(y)$. Jede abgeschlossene Teilmenge $A \subset \hat{\Phi}^{-1}[U]$ ist kompakt. Ihr Urbild unter $\hat{\Phi}^{-1}$ ist als das Bild $\hat{\Phi}[A]$ ebenfalls kompakt und abgeschlossen. Also ist die Einschränkung von $\hat{\Phi}^{-1}$ auf $U$ stetig und damit $\hat{\Phi}^{-1}$ bei jedem $y \in V \setminus \{0\}$. **q.e.d.**

Das obige Lemma besagt geometrisch, daß jeder nichtkritische Orbit die Einheitssphäre $\mathbb{S}_A^{d-1}$ einer geeigneten Hilbertnorm transversal schneidet. Das folgende Lemma besagt anschaulich, daß die Orbits einer Kontraktion “geradegebogen” werden können.

**Lemma 2.14.** *Die Realteile aller Eigenwerte von $A \in \mathcal{L}(V)$ auf einem endlichdimensionalen Vektorraum $V$ seien negativ. Dann ist $e^{tA}$ flußäquivalent zu $e^{-t\mathbb{1}_V}$.*

**Beweis:** Wegen dem obigen Lemma existiert eine Hilbertnorm $\|\cdot\|_A$ auf $V$, so daß für die zugehörige Einheitssphäre $\mathbb{S}_A^{d-1}$ folgende Abbildung ein Homöomorphismus ist:

$$\hat{\Phi} : \mathbb{R} \times \mathbb{S}_A^{d-1} \to V \setminus \{0\}, \quad (t,x) \mapsto e^{tA}x = \Phi(t,x).$$

Wir definieren eine Abbildung $\Psi : V \to V$ durch

$$\Psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } x = 0 \\ e^{-s}y & \text{wenn } x \neq 0 \text{ und } \hat{\Phi}(s,y) = x. \end{cases}$$

Wir zeigen dass $\Psi$ eine topologische Flussäquivalenz von $e^{tA}$ nach $e^{-t\mathbb{1}_V}$ ist. Dazu müssen wir zeigen, dass $\Psi$ stetig und bijektiv ist, dass $\Psi^{-1}$ stetig ist und dass $\Psi(e^{tA}x) = e^{-t}\Psi(x)$ für alle $x \in V$ und $t \in \mathbb{R}$ gilt. Wir zeigen zuerst die letzte Aussage. Sie gilt offenbar für $x = 0$. Sei also $x \neq 0$ und $\hat{\Phi}(s,y) = x$. Dann gilt $\hat{\Phi}(s+t,y) = e^{tA}x$. Also ist $\Psi(e^{tA}x) = e^{-t-s}y = e^{-t}\Psi(x)$. Damit ist die letzte Aussage gezeigt.

Wegen $\Psi(0) = 0$ genügt es die Bijektivität der Einschränkung von $\Psi$ auf $V \setminus \{0\}$ zu zeigen. Diese Einschränkung ist die Verkettung der Umkehrabbildung von $\hat{\Phi}$ mit

$$\mathbb{R} \times \mathbb{S}_A^{d-1} \to V \setminus \{0\}, \quad (s,y) \mapsto e^{-s}y.$$

Diese Abbildung hat wegen $\|e^{-s}y\|_A = e^{-s}\|y\|_A = e^{-s}$ die Umkehrabbildung

$$V \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \times \mathbb{S}_A^{d-1}, \quad x \mapsto (-\ln \|x\|_A, x/\|x\|_A).$$

Also ist die Einschränkung von $\Psi$ auf $V \setminus \{0\}$ ein Homöomorphismus dieser Menge auf sich selber. Also müssen wir nur noch zeigen, dass $\Psi$ und $\Psi^{-1}$ bei 0 stetig sind. Weil alle Normen auf $V$ äquivalent sind, genügt es die Stetigkeit bezüglich $\|\cdot\|_A$ zu zeigen. Für $\|x\|_A < \epsilon < 1$ gilt $s > 0$ weil sonst $1 = \|y\|_A = \|e^{-sA}x\|_A \leq e^{\alpha s}\|x\|_A < \epsilon < 1$ wegen Satz 2.7 (iii) gilt. Dann folgt die Stetigkeit von $\Psi$ bei 0 aus

$$1 = \|y\|_A = \|e^{-sA}x\|_A \leq e^{s\|A\|_A}\epsilon \implies s \geq -\ln(\epsilon)/\|A\|_A \implies \|\Psi(x)\|_A \leq \epsilon^{1/\|A\|_A}.$$

Für $\|e^{-s}y\|_A < \epsilon < 1$ gilt $s = -\ln \|e^{-s}y\|_A > 0$ und mit Satz 2.7 (iii)

$$\|\Psi^{-1}(e^{-s}y)\|_A = \|e^{sA}y\|_A \leq e^{-\alpha s}\|y\|_A = \|e^{-s}y\|_A^{\alpha} < \epsilon^{\alpha}.$$

Das zeigt die Stetigkeit von $\Psi^{-1}$ bei 0. **q.e.d.**

Nach diesen Vorbereitungen können wir den zentralen Klassifikationssatz für hyperbolische Flüsse beweisen. Dabei definieren wir für eine lineare Abbildung $A \in \mathcal{L}(V)$

$$m_-(A) = \sum_{\lambda \in \sigma_s(A)} m(\lambda) \qquad\qquad m_+(A) = \sum_{\lambda \in \sigma_u(A)} m(\lambda).$$

**Satz 2.15.** *Zwei hyperbolische lineare Flüsse $e^{tA}$ und $e^{tB}$ sind genau dann flußäquivalent, wenn $m_\pm(A) = m_\pm(B)$ gilt. Die Dimensionen der stabilen und instabilen Unterräume sind die einzigen Invarianten der Flußäquivalenz solcher Flüsse.*

**Beweis:** $\Leftarrow$: Wegen Satz 2.9 existiert eine direkte Summenzerlegung

$$V = V_s \oplus V_u, \quad e^{tA} = e^{tA_s} \oplus e^{tA_u}$$

mit $\dim(V_s) = m_-(A)$, derart, daß $e^{tA_s}$ eine Kontraktion und $e^{tA_u}$ eine Expansion sind. Aufgrund des Stabilitätskriteriums und dem vorangehenden Lemma existiert eine Flußäquivalenz $\Psi_s$ zwischen $e^{tA_s}$ und $e^{-t\mathbb{1}_{V_s}}$. Analog erhalten wir wegen $e^{tA_u} = e^{-t(-A_u)}$ eine Flußäquivalenz $\Psi_u$ zwischen $e^{tA_u}$ und $e^{t\mathbb{1}_{V_u}}$. Dann ist

$$\Psi_s \oplus \Psi_u : V_s \oplus V_u \to V_s \oplus V_u, \quad x \oplus y \mapsto \Psi_s(x) \oplus \Psi_u(y)$$

eine Flußäquivalenz zwischen $e^{tA} = e^{tA_s} \oplus e^{tA_u}$ und $e^{-t\mathbb{1}_{V_s}} \oplus e^{t\mathbb{1}_{V_u}}$.

Analog existieren eine direkte Summenzerlegung

$$F = F_s \oplus F_u, \quad e^{tB_s} \oplus e^{tB_u}$$

und eine Flußäquivalenz $\tilde{\Psi}_s \oplus \tilde{\Psi}_u$ zwischen $e^{-t\mathbb{1}_{F_s}} \oplus e^{t\mathbb{1}_{F_u}}$. Wegen $\dim V_s = \dim F_s$ und $\dim V_u = \dim F_u$ existieren ein Isomorphismen $T_s : V_s \to F_s$ und $T_u : V_u \to F_u$. Dann ist $T_s \oplus T_u$ eine Flußäquivalenz zwischen den Flüssen $e^{-t\mathbb{1}_{V_s}} \oplus e^{t\mathbb{1}_{V_u}}$ und $e^{-t\mathbb{1}_{F_s}} \oplus e^{t\mathbb{1}_{F_u}}$. Also folgt die Flußäquivalenz von $e^{tA}$ und $e^{tB}$ aus der Transitivität.

$\Rightarrow$: Für eine Flußäquivalenz $\Psi$ zwischen $e^{tA}$ und $e^{tB}$ folgt aus

$$\Psi(e^{tA}x) = e^{tB}\Psi(x) \quad \text{für alle} \quad (t,x) \in \mathbb{R} \times V$$

$\Psi[V_s] \subset F_s$ und $\Psi[V_u] \subset F_u$, weil $\Psi$ die Konvergenz für $t \to \infty$ und $t \to -\infty$ erhält. Aus Symmetriegründen gilt dann auch $\Psi^{-1}[F_s] \subset V_s$ und $\Psi^{-1}[F_u] \subset V_u$. Also bildet $\Psi$ den Vektorraum $V_s$ homöomorph auf den Vektorraum $F_s$ ab. Nun folgt aus dem Gebietsvarianzsatz der Topologie (Theorem IV 9 in Hurewicz, Wallman: Dimension Theory) und Satz 2.9 $m_\pm(A) = m_\pm(B)$. **q.e.d.**

**Bemerkung 2.16.** **(i)** *Die topologische Klassifizierung linearer Flüsse $e^{tA}$ mit $\sigma(A) \subset i\mathbb{R}$, d.h. mit $\sigma(A) = \sigma_n(A)$ ist ein ungelöstes Problem.*

**(ii)** *Man kann zeigen, daß die Menge der $A \in \mathcal{L}(V)$ mit $\sigma_n(A) = \emptyset$ offen und dicht in $\mathcal{L}(V)$ ist, d.h. die Eigenschaft, einen hyperbolischen Fluß zu erzeugen, ist eine generische Eigenschaft, sie kommt fast allen $A \in \mathcal{L}(V)$ zu. Folglich können wir mit dem vorangehenden Satz fast alle linearen Flüsse klassifizieren.*

**Übungsaufgabe 2.17.** **(i)** *Beschreiben Sie die Phasenporträts eines ebenen linearen Flusses in den im Text nicht behandelten Fällen (mindestens ein Eigenwert 0).*

**(ii)** *Beschreiben Sie die Phasenporträts des linearen Flusses $e^{tA}$ mit $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$, d.h. des dreidimensionalen linearen Flusses, unter den verschiedenen möglichen Verteilungen der Eigenwerte von $A$ in .*

**(iii)** *Veranschaulichen Sie sich das Phasenporträt des linearen Flusses $e^{tA}$ mit $A = \mathrm{diag}(\omega_1, -\omega_1, \omega_2, -\omega_2) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$.*

**(iv)** *Beweisen Sie, daß $\{A \in \mathcal{L}(V) | \sigma_n(A) = \emptyset\}$ offen und dicht in $\mathcal{L}(V)$ ist.*

## 2.3 Prinzip der linearisierten Stabilität

Wir studieren zuerst die Stabilität autonomer linearer Differentialgleichungen.

**Satz 2.18.** *Es sei $A \in \mathcal{L}(V)$. Dann ist die Nulllösung der linearen Differentialgleichung $\dot{x} = Ax$ genau dann stabil, wenn $\sigma_u(A) = \emptyset$ und für $\lambda \in \sigma_n(A)$ die Einschränkung von $A$ auf den Eigenraum $V_\lambda = \{x \in V \mid (A - \lambda\mathbb{1}_V)^{m(\lambda)}x = 0\}$ diagonalisierbar ist.*

*Die Nulllösung ist genau dann asymptotisch stabil, wenn $\operatorname{Re}\sigma(A) < 0$ gilt.*

**Beweis:** Es sei $\alpha = \sup\{\|e^{tA}\| \mid t > 0\} < \infty$. Dann folgt für $\epsilon > 0$

$$\|e^{tA}x\| \leq \|e^{tA}\| \cdot \|x\| < \epsilon \quad \text{für alle } (t,x) \in [0,\infty) \times B(0,\tfrac{\epsilon}{\alpha}),$$

d.h. die Stabilität der Nulllösung. Weil alle Normen auf dem endlichdimensionalen Vektorraum $V$ äquivalent sind, ist diese Beschränktheit von $e^{tA}$ für $t > 0$ äquivalent zu der Beschränktheit von $\|e^{tA}x_i\|$ für $t > 0$ und eine Basis $x_1, \ldots, x_m$ von $V$. Wenn diese Norm für einen Basisvektor und $t > 0$ nicht beschränkt ist, dann ist umgekehrt 0 auch nicht stabil. Also ist 0 genau dann stabil, wenn alle Bahnkurven beschränkt sind.

Die Bahnkurven von $x \in V_\lambda$ mit $\lambda \in \sigma_s(A)$ konvergieren für $t \to \infty$ gegen 0, und sind für $x \in V_\lambda \setminus \{0\}$ mit $\lambda \in \sigma_u(A)$ unbeschränkt. Für $x \in V_\lambda \setminus \{0\}$ mit $\lambda \in \sigma_n(A)$ sind sie genau dann beschränkt, wenn sie keine Potenzen von $t$ enthalten, also $x$ echte Eigenvektoren von $A$ sind. Daraus folgt die Charakterisierung der stabilen Flüsse. Die linearen asymptotisch stabilen Flüsse sind offenbar genau die Kontraktionen. **q.e.d.**

Als nächstes betrachten wir gestörte Systeme der Gestalt

$$\dot{x} = Ax + g(t,x),$$

wobei $g$ eine in einem geeigneten Sinne kleine Störung ist. Genauer soll im Folgenden gezeigt werden, daß unter der Voraussetzung, dass es für alle $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt mit

$$\|g(t,x)\| \leq \epsilon\|x\| \qquad \text{für alle} \qquad x \in B(0,\delta)$$

gleichmäßig bzgl. $t$, das gestörte System nahezu dasselbe asymptotische Stabilitätsverhalten wie die ungestörte Linearisierung $\dot{x} = Ax$ besitzt.

Ist $g : \mathbb{R} \times V \to V$ eine stetige und in der zweiten Variablen lokal lipschitzstetig Funktion und $t \mapsto u(t)$ eine Lösung des gestörten Systems, dann ist $u$ für $t_0 \in \mathbb{R}$ auch die eindeutig bestimmte Lösung des inhomogenen Anfaganswertproblems

$$\dot{u}(t) = Au(t) + g(t,u(t)) \qquad\qquad \text{mit } u(t_0) = u_0 = u(t_0).$$

Wegen Korollar 1.56 genügt $u$ auch der nichtlinearen Integralgleichung

$$u(t) = e^{(t-t_0)A}u_0 + \int\limits_{t_0}^{t} e^{(t-s)A}g(s,u(s))ds.$$

Diese Integralgleichung ist die Grundlage für den folgenden – im wesentlichen auf Ljapunov zurückgehenden – Stabilitätssatz (sowie für zahlreiche Existenzbeweise im analogen Fall unendlichdimensionaler Evolutionsgleichungen, z.B. parabolische Systeme).

**Satz 2.19** (Asymptotische Stabilität). *Für $A \in \mathcal{L}(V)$ sei $\operatorname{Re}\sigma(A) < 0$ und $X \subset V$ eine offene Umgebung von 0 sei $g \in C(\mathbb{R} \times X, V)$ in der zweiten Variablen lokal lipschitzstetig, so dass es für alle $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt mit*

$$\|g(t,x)\| \le \epsilon\|x\| \quad \text{für alle } x \in B(0,\delta) \text{ und alle } t \in \mathbb{R}.$$

*Dann ist die Nulllösung von $\dot{u}(t) = Au(t) + g(t,u(t))$ asymptotisch stabil.*

**Beweis:** Es existieren positive Konstanten $\alpha$ und $\beta$ mit $\|e^{tA}\| \le \beta e^{-\alpha t}$ für alle $t \ge 0$, wobei wir $\beta > 1$ annehmen dürfen. Also folgt die Abschätzung

$$\|u(t)\| \le \beta e^{-\alpha(t-t_0)}\|u_0\| + \beta\int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(t-s)}\|g(s,u(s))\|ds.$$

Es sei nun $\epsilon \in (0,\alpha)$ beliebig. Es existiert ein $\delta \in (0,\epsilon)$ mit

$$\|g(t,x)\| \le \frac{\epsilon}{\beta}\|x\| \quad \text{für } \|x\| \le \delta \text{ und } t \in \mathbb{R}.$$

Wenn $u(t)$ für $\|u_0\| < \frac{\delta}{\beta}$ und ein $t \ge t_0$ nicht in $B(0,\delta)$ liegt, dann sei

$$\bar{t} = \inf\{t \in [t_0,\infty) \mid \|u(t)\| \ge \delta\} \subset (t_0,\infty).$$

Dann folgt für $t_0 \le t \le \bar{t}$

$$\|u(t)\| \le \delta e^{-\alpha(t-t_0)} + \epsilon\int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(t-s)}\|u(s)\|ds \iff e^{\alpha(t-t_0)}\|u(t)\| \le \delta + \epsilon\int_{t_0}^{t} e^{\alpha(s-t_0)}\|u(s)\|ds.$$

Mithilfe von Lemma 1.59 erhalten wir die Abschätzung

$$e^{\alpha(t-t_0)}\|u(t)\| \le \delta + \epsilon\delta\int_{t_0}^{t} e^{\epsilon(t-s)}ds = \delta e^{\epsilon(t-t_0)} \qquad \text{für} \qquad t_0 \le t \le \bar{t}.$$

Daraus folgt $\delta = \|u(\bar{t})\| \le \delta e^{-(\alpha-\epsilon)(\bar{t}-t_0)} < \delta$, was unmöglich ist. Also gilt $u(t) \in B(0,\delta)$ für alle $u_0 \in B(0,\frac{\delta}{\beta})$ und $t \ge t_0$ und dann auch $\|u(t)\| \le \delta e^{-(\alpha-\epsilon)(t-t_0)}$. Weil das für alle $\delta > 0$ gilt ist die Nulllösung asymptotisch stabil. **q.e.d.**

Zum Beweis des entsprechenden Instabilitätssatzes benötigen wir das folgende

**Lemma 2.20.** *Für $A \in \mathcal{L}(V)$ gelte $\alpha < \operatorname{Re}\sigma(A) < \beta$. Dann existiert eine Hilbertnorm $\|\cdot\|$ auf $V$, so daß für das zugehörige bilineare innere Produkt $\langle\cdot,\cdot\rangle$*

$$\alpha\|x\|^2 < \operatorname{Re}\langle Ax, x\rangle < \beta\|x\|^2 \quad \text{für alle } x \in V \text{ gilt.}$$

**Beweis:** Wir betrachten zuerst den Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Wie in dem Beweis von Lemma 2.5 gezeigt, hat $A$ die Form $A = D + N$ mit $D = \operatorname{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_m)$, wobei $\mu_1, \ldots, \mu_m$ die mit Vielfachheit gezählten Eigenwerte von $A$ sind. Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es außerdem eine Hilbertnorm $\|\cdot\|$ auf $V$ mit $\|N\| \le \epsilon$. Wir wählen $\epsilon > 0$ und $\|\cdot\|$ mit

$$\epsilon < \min\{\beta - \max(\operatorname{Re}\sigma(A)), \min(\operatorname{Re}\sigma(A)) - \alpha\}.$$

Wegen $\langle Dx, x\rangle = \sum \mu_j |x_j|^2$, wobei $x_1, \ldots, x_m$ die Koordinaten von $x$ bzgl. der (zur Konstruktion der Norm) verwendeten Orthonormalbasis sind, gilt

$$\min[\operatorname{Re}\sigma(A)]\|x\|^2 \le \operatorname{Re}\langle Dx, x\rangle \le \max[\operatorname{Re}\sigma(A)]\|x\|^2.$$

Da ferner $\operatorname{Re}\langle Ax, x\rangle = \operatorname{Re}\langle Dx, x\rangle + \operatorname{Re}\langle Nx, x\rangle$ und $|\operatorname{Re}\langle Nx, x\rangle| \le \|N\| \cdot \|x\|^2 \le \epsilon\|x\|^2$ ist, folgt die Behauptung aus der Wahl von $\epsilon$ und aus

$$\operatorname{Re}\langle Dx, x\rangle - \epsilon\|x\|^2 \le \operatorname{Re}\langle Ax, x\rangle \le \operatorname{Re}\langle Dx, x\rangle + \epsilon\|x\|^2.$$

Es sei nun $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Dann können wir das eben Bewiesene auf die Komplexifizierung $A_\mathbb{C}$ in $V_\mathbb{C}$ anwenden. Die Hilbertnorm $\|\cdot\|_\mathbb{C}$ auf $V_\mathbb{C}$ induziert (durch Restriktion auf $V \subset V_\mathbb{C}$) eine Hilbertnorm $\|\cdot\|$ auf $V$ (vgl. den Beweis von Lemma 2.5). Für die zugehörigen Skalarprodukte erhalten wir

$$\operatorname{Re}\langle \xi, \eta\rangle_\mathbb{C} = \frac{\|\xi+\eta\|_\mathbb{C}^2 - \|\xi-\eta\|_\mathbb{C}^2}{4} \quad \text{für alle } \xi, \eta \in V_\mathbb{C} \quad \text{bzw.}$$

$$\langle x, y\rangle = \frac{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2}{4} \quad \text{für alle } x, y \in V. \quad \text{Hieraus folgt}$$

$$\alpha\|x\|^2 = \alpha\|x\|_\mathbb{C}^2 \le \operatorname{Re}\langle A_\mathbb{C}x, x\rangle_\mathbb{C} = \langle Ax, x\rangle \le \beta\|x\|_\mathbb{C}^2 = \beta\|x\|^2 \quad \text{für alle } x \in V.$$ **q.e.d.**

**Satz 2.21** (Instabilität)**.** *Für $A \in \mathcal{L}(V)$ sei $\sigma_u(A) \neq \emptyset$ und für eine offene Umgebung $X \subset V$ von $0$ sei $g \in C(\mathbb{R} \times X, V)$ in der zweiten Variablen lokal lipschitzstetig, so dass es und für alle $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt mit*

$$\|g(t, x)\| \le \epsilon\|x\| \quad \text{für alle } x \in B(0, \delta) \text{ und alle } t \in \mathbb{R}.$$

*Dann ist die Nulllösung der gestörten Gleichung $\dot{u}(t) = Au(t) + g(t, u(t))$ instabil.*

**Beweis:** Nach Voraussetzung ist $\sigma_u(A)$ nicht leer. Sei also $\alpha \in (0, \operatorname{Re}\sigma_u(A))$. Wegen $\sigma(A - \alpha\mathbb{1}_V) = \sigma(A) - \alpha$ ist das neutrale Spektrum $\sigma_n(A_\alpha)$ von $A_\alpha = A - \alpha\mathbb{1}_V$ leer und $A_\alpha$ erzeugt einen hyperbolischen linearen Fluß $e^{tA_\alpha}$. Wegen Satz 2.9 gibt es eine direkte Summenzerlegung $V = V_- \oplus V_+$, welche $A_\alpha$ in $A_\alpha = (A_\alpha)_- \otimes (A_\alpha)_+$ zerlegt, so daß $\sigma_s(A_\alpha) = \sigma((A_\alpha)_-)$ und $\sigma_u(A_\alpha) = \sigma((A_\alpha)_+)$ gelten. Der Operator $A$ wird zerlegt in $A = A_- \oplus A_+$ mit $\sigma(A_+) = \sigma_u(A)$ und $\sigma(A_-) = \sigma_s(A) \cup \sigma_n(A)$. Es gilt also

$\operatorname{Re}\sigma(A_-) \leq 0$ und $\operatorname{Re}\sigma(A_+) > \alpha > 0$ für das obige $\alpha > 0$. Wir wählen $\beta \in (0, \alpha)$ fest. Dann existieren nach Lemma 2.5 Hilbertnormen $\|\cdot\|_+$ auf $V_+$ und $\|\cdot\|_-$ auf $V_-$ so daß

$$\operatorname{Re}\langle A_- x_-, x_-\rangle_- \leq \beta \|x_-\|_-^2 \quad \text{für } x_- \in V_-, \quad \operatorname{Re}\langle A_+ x_+, x_+\rangle_+ \geq \alpha \|x_+\|_+^2 \quad \text{für } x_+ \in V_+$$

gilt. Offensichtlich wird durch

$$\langle x_- + x_+, y_- + y_+\rangle = \langle x_-, y_-\rangle_- + \langle x_+, y_+\rangle_+$$

ein inneres Produkt auf $V = V_- \oplus V_+$ definiert und somit eine Norm $\|\cdot\|$ mit

$$\|x\|^2 = \|x_- + x_+\|^2 = \|x_-\|_-^2 + \|x_+\|_+^2 \quad \text{für alle } x = x_- + x_+ \in V.$$

Mit den Projektionen $Q : V \to V_-$ und $P : V \to V_+$ setzten wir schließlich

$$\Psi(x) = \frac{\|x_+\|^2 - \|x_-\|^2}{2} = \frac{\|Px\|^2 - \|Qx\|^2}{2} \quad \text{für alle } x \in V,$$

Für $\gamma = \frac{\alpha - \beta}{4}$ existiert ein $\delta > 0$ mit

$$\|g(t, x)\| \leq \gamma \|x\| \quad \text{für alle} \quad x \in B(0, \delta) \quad \text{und alle} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Sei nun $t_0 \in \mathbb{R}$ und $u$ eine Lösung mit $u(t_0) \in B(0, \delta) \subset X$ und $\Psi(u(t_0)) > 0$. Dann erfüllt $\varphi(t) = \Psi(u(t))$ auf $t \in \{t \geq t_0 \mid \|u(t)\| < \delta\} \cap \{t \geq t_0 \mid \varphi(t) > 0\}$

$$\begin{aligned}
\dot\varphi(t) &= \tfrac{1}{2}\left(\langle u_+(t), \dot u_+(t)\rangle + \langle \dot u_+(t), u_+(t)\rangle - \langle u_-(t), \dot u_-(t)\rangle - \langle \dot u_-(t), u_-(t)\rangle\right) \\
&= \operatorname{Re}\langle u_+(t), \dot u_+(t)\rangle - \operatorname{Re}\langle u_-(t), \dot u_-(t)\rangle \\
&= \operatorname{Re}\langle u_+(t), A_+ u_+(t) + g(t, u(t))_+\rangle - \operatorname{Re}\langle u_-(t), A_- u_-(t) + g(t, u(t))_-\rangle \\
&= \operatorname{Re}\langle u_+(t), A_+ u_+(t)\rangle - \operatorname{Re}\langle u_-(t), A_- u_-(t)\rangle + \operatorname{Re}\langle u_+(t) - u_-(t), g(t, u(t))\rangle \\
&\geq \alpha \|u_+(t)\|^2 - \beta \|u_-(t)\|^2 - (\|u_+(t)\| + \|u_-(t)\|)\|g(t, u(t))\| \\
&\geq \alpha \|u_+(t)\|^2 - \beta \|u_-(t)\|^2 - 2\|u_+(t)\|\gamma\|u(t)\| \\
&\geq (\alpha - 4\gamma)\|u_+(t)\|^2 - \beta\|u_-(t)\|^2 = 2\beta\varphi(t).
\end{aligned}$$

Dabei haben wir die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung, $\|u(t)\| \leq \|u_+(t)\| + \|u_-(t)\|$ und $\|g(t, u(t))\| \leq \gamma \|u(t)\|$ für $t \in \{t \geq t_0 \mid \|u(t)\| < \delta\}$ und zuletzt $\|u_-(t)\| \leq \|u_+(t)\|$ und $\|u(t)\| \leq 2\|u_+(t)\|$für $t \in \{t \geq t_0 \mid \varphi(t) > 0\}$ benutzt. Durch Integration folgt

$$\varphi(t) \geq \varphi(t_0) e^{2\beta(t - t_0)} \quad \text{für} \quad t \in \{t \geq t_0 \mid \|u(s)\| < \delta \text{ und } \varphi(s) > 0 \text{ für } s \in [t_0, t]\}.$$

Dann folgt zuerst, dass $\varphi(t) > 0$ für jede Lösung mit $u(t_0) \in B(0, \delta) \cap \Psi^{-1}[(0, \infty)]$ auf $\{t \geq t_0 \mid \|u(s)\| < \delta$ für alle $s \in [t_0, t]\}$ gilt. Danach sehen wir, dass wegen

$$\tfrac{1}{2}\|u(t)\|^2 \geq \tfrac{1}{2}\|u_+(t)\|^2 \geq \varphi(t) \geq \varphi(t_0) e^{2\beta(t - t_0)}.$$

jede solche Lösung den Ball $B(0,\delta)$ verläßt, und die Nulllösung instabil ist. **q.e.d.**

Als Korollar der beiden vorangehenden Sätze erhalten wir das folgende Prinzip der linearisierten Stabilität für kritische Punkte autonomer Differentialgleichungen. Dieses fundamentale Prinzip ist eines der bekanntesten Stabilitäts- bzw. Instabilitätskriterien, das besonders in den angewandten Naturwissenschaften unzählige Anwendungen hat.

**Korollar 2.22.** *In einer offenen Teilmenge $X \subset V$ sei $x_0$ eine Nullstelle von $F \in C^1(X,V)$. Falls $\sigma(F'(x_0)) = \sigma_s(F'(x_0))$, so ist die Ruhelage $x_0$ des entsprechenden lokalen Flusses $\Phi_F$ asymptotisch stabil. Ist $\sigma_u(F'(x_0))$ nicht leer, so ist $x_0$ instabil.*

**Beweis:** Mit $A = F'(x_0) \in \mathcal{L}(V)$ und $g(y) = F(y+x_0) - F'(x_0)y$ gibt es für alle $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass $\|g(y)\| \leq \epsilon\|y\|$ für $y \in B(0,\delta)$ gilt und $\dot{y} = F(y+x_0) = Ay + g(y)$. Also folgt die Behauptung unmittelbar aus den beiden vorangehenden Sätzen. **q.e.d.**

**Bemerkung 2.23.** **(i)** *Der Satz macht keine Aussagen über das Stabilitätsverhalten im Fall $\sigma_n(f'(x_0)) \neq \emptyset$ und $\sigma_u(f'(x_0) = \emptyset$. In diesem Fall hängt das Stabiltätsverhalten von den Termen höherer Ordnung ab. Um dies zu sehen, betrachten wir das System*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + x^3 \\ \dot{y} &= x + y^3 \end{aligned}$$

*mit $(0,0)$ als einzigen kritischen Punkt, der ein Zentrum für die Linearisierung ist. Für $r^2 = x^2 + y^2$ folgt $r\dot{r} = x\dot{x} + y\dot{y} = -xy + x^4 + xy + y^4 = x^4 + y^4$, also*

$$\dot{r} = \frac{x^4 + y^4}{r} \geq \frac{x^4 + 2x^2y^2 + y^4}{2r} = \frac{r^3}{2} \text{ für } r > 0.$$

*Folglich ist $\frac{d}{dt}\frac{1}{r^2} < -1$ und die Orbits laufen von $(0,0)$ weg, d.h. $(0,0)$ ist instabil.*

*Das System*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y - x^3 \\ \dot{y} &= x - y^3 \end{aligned}$$

*hat dieselbe Linearisierung im kritischen Punkt $(0,0)$. Nun folgt $\dot{r} = -\frac{x^4+y^4}{r} \leq -\frac{r^3}{2} < 0$ und $\frac{d}{dt}\frac{1}{r^2} > 1$ für $r > 0$. Folglich "laufen die Orbits nach $(0,0)$ hinein", d.h. $(0,0)$ ist sogar asymptotsich stabil. Es ist leicht zu sehen, daß das Phasenporträt bei allgemeineren Störungen höherer Ordnung wesentlich komplizierter aussehen kann.*

**(ii)** *Das zentrale Stabilitätsresultat in dem Satz ist eine lokale Aussage. Es enthält keine Angaben über den Einzugsbereich eines asymptotisch stabilen kritischen Punktes. Einige Aussagen in dieser Richtung werden wir in den folgenden Abschnitten kennenlernen.*

**(iii)** *Der Beweis gilt auch für lokal lipschitzstetiges in $x_0$ differenzierbares $f \in C(X,V)$.*

**(iv)** *Unter geeigneten Voraussetzungen an den Evolutionsoperator $A$ der nichtautonomen linearen Gleichung $\dot{x} = A(t)x$ lassen sich verwandte Resultate auch für gestörte nichtautonome Gleichungen*

$$\dot{x} = A(t) + g(t,x)$$

*beweisen. Da solche Voraussetzungen in praktischen Fällen jedoch kaum zu verifizieren sind, werden wir uns im Folgenden in erster Linie mit dem besonders wichtigen Fall autonomer Gleichungen befassen.*
**(v)** *Um die obigen Stabilitätssätze praktisch anwenden zu können, benötigt man Kriterien, welche es erlauben festzustellen, ob $\operatorname{Re}\sigma(A) < 0$ gilt. Da die Eigenwerte die Nullstellen des charakteristischen Polynoms*

$$det(\lambda - A) = \lambda^m + a_1\lambda^{m-1} + a_2\lambda^{m-2} + \ldots + a_{m-1}\lambda + a_m$$

*sind ($dim(V) = m$)), möchte man möglichst aus den Koeffizienten eines Polynoms ablesen, ob alle Wurzeln in der negativen Halbebene liegen. Es gibt eine Reihe von Kriterien dieser Art. Das bekannteste ist das folgende Routh-Hurwitz-Kriterium:*

**Satz 2.24** (Routh-Hurwitz Kriterium)**.** *Sämtliche Nullstellen eines reellen Polynoms $p(z) = z^m + a_1 z^{m-1} + \ldots + a_{m-1}z + a_m$ vom Grand $m$ besitzen genau dann negativen Realteil, wenn die Matrizen $H_1, \ldots, H_m$ positive Determinante haben. Dabei ist*

$$H_k = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \ldots & \ldots & a_{2k-1} \\ 1 & a_2 & a_4 & \ldots & \ldots & a_{2k-2} \\ 0 & a_1 & a_3 & \ldots & \ldots & a_{2k-3} \\ & 1 & a_2 & a_4 & \ldots & a_{2k-4} \\ & & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & & & & \vdots & \end{pmatrix} \quad mit \quad a_j = 0 \text{ für } j > m.$$

*Siehe Abschnitt 16.6 in "Matrizentheorie" von F.R. Gantmacher.*

## 2.4 Die direkte Methode von Ljapunov

In diesem Abschnitt führen wir eine Methode ein um die lokale und globale asymptotische Stabilität zu zeigen. Diese Methode benutzt sogenannte Ljapunovfunktionen.

**Definition 2.25** (Ljapunovfunktionen)**.** *Sei $\Phi : W \to X$ ein lokaler Fluss auf einem metrischen Raum $X$. Dann heit $L : X \to \mathbb{R}$ Ljapunovfunktion, wenn $L(\Phi(t,x)) \leq L(x)$ für alle $(t,x) \in W$ mit $t > 0$ gilt. Wenn sogar $L(\Phi(t,x)) < L(x)$ für alle $(t,x) \in W$ mit $t > 0$ und $\Phi(t,x) \neq x$ gilt, dann heißt $L$ strikte Ljapunovfunktion.*

Wegen der Bedingung (ii) eines lokalen Flusses ist $L$ genau dann eine Ljapunovfunktion, wenn $t \mapsto L(\Phi(t,x))$ für alle $x \in X$ monoton fallend ist. Für ein lokal lipschitzstetiges Vektorfeld $F : X \to V$ auf einer offene Teilmenge $X$ eines Banachraumes $V$ heißt $L$ dann Ljapunovfunktion, wenn es eine Ljapunovfunktion für den ensprechenden lokalen Fluss $\Phi_F$ ist. Weil jede Integralkurve $t \mapsto \Phi_F(t,x)$ von $F$ stetig differenzierbar ist, ist $t \mapsto L(\Phi_F(t,x))$ differenzierbar, wenn $L$ differenzierbar ist. Deshalb ist eine differenzierbare Funktion $L$ genau dann eine Ljapunovfunktion zu $F$, wenn

$$\nabla L(x) \cdot F(x) \leq 0 \qquad \text{für alle } x \in X$$

gilt. Wenn für nicht konstante Integralkurven keine Gleichheit gilt, dann ist $L$ solgar eine strikte Ljapunovfunktion. Allerdings ist das nur eine hinreichende und keine notwendige Bedingung für eine differenzierbare Funktion $L : X \to \mathbb{R}$, damit $L$ eine strikte Ljapunovfunktion ist. Wir können Ljapunovfunktionen auch durch die positive Invarianz aller Mengen $L^{-1}[(-\infty, y)]$ mit $y \in \mathbb{R}$ charakterisieren:

**Definition 2.26.** *Für einen lokalen Fluss $\Phi : W \to X$ auf dem metrischen Raum $X$ heißt eine Teilmenge $A \subset X$ positiv bzw. negativ invariant, wenn $\Phi(t,x) \in A$ für alle $(t,x) \in W \cap ((0,\infty) \times A)$ bzw. $W \cap ((-\infty,0) \times A)$ gilt. Sie heißt invariant, wenn sie positiv und negativ invariant ist, also $\Phi(t,x) \in A$ für alle $(t,x) \in W \cap (\mathbb{R} \times A)$ gilt.*

Im Folgenden werden wir Grenzwerte von Folgen $(\Phi(t_n,x))_{n\in\mathbb{N}}$ mit $t_n \to \pm\infty$ betrachten. Die Menge solcher Grenzwerte wird als Limesmenge bezeichnet:

**Definition 2.27** (Limesmengen)**.** *Für einen lokalen Fluss $\Phi : W \to X$ und $x \in X$ heißen die Mengen $\omega^{\pm}(x)$ aller Grenzwerte von Folgen $(\Phi(t_n,x))_{n\in\mathbb{N}}$ mit $t_n \to \pm\infty$ und $\{(t_n,x) \mid n \in \mathbb{N}\} \subset W$ Limesmengen von $x$*

Offenbar sind $\omega^{\pm}(x)$ leer, wenn $W$ nicht $(0,\infty) \times \{x\}$ bzw. $(-\infty,0) \times \{x\}$ enthält.

**Lemma 2.28.** *Die Limesmengen $\omega^{\pm}(x)$ eines stetigen lokalen Flusses sind abgeschlossene invariante Mengen.*

**Beweis:** Sei $y$ im Abschluss von $\omega^{\pm}(x)$. Dann gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $y_n \in \omega^{\pm}(x)$ mit $d_X(y_n,y) < \frac{1}{n}$ und ein $t_n > n$ bzw. $t_n < -n$ mit $d_X(\Phi(t_n,x),y_n) < \frac{1}{n}$. Dann konvergiert $(\Phi(t_n,x))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $y \in \omega^{\pm}(x)$. Also ist $\omega^{\pm}(x)$ abgeschlossen.

Wegen der Stetigkeit von $\Phi$ konvergiert $\Phi(t+t_n,x) = \Phi(t,\Phi(t_n,x))$ gegen $\Phi(t,y)$, wenn $(\Phi(t_n,x))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $y$ konvergiert. Deshalb ist $\omega^{\pm}(x)$ invariant. **q.e.d.**

**Lemma 2.29.** *Wenn $\{\Phi(t,x) \mid (t,x) \in W, t \geq 0\}$ bzw. $\{\Phi(t,x) \mid (t,x) \in W, t \leq 0\}$ in einer kompakten Menge $K$ enthalten ist, dann ist $\omega^+(x)$ bzw. $\omega^-(x)$ nichtleer, kompakt und zusammenhängend. Der Grenzwert $\lim_{t\to\pm\infty} \inf_{y\in\omega^{\pm}(x)} d_X(\Phi(t,x),y)$ ist dann Null.*

**Beweis:** Unter den Bedingungen des Lemmas enthält $W$ genau wie im Beweis von Satz 1.38 zunächst $(-\epsilon, \epsilon) \times K$ und dann $[0, \infty) \times \{x\}$ bzw. $(-\infty, 0] \times \{x\}$. Für jede Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $t \to \pm\infty$ besitzt die Folge $(\Phi(t_n, x))_{n\in\mathbb{N}}$ dann eine konvergente Teilfolge. Also ist $\omega^\pm(x)$ nicht leer. Als abgschlossene Teilmenge von $K$ ist $\omega^\pm(x)$ auch kompakt.

Wenn $\omega^\pm(x)$ nicht zusammenhängend ist, dann zerfällt es in eine disjunkte Vereinigung von zwei abgschlossenen Mengen $\omega^\pm(x) = A \cup B$. Der Abstand $d_X(a, b)$ hat auf der kompakten Menge $(a, b) \in A \times B$ einen Minimalabstand $\delta > 0$. Seien

$$O = \bigcup_{a\in A} B(a, \tfrac{\delta}{2}), \qquad\qquad U = \bigcup_{b\in B} B(b, \tfrac{\delta}{2}).$$

disjunkte offenen Umgebungen von $A$ und $B$. Wir wählen eine streng monotone Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ positiver bzw. negativer Zeitpunkte mit $t_n \to \pm\infty$, so das $\Phi(t_n, x)$ abwechselnd in $O$ und in $U$ liegt. Sei $s_n$ das Supremum oder Infimum von $\{t \in [t_n, t_{n+1}] \mid \Phi(t) \in O\}$, jenachdem $\Phi(t_n, x)$ oder $\Phi(t_{n+1}, x)$ in $O$ liegt. Dann liegt $\Phi(s_n, x)$ nicht in $O$, weil sonst $\Phi(t, x)$ für $t \in (s_n - \epsilon, s_n + \epsilon)$ und ein $\epsilon > 0$ in $O$ liegt, und nicht in $U$, weil sonst $\Phi(t, x)$ für $t \in (s_n - \epsilon, s_n + \epsilon)$ für ein $\epsilon > 0$ in $U$ und damit nicht in $O$ liegt. Die Folge $(\Phi(s_n, x))_{n\in\mathbb{N}}$ in $K$ hat dann eine konvergente Teilfolge, dessen Grenzwert in $K \setminus (O \cup U)$ liegt, im Widerspruch zu der Annahme, dass $\omega^\pm(x)$ nicht zusammenhängend ist.

Wenn $\inf_{y\in\omega^\pm(x)} d_X(\Phi(t_n, x), y)$ für eine Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $t_n \to \pm\infty$ durch eine positive Zahl nach unten beschränkt ist, dann kovergiert eine Teilfolge von $(\Phi(t_n, x))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen ein $y \in \omega^\pm(x)$. Das widerspricht der Annahme, dass $\inf_{y\in\omega^\pm(x)} d_X(\Phi(t_n, x), y)$ durch eine positive Zahl nach unten beschränkt ist. Also sind alle Häufungspunkte von $\inf_{y\in\omega^\pm(x)} d_X(\Phi(t_n, x), y)$ Null, und alle solchen Folgen konvergieren gegen Null. **q.e.d.**

**Satz 2.30.** *Sei $\Phi : W \to X$ ein stetiger lokaler Fluss und $L : X \to \mathbb{R}$ eine stetige Ljapunovfunktion. Dann ist $L$ auf $\omega^+(x)$ konstant.*

**Beweis:** Seien $y, z \in \omega^+(x)$. Dann gibt es zwei streng monoton wachsende Folgen $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $t_n \to \infty$, $s_n \to \infty$ und $t_n < s_n < t_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so dass $(\Phi(t_n, x))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $y$ und $(\Phi(s_n, x))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $z$ konvergiert. Weil $L$ stetig ist, konvergieren die Folgen $(L(\Phi(t_n, x)))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $L(y)$ und $(L(\Phi(s_n, x)))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $L(z)$. Aus der Monotonie von $t \mapsto L(\Phi(t, x))$, folgt $L(y) \geq L(z) \geq L(y)$. **q.e.d.**

In bestimmten Fällen kann man mit Ljapunovfunktionen die Stabilität oder asymptotische Stabilität eines Fixpunktes eines lokalen Flusses zeigen. Im Folgenden sei $\Phi : W \to X$ ein lokaler stetiger Fluss auf einer offenen Teilmenge $X$ eines endlichdimensionalen Banachraumes $V$ und $x_0 \in X$ ein Fixpunkt von $\Phi$.

**Satz 2.31.** *Sei $x_0 \in X$ ein Fixpunkt eines stetigen lokalen Flusses $\Phi : W \to X$ auf einer offenen Teilmenge $X$ eines endlichdimensionalen Banachraumes und $L : X \to \mathbb{R}$ eine stetige Ljapunovfunktion. Dann gilt*

**(i)** *Wenn $L(x) > L(x_0)$ für $x \in X \setminus \{x_0\}$ gilt, dann ist $x_0$ stabil.*

**(ii)** *Ist zusätzlich zu (i) $L$ eine strikte Ljapunovfunktion und $x_0$ die einizige Ruhelage von $\Phi$, so ist $x_0$ asymptotisch stabil.*

**(iii)** *Sind zusätzlich zu (i)-(ii) die Mengen $L^{-1}[(-\infty, y]]$ für alle $y \geq L(x_0)$ kompakt, dann ist $x_0$ global asymptotisch stabil, d.h. $\lim_{t\to\infty} \Phi(t,x) = x_0$ für alle $x \in X$.*

**Beweis (i):** Sei $\epsilon > 0$ so klein, dass der abgschlossene Ball $\overline{B(x_0, \epsilon)}$ von $V$ in $X$ enthalten ist. Dann besitzt $L$ einen minimalen Wert $y > L(x_0)$ auf der kompakten Menge $\{x \in X \mid \|x - x_0\| = \epsilon\}$. Wegen der Stetigkeit von $L$ enthält die Menge $\{x \in \overline{B(x_0, \epsilon)} \mid L(x) < y\}$ einen Ball $B(x_0, \delta)$. Für alle $x \in B(x_0, \delta)$ gilt dann $L(x) < y$ und deshalb auch $L(\Phi(t,x)) < y$ für alle $t \geq 0$ mit $(t,x) \in W$. Insbesondere wird $\|\Phi(t,x) - x_0\|$ für solche $t$ nie gleich $\epsilon$ und $\Phi(t,x)$ bleibt in $B(x_0, \epsilon)$. Das zeigt (i).
**(ii):** Wegen Lemma 2.3 und wegen (i) gibt es ein $\delta > 0$, so dass $[0,\infty) \times B(x_0, \delta)$ in $W$ enthalten ist. Für hinreichend kleine $\delta$ sind $\Phi(t,x)$ wegen dem vorangehenden Beweis für alle $(t,x) \in [0,\infty) \times B(x_0, \delta)$ in einem kompakten Ball $\overline{B(x_0, \epsilon)}$ enthalten. Wegen Lemma 2.29 ist $\omega^+(x)$ dann für alle $x \in B(x_0, \delta)$ nicht leer und positiv invariant. Wegen Satz 2.30 ist $\omega^+(x) = \{x_0\}$. Insbesondere ist für $x \in B(x_0, \delta)$ und jede Folge positiver Zahlen $t_n$ mit $t_n \to \infty$ die Folge $\Phi(t_n, x)$ beschränkt und besitzt nur den Häufungspunkt $x_0$. Also konvergieren alle diese Folgen gegen $x_0$ und $x_0$ ist attraktiv.
**(iii):** Für alle $x \in X$ sind $\Phi(t,x)$ in der kompakten Menge $L^{-1}[(-\infty, L(x)]]$ enthalten. Dann zeigen die Argumente vom Beweis von (ii) dass wieder mit Lemma 2.29 und Satz 2.30 $\omega^+(x) = \{x_0\}$ und $\lim_{t\to\infty} \Phi(t,x) = x_0$ gilt. **q.e.d.**

Die Bedingung in (ii) kann man für den lokalen Fluss eines lokal lipschitzstetigen Vektorfeldes $F : X \to V$ und eine differenzierbare Ljapunovfuncktion $L : X \to \mathbb{R}$ z.B. dadurch garantieren, dass $\nabla L(x) \cdot F(x) < 0$ auf $X \setminus \{x_0\}$ gilt. Dann hat insbesondere $F$ nur eine Nullstelle bei $x_0$.

## 2.5 Linearisierungen

In diesem Abschnitt sind $(V, \|\cdot\|)$ ein endlichdimensionaler Banachraum, $X \subset V$ eine offene Teilmenge und $f \in C^1(X, V)$. Wir wollen den von $f$ erzeugten lokalen Fluß $\Phi$ in der Nähe eines kritischen Punktes $x_0$ in Situationen studieren, in denen das Prinzip der linearisierten Stabilität Korollar 2.22 nur aussagt, dass der kritische Punkt nicht asymptotische stabil ist. Wir werden sehen, dass für jeden kritischen Punkt $x_0$, an dem die Linearisierung $f'(x_0)$ einen hyperbolischen Fluss erzeugt, diese Linearisierung das Langzeitverhalten des Flusses in einer Umgebung von $x_0$ beschreibt: d.h. in der Nähe von $x_0$, der Fluß $\Phi$ flußäquivalent zum linearen Fluß $e^{tf'(x_0)}$ ist, und die Sattelpunktstruktur qualitativ erhalten bleibt. Im folgenden Abschnitt werden wir dann präzise Aussagen über die "stabilen und instabilen Mannigfaltigkeiten" $W_s$ und $W_u$ herleiten.

Sind $X$ und $Y$ metrische Räume und $\Phi : W \to X$ sowie $\tilde{\Phi} : \tilde{W} \to Y$ Flüsse auf $X$ bzw. $Y$, so sagen wir, $\Phi$ ist in $x_0 \in X$ zu $\tilde{\Phi}$ in $y_0 \in Y$ (lokal) $C^k$-flußäquivalent, oder kurz: $\Phi|x_0$ ist zu $\tilde{\Phi}|y_0$ $C^k$-flußäquivalent, $0 \leq k \leq \infty$, wenn es Umgebungen $U$ von $x_0$ und $V$ von $y_0$ gibt, derart, daß der von $\Phi$ auf $U$ (durch Restriktion) induzierte lokale Fluß zu dem von $\tilde{\Phi}$ auf $V$ induzierten lokalen Fluß $C^k$-flußäquivalent ist.

Im Folgenden sei $\Phi_f : W \to X$ stets der von $f$ auf $X$ erzeugte lokale Fluß. Wir wollen den Fluß in der Nähe eines hyperbolischen kritischen Punktes $x_0$ studieren. Hierbei heißt der kritische Punkt $x_0$ des von $f$ erzeugten Flusses hyperbolisch, wenn $\sigma_n(f'(x_0)) = \emptyset$ ist, d.h. wenn der lineare Fluß $e^{tf'(x_0)}$ hyperbolisch ist.

Es besteht ein enger Zusammenhang zwischen Flüssen und Homöomorphismen. Nach Lemma 1.33 ist nämlich $\Phi(t, \cdot)$ für jedes $t \in \mathbb{R}$ ein lokaler Homöomorphismus. Insbesondere ist für den linearen Fluß $e^{tA}$ für jedes $t \in \mathbb{R}$ ein Automorphismus von $V$. Aus diesen Gründen ist es sinnvoll (und für Anwendungen auf andere Probleme nützlich), zuerst den Fall von Homöomorphismen zu betrachten. Zur Vorbereitung der Einführung von hyperbolischen Diffeomorphimsen beweisen wir zuerst den folgenden Spezialfall des Spektralabbildungssatzes:

**Lemma 2.32.** *Für $A \in \mathcal{L}(V)$ gilt $\sigma(e^A) = e^{\sigma(A)} = \{e^\lambda | \lambda \in \sigma(A)\}$.*

**Beweis:** Wegen $\sigma(A) = \sigma(A_\mathbb{C})$ können wir - durch Übergang zur Komplexifizierung - annehmen, daß $V$ ein komplexer Banachraum ist. Sind dann $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ die paareweise verschiedenen Eigenwerte von $A$, so besitzt $V$ die direkte Summenzerlegung $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_k$, die sowohl $A$ als auch $e^A$ reduziert. Es genügt also, $\sigma(e^{A_j}) = e^{\sigma(A_j)}$ mit $A_j = A|_{V_j}$ für $j = 1, \ldots, k$ zu beweisen. Wir können somit annehmen, daß $\sigma(A) = \{\lambda\}$ und $A = \lambda \mathbb{1}_V + N$ mit einem nilpotenten Operator $N \in \mathcal{L}(V)$ gilt. Es gibt folglich ein $x \in V \setminus \{0\}$ mit $Ax = \lambda x$, d.h. $Nx = 0$. Hieraus folgt

$$e^A x = e^\lambda e^N x = e^\lambda x,$$

d.h. $\sigma(e^A) \supset e^{\sigma(A)}$. Gilt umgekehrt $e^A y = \mu y$ für ein $\mu \in \mathbb{C}$ und $y \in V \setminus \{0\}$, so folgt

$$\mu y = e^\lambda e^N y = e^\lambda \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} N^k y.$$

Dann gibt es einen kleinsten Index $l$ mit $0 \leq l \leq m$ und $N^{l+1} y = 0$. Durch Anwenden von $N^l$ auf obige Gleichung erhalten wir

$$\mu N^l y = e^\lambda N^l y,$$

also $\mu = e^\lambda$ wegen $N^l y \neq 0$, was $\sigma(e^a) \subset e^{\sigma(A)}$ impliziert. **q.e.d.**

Es sei nun $A \in \mathcal{L}(V)$, und $A$ erzeuge einen hyperbolischen linearen Fluß $e^{tA}$, d.h. $\sigma_n(A) = \sigma(A) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$. Dann folgt aus dem vorangehenden Lemma, daß $\sigma(e^A) \cap \mathbb{S}^1 = \emptyset$ gilt, wobei $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ die Einheitskreislinie der komplexen Ebene ist. Mit anderen Worten $e^A \in \mathcal{L}(V)$ besitzt keine Eigenwerte vom Betrag 1. Allgemein heißt ein $T \in \mathcal{L}(V)$ hyperbolisch, wenn $T$ keine Eigenwerte vom Betrag 1 besitzt, d.h. wenn $\sigma(T) \cap \mathbb{S}^1 = \emptyset$ gilt. Ist $T \in \mathcal{L}(V)$ hyperbolisch, so gilt

$$\begin{aligned} \sigma(T) &= \sigma_0(T) \cup \sigma_\infty(T) && \text{mit} \\ \sigma_0(T) &= \{\lambda \in \sigma(T) \mid |\lambda| < 1\} && \sigma_\infty(T) = \{\lambda \in \sigma(T) \mid |\lambda| > 1\}. \end{aligned}$$

Bezeichnen wir wieder mit $m(\lambda)$ die algebraische Multiplizität des Eigenwertes $\lambda \in \sigma(T)$, dann sind für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

$$V_0 = \bigoplus_{\lambda \in \sigma_0(T)} \{x \in V \mid (\lambda - T)^{m(\lambda)} x = 0\} \quad V_\infty = \bigoplus_{\lambda \in \sigma_\infty(T)} \{x \in V \mid (\lambda - T)^{m(\lambda)} x = 0\}.$$

invariante Untervektorräume von $V$, die $T$ reduzieren, d.h.

$$V = V_0 \oplus V_\infty \quad \text{ und } T = T_0 \oplus T_\infty \quad \text{ und } \sigma(T_0) = \sigma_0(T) \quad \text{ und } \sigma(T_\infty) = \sigma_\infty(T).$$

Ist $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, so wenden wir diese Zerlegung auf die Komplexifizierung an und restringieren anschließend auf die reellen Teilräume, d.h.

$$V_0 = (V_\mathbb{C})_0 \cap V \quad \text{und } V_\infty = (V_\mathbb{C})_\infty \cap V \quad \text{sowie } T_0 = (T_\mathbb{C})_0|_{V_0} \quad \text{und } T_\infty = (T_\mathbb{C})_\infty|_{V_\infty}.$$

Dann folgt wie im Beweis von Satz 2.9 die Aussage, weil $\lambda \mapsto \bar{\lambda}$ $\mathbb{S}^1$ invariant läßt.

Das folgende Lemma stellt ein Analogon zu Lemma 2.5 dar. Zur einfacheren Formulierung verwenden wir die vereinfachende Schreibweise

$$|\sigma(A)| < \alpha \Leftrightarrow |\lambda| < \alpha \quad \text{ für alle } \lambda \in \sigma(A).$$

Andere Ungleichungen sind analog zu interpretieren.

**Lemma 2.33.** *Es sei $T \in \mathcal{L}(V)$ invertierbar und hyperbolisch, und für $\alpha \in (0,1)$ gelte*

$$|\sigma(T_0)| < \alpha \textit{ und } |\sigma((T_\infty)^{-1})| < \alpha.$$

*Dann gibt es eine Hilbertnorm $\|\cdot\|$ auf $V$ so daß $V_0$ und $V_\infty$ orthogonal sind und mit*

$$\max\{\|T_0\|, \|(T_\infty)^{-1}\|\} \leq \alpha.$$

**Beweis:** Wegen $\|A_{\mathbb{C}}\| = \|A\|$ (vgl. den Beweis von Lemma 2.5 können wir o.B.A. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ annehmen. Nach dem Beweis von Lemma 2.5 wissen wir dann, daß $T_0 = D + N$ ist, mit einem nilpotenten Operator $N \in \mathcal{L}(V_0)$ und einem Diagonaloperator (bzgl. einer geeigneten Basis) $D = \operatorname{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_k)$, wobei $\mu_1, \ldots, \mu_k$ die gemäß ihrer Vielfachheit gezählten Eigenwerte von $T_0$ sind. Außerdem wissen wir, daß wir die Basis so wählen können, daß für die zugehörige euklidische Norm $\| \cdot \|_0$ auf $V_0$ gilt

$$\|N\|_0 \leq \alpha - \max\{|\mu_j| \mid j = 1, \ldots, k\}.$$

Hieraus folgt unmittelbar

$$\|T_0\|_0 \leq \|D\|_0 + \|N\|_0 \leq \max\{|\mu_j| \mid 1 \leq j \leq k\} + \|N\|_0 \leq \alpha.$$

Analog finden wir eine Hilbertnorm $\| \cdot \|_\infty$ auf $V_\infty$, so daß für die zugehörige Operatornorm gilt: $\|T_\infty^{-1}\|_\infty \leq \alpha$. Dann wird durch

$$\|x\|^2 = \|x_0\|_0^2 + \|x_\infty\|_\infty^2 \quad \text{für alle } x = x_0 + x_\infty \in V_0 \oplus V_\infty = V$$

die gewünschte Hilbertnorm auf $V$ definiert. **q.e.d.**

**Bemerkung 2.34.** *Ist $T \in \mathcal{L}(V)$ invertierbar und hyperbolisch, so ist*

$$|\sigma_0(T)| < 1 < |\sigma_\infty(T)|.$$

*Da für jedes invertierbare $B \in \mathcal{L}(V)$ trivialerweise*

$$\sigma(B^{-1}) = \sigma^{-1}(B) = \{\lambda^{-1} \mid \lambda \in \sigma(B)\}$$

*gilt, folgt $|\sigma(T_\infty^{-1})| < 1$. Also existieren ein $\alpha < 1$ und eine Norm $\| \cdot \|$ auf $V$ mit*

$$\|T_0\| \leq \alpha < 1 \text{ und } \|T_\infty^{-1}\| \leq \alpha < 1.$$

*Für $x \in V_0$ folgt hieraus*

$$T^k x = (T_0)^k x \to 0 \text{ für } k \to \infty,$$

*und für $y \in V_\infty$ ergibt sich*

$$T^{-k} y = (T_\infty)^{-k} y \to 0 \text{ für } k \to \infty.$$

*In Analogie zu linearen Flüssen nennt man deshalb $V_0$ den stabilen und $V_\infty$ den instabilen Untervektorraum von $T$ (oder genauer: des von $T$ erzeugten diskreten Flusses).*

Für einen metrischen Raum sei $C_b(X,V)$ der Banachraum der beschränkten stetigen Funktionen von $X$ nach $V$ mit der Supremumsnorm. Ist $X$ kompakt, so ist natürlich $C_b(X,V) = C(X,V)$ und

$$\|u\|_\infty = \max_{x\in X} \|u(x)\|.$$

Außerdem ist es klar, daß wir eine äquivalente Norm auf $C_b(X,V)$ erhalten, wenn wir die Norm in $V$ durch eine äquivalente Norm ersetzen. Es sei nun $V = V_1 \oplus V_2$ eine direkte Summenzerlegung von $V$, und für die zugehörigen Projektionen $P_i : V \to V_i$ gelte $\|P_i\| \leq 1$. Dann läßt sich jedes Element $u \in V$ als $u = P_1 u + P_2 u$ schreiben, mit $P_i u \in C_b(X, V_i)$. Außerdem gilt trivialerweise

$$\|P_i u\|_\infty = \sup_{x\in X} \|P_i u(x)\| \leq \|P_i\| \cdot \|u\|_\infty \leq \|u\|_\infty$$

für $i = 1,2$. Folglich werden durch $(P_i u)(x) = P_i u(x)$ für alle $x \in X$ stetige Projektionen $P_i : C_b(X,V) \to C_b(X,V_i)$, mit $P_1 + P_2 = \mathbb{1}$ definiert, d.h. es gilt $C_b(X,V) = C_b(X,V_1) \oplus C_b(X,V_2)$, und $P_i : C_b(X,V) \to C_b(X,V_i)$ sind die zugehörigen Projektionen. Setzen wir

$$\|u\|_{C_b(X,V)} = \max\{\|P_1 u\|_\infty, \|P_2 u\|_\infty\},$$

so folgt aus

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\|u\|_\infty &= \tfrac{1}{2}\|P_1 u + P_2 u\|_\infty \leq \tfrac{1}{2}(\|P_1 u\|_\infty + \|P_2 u\|_\infty)\\ &= \tfrac{1}{2}(\|P_1 u\|_{C_b(X,V_1)} + \|P_2 u\|_{C_b(X,V_2)}) \leq \|u\|_{C_b(X,V)} \leq \|u\|_\infty,\end{aligned}$$

daß $\|\cdot\|_{C_b(X,V)}$ eine äquivalente Norm auf $C_b(X,V)$ ist.

Schließlich benötigen wir noch das Analogon zum Begriff der "Flußäquivalenz" für den Fall topologischer Abbildungen. Sind $X$ und $Y$ topologische Räume und $A : X \to X$ sowie $B : Y \to Y$ Homöomorphismen, so heißt ein Homöomorphismus $\Psi : X \to Y$ eine topologische Konjugation von $A$ nach $B$, falls $\Psi \circ A = B \circ \Psi$ gilt. Sind $X$ und $Y$ offene Teilmengen von Banachräumen und sind $A, B$ und $\Psi$ $C^k$-Diffeomorphismen, $1 \leq k \leq \infty$, so heißt $\Psi$ eine $C^k$-Konjugation. Schließlich heißen $A$ und $B$ topologisch (bzw. $C^k$-)konjugiert, falls eine topologische (bzw. $C^k$-)Konjugation von $A$ nach $B$ existiert. Hierdurch wird trivialerweise eine Äquivalenzrelation in der Klasse der Homöomorphismen (bzw. der $C^k$-Diffeomorphismen) definiert. Nach diesen Vorbereitungen können wir nun den globalen Hartmannschen Linearisierungssatz beweisen.

**Satz 2.35.** *Für ein invertierbares und hyperbolisches $T \in \mathcal{L}(V)$, und für jede lipschitzstetige Funktion $g \in C_b(V,V)$ mit genügend kleiner Lipschitzkonstanten, sind die Abbildungen $T$ und $T + g$ topologisch konjugiert.*

**Beweis:** Wegen dem vorangehenden Lemma und der Bemerkung danach gibt es eine Hilbertnorm $\|\cdot\|$ auf $V$ mit

$$\max\{\|T_0\|, \|T_\infty^{-1}\|\} \leq \alpha < 1.$$

Da beim Übergang zu einer äquivalenten Norm auf $V$ die Lipschitzkonstante von $g$ mit einem positiven Faktor multipliziert wird, können wir die Norm $\|\cdot\|$ auf $V$ verwenden und annehmen, daß für ein $2\lambda < \min\{1-\alpha, \|T^{-1}\|^{-1}\}$ gilt:

$$\|g(x) - g(y)\| \leq \lambda\|x - y\| \quad \text{für alle } x, y \in V.$$

**(i)** Wir zeigen zuerst, daß $T + g \in C(V, V)$ ein Homöomorphismus ist. Da, für jedes $z \in V$, die Gleichung $Tx + g(x) = z$ äquivalent zur Fixpunktgleichung

$$x = T^{-1}(z - g(x)) = f_z(x)$$

ist, ist $T + g$ bijektiv, falls $f_z : V \to V$ genau einen Fixpunkt $x(z)$ hat. Wegen

$$\begin{aligned} \|f_z(x) - f_z(y)\| &\leq \|T^{-1}\| \cdot \|g(y) - g(x)\| && \leq \lambda\|T^{-1}\| \cdot \|x - y\| \\ &\leq \tfrac{1}{2}\|x - y\| && \text{für alle } x, y \in V \end{aligned}$$

folgt dies aus dem Banachschen Fixpunktsatz. Wir erhalten für $z, \tilde{z} \in V$

$$\begin{aligned} \|x(z) - x(\tilde{z})\| &= \|f_z(x(z)) - f_{\tilde{z}}(x(\tilde{z}))\| \\ &\leq \|f_z(x(z)) - f_z(x(\tilde{z}))\| + \|f_z(x(\tilde{z})) - f_{\tilde{z}}(x(\tilde{z}))\| \\ &\leq \tfrac{1}{2}\|x(z) - x(\tilde{z})\| + \|T^{-1}\| \cdot \|z - \tilde{z}\|, \end{aligned}$$

also $\|x(z) - x(\tilde{z})\| \leq 2\|T^{-1}\|\|z - \tilde{z}\|$. Also ist $x(\cdot) = (T + g)^{-1} : V \to V$ lipschitzstetig.
**(ii)** Es sei nun $h \in C_b(V, V)$ eine zweite lipschitzstetige Funktion mit der Lipschitzkonstanten $\lambda$. Ferner nehmen wir an, daß es zu jedem Paar $(g, h)$ solcher Funktionen genau ein $H = H(g, h) \in C(V, V)$ gibt mit

$$H - \mathbb{1}_V \in C_b(V, V) \qquad \text{und } (T + g) \circ H = H \circ (T + h).$$

Dann gilt für $a = H(g, 0)$

$$(T + g) \circ a = a \circ T,$$

und für $b = H(0, g)$

$$T \circ b = b \circ (T + g).$$

Es folgt

$$(T + g) \circ a \circ b = a \circ T \circ b = a \circ b \circ (T + g).$$

Wegen $a \circ b - \mathbb{1}_V = (a - \mathbb{1}_V) \circ b + (b - \mathbb{1}_V) \in C_b(V, V)$ und der Eindeutigkeit von $H$ ist $a \circ b = H(g, g) = \mathbb{1}_V$ ist. Analog folgt $b \circ a = \mathbb{1}_V$. Folglich ist $a$ ein Homömorphismus von $V$ auf sich, also eine topologische Konjugation von $T + g$ nach $T$.
**(iii)** Mit $H = \mathbb{1}_V + u$ bleibt zu zeigen, daß es genau ein $u \in C_b(V, V)$ gibt mit

$$(T + g) \circ (\mathbb{1}_V + u) = (\mathbb{1}_V + u) \circ (T + h).$$

Da nach (i) $T + h$ ein Homöomorphismus ist, ist das äquivalent zu

$$\begin{aligned}\mathbb{1}_V + u &= (T + g) \circ (\mathbb{1}_V + u) \circ (T + h)^{-1} \\ &= g \circ (\mathbb{1}_V + u) \circ (T + h)^{-1} + T \circ (T + h)^{-1} + T \circ u \circ (T + h)^{-1}.\end{aligned}$$

Wegen $T \circ (T + h)^{-1} = \mathbb{1}_V - h \circ (T + h)^{-1}$ ist die letzte Gleichung äquivalent zu

$$\begin{aligned}u = \tilde{F}(u) &= T \circ u \circ (T + h)^{-1} + G(u) \quad \text{mit} \\ G(u) &= g \circ (\mathbb{1}_V + u) \circ (T + h)^{-1} - h \circ (T + h)^{-1}.\end{aligned}$$

Offensichtlich bildet $\tilde{F}$ den Banachraum $C_b(V, V)$ in sich ab. Es bleibt zu zeigen, daß $\tilde{F}$ genau einen Fixpunkt in $C_b(V, V)$ hat.

Wegen $V = V_0 \oplus V_\infty$ und da $V_0$ und $V_\infty$ orthogonal sind, folgt $\|P_0\|, \|P_\infty\| \leq 1$ für die zugehörigen orthogonalen Projektionen. Die Fixpunktgleichung für $\tilde{F}$ ist somit äquivalent zu dem Paar von Gleichungen

$$\begin{aligned}P_0 \circ u = F_0(u) &= T_0 \circ P_0 \circ u \circ (T + h)^{-1} + P_0 \circ G(u) \\ P_\infty \circ u &= T_\infty \circ P_\infty \circ u \circ (T + h)^{-1} + P_\infty \circ G(u).\end{aligned}$$

Da die letzte Gleichung durch Multiplikation von links mit $T_\infty^{-1}$ und von rechts mit $T + h$ in die äquivalente Gleichung

$$P_\infty \circ u = F_\infty(u) = T_\infty^{-1} \circ P_\infty \circ u \circ (T + h) - T_\infty^{-1} \circ P_\infty \circ G(u) \circ (T + h)$$

übergeht, ist die Fixpunktgleichung für $\tilde{F}$ äquivalent zu der letzten und der vorvorletzten Gleichung. Nach den vorangehenden Betrachtungen induziert die Zerlegung $V = V_0 \oplus V_\infty$ die Zerlegung $C_b(V, V) = C_b(V, V_0) \oplus C_b(V, V_\infty)$ mit

$$\begin{aligned}\|u\|_{C_b(V,V)} &= \max\{\|P_0 u\|_\infty, \|P_\infty u\|_\infty\} \\ \tfrac{1}{2}\|u\|_\infty \leq \|u\|_{C_b(V,V)} &\leq \|u\|_\infty \quad \text{für alle } u \in C_b(V, V).\end{aligned}$$

Also wird durch $F = F_0 + F_\infty$ eine Abbildung von $C_b(V, V)$ in sich definiert, derart, daß die beiden Fixpunktgleichungen $u = F(u)$ und $u = \tilde{F}(u)$ äquivalent sind. Für $u, v \in$

$C_b(V,V)$ und $x \in V$ erhalten wir mit $y = (T+h)^{-1}(x)$ und $z = (T+h)(x)$ und unter Verwendung von der Abschätzung an die Normen von $T_0$ und $T_\infty$ die Abschätzungen

$$\begin{aligned}\|F_0(u)(x) - F_0(v)(x)\| &\le \alpha\|P_0 u(y) - P_0 v(y)\| + \|g(y+u(y)) - g(y+v(y))\| \\ &\le \alpha\|P_0(u-v)\|_\infty + \lambda\|u-v\|_\infty \le (\alpha+2\lambda)\|u-v\|_{C_b(V,V)}, \\ \|F_\infty(u)(x) - F_\infty(v)(x)\| &\le \alpha\|P_\infty u(z) - P_\infty v(z)\| + \alpha\|g(x+u(x)) - g(x+v(x))\| \\ &\le \alpha\|P_\infty(u-v)\|_\infty + \lambda\|u-v\|_\infty \le (\alpha+2\lambda)\|u-v\|_{C_b(V,V)},\end{aligned}$$

woraus wegen $F_0(C_b(V,V)) \subset C_b(V,V_0)$ und $F_\infty(C_b(V,V)) \subset C_b(V,V_\infty)$

$$\|F(u) - F(v)\|_{C_b(V,V)} \le (\alpha+2\lambda)\|u-v\|_{C_b(V,V)} \qquad \text{für alle } u,v \in C_b(V,V)$$

folgt. Wegen $\alpha + 2\lambda < 1$ folgt die Existenz eines eindeutigen Fixpunktes von $F$ aus dem Banachschen Fixpunktsatz. **q.e.d.**

**Bemerkung 2.36. (i)** *Der obige Beweis zeigt, daß es genau eine topologische Konjugation $H$ von $T$ nach $T+g$ gibt, welche $H - \mathbb{1}_V \in C_b(V,V)$ erfüllt (falls natürlich die Lipschitzkonstante von $g$ hinreichend klein ist).*

**(ii)** *Für $g \in C^k(V,V), 1 \le k \le \infty$ könnte man erwarten, daß die topologische Konjugation $H$ von $T+g$ nach $T$ auch in $C^k(V,V)$ liegt. Dies ist jedoch im allgemeinen nicht richtig. Für Ergebnisse in dieser Richtung verweisen wir auf Hartmann.*

Zur Lokalisierung des obigen Linearisierungssatzes benötigen wir das folgende

**Lemma 2.37.** *Es sei $F$ ein beliebiger normierter Vektorraum, und $r_\delta : F \to \overline{B(0,\delta)}$ sei die radiale Retraktion:*

$$r_\delta(x) = \begin{cases} x & \text{für } \|x\| \le \delta \\ \delta\frac{x}{\|x\|} & \text{für } \|x\| > \delta \end{cases}.$$

*Dann ist $r_\delta$ lipschitzstetig mit der Lipschitzkonstanten 2.*

**Beweis:** Für $\|x\| > \delta \ge \|y\|$ gilt

$$\begin{aligned}\|r_\delta(x) - r_\delta(y)\| &= \big\|\delta\|x\|^{-1}x - y\big\| \le \delta\|x\|^{-1}\|x-y\| + \big\|\delta\|x\|^{-1}y - y\big\| \\ &\le \|x-y\| + \|x\|^{-1}\|y\|(\|x\| - \delta) \\ &\le \|x-y\| + (\|x\| - \|y\|) \le 2\|x-y\|.\end{aligned}$$

Sind $\|x\| > \delta$ und $\|y\| > \delta$, erhalten wir

$$\begin{aligned}\|r_\delta(x) - r_\delta(y)\| &= \big\|\delta\|x\|^{-1}x - \delta\|y\|^{-1}y\big\| \\ &\le \delta\|x\|^{-1}\|x-y\| + \delta\|y\| \cdot \big|\|x\|^{-1} - \|y\|^{-1}\big| \\ &\le \|x-y\| + \delta\|x\|^{-1}\,|\|y\| - \|x\|| \le 2\|x-y\|.\end{aligned}$$

Hieraus folgt die Behauptung. **q.e.d.**

Nach diesen Vorbereitungen beweisen wir das Hauptresultat dieses Abschnittes.

**Satz 2.38** (Grobman und Hartmann)**.** *Sei $X$ eine offene Teilmenge des endlichdimenisonalen Banachraums $V$, $f \in C^1(X,V)$ und $x_0$ ein hyperbolischer kritischer Punkt von $\Phi_f$ (d.h. $f(x_0) = 0$ und $\sigma_n(f'(x_0)) = \emptyset$). Dann gibt es Umgebungen $O \subset V$ von 0 und $U \subset X$ von $x_0$ so dass $\Phi_{f'(x_0)|_O}$ und $\Phi_{f|_U}$ flußäquivalent sind.*

**Beweis:** Der Beweis unterteilt sich in drei Schritte. Zuerst konstruieren wir einen globalen Fluss auf $V$, der in einer Umgebung mit $\Phi_f$ übereinstimmt. Danach zeigen wir die Aussage zuerst für die entsprechenden zeitdiskreten Systeme, die wir erhalten wenn wir die Zeit auf $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ einschränken. Als letztes zeigen wir, dass die so konstruierte Flussäquiavlenz auch eine Flussäquivalenz für die zeitkontinuierlichen Systeme ist.

**(i)** Mithilfe einer Translation können wir o.B.d.A. $x_0 = 0$ annehmen. Für alle $\lambda > 0$ existiert ein $\delta > 0$ mit $\|f'(x) - f'(0)\| \leq \frac{\lambda}{2}$ für alle $x \in \overline{B(0,\delta)}$. Aufgrund des Mittelwertsatzes ist die $x \mapsto f(x) - f'(0)x$ auf $\overline{B(0,\delta)}$ lipschitzstetig mit der Lipschitzkonstanten $\frac{\lambda}{2}$. Wir definieren $g \in C_b(V,V)$ mittels der radialen Retraktion $r_\delta : V \to \overline{B(0,\delta)}$ durch

$$g = (f - f'(0)) \circ r_\delta.$$

Wegen dem vorangehenden Lemma ist $g$ lipschitzstetig ist mit der Lipschitzkonstanten $\lambda$. Mit $A = f'(0) \in \mathcal{L}(V)$ gilt

$$(A + g)|_{B(0,\delta)} = f|_{B(0,\delta)}.$$

Der von $A + g$ auf $V$ erzeugte Fluß $\Phi_{A+g}$ stimmt also auf dem Definitionsbreich von $\Phi_{f|_{B(0,\delta)}}$ mit $\Phi_f$ überein. Weil $g$ und $A+g$ lipschitzstetig sind, ist $\Phi_{A+g}$ nach Satz 1.39 (v) ein globaler Fluss. Es genügt also zu zeigen, daß $\Phi_{A+g}$ und $\Phi_A$ flußäquivalent sind.

**(ii)** Wegen $\dot{x} = Ax + g(x)$ folgt aus der Variation der Konstanten

$$\Phi_{A+g}(t,x) = e^{tA}x + \int_0^t e^{(t-s)A} g(\Phi_{A+g}(s,x))ds \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Diese Formel wenden wir jetzt dreimal an. In der ersten Anwendung benutzen wir die Beschränktheit von $g \in C_b(V,V)$ und erhalten für $t \in \mathbb{R}$ und $x \in V$:

$$\|\Phi_{A+g}(t,x) - e^{tA}x\| \leq \|g\|_\infty \left| \int_0^t e^{(t-s)\|A\|} ds \right|.$$

Deshalb liegt $\Phi_{A+g}(t,\cdot) - e^{tA}$ für alle $t \in \mathbb{R}$ in $C_b(V,V)$.

In der zweiten Anwendung zeigen wir die Lipschitzstetigkeit von $\Phi_{A+g}(t,\cdot)$:

$$\|\Phi_{A+g}(t,x)-\Phi_{A+g}(t,y)\| \leq e^{t\|A\|}\|x-y\| + \int_0^t e^{(t-s)\|A\|}\lambda\,\|\Phi_{A+g}(s,x)-\Phi_{A+g}(s,y)\|\,ds$$

für $t \geq 0$ und $x,y \in V$. Wir multiplizieren jetzt diese Ungleichung mit $e^{-t\|A\|}$

$$\begin{aligned}\|\Phi_{A+g}(t,x)e^{-t\|A\|}-\Phi_{A+g}(t,y)e^{-t\|A\|}\| &\leq \\ &\leq \|x-y\| + \lambda\int_0^t \|\Phi_{A+g}(s,x)e^{-s\|A\|}-\Phi_{A+g}(s,y)e^{-s\|A\|}\|ds\end{aligned}$$

und wenden Lemma 1.59 auf diese Ungleichung an:

$$\|\Phi_{A+g}(t,x)e^{-t\|A\|}-\Phi_{A+g}(t,y)e^{-t\|A\|}\| \leq \|x-y\|\left(1+\lambda\int_0^t e^{\lambda(t-s)}ds\right) = \|x-y\|e^{\lambda t}.$$

Daraus folgt zuerst die Lipschitzstetigkeit von $\Phi_{A+g}(t,\cdot)$:

$$\|\Phi_{A+g}(t,x)-\Phi_{A+g}(t,y)\| \leq \|x-y\|e^{(\lambda+\|A\|)t} \quad \text{für alle } x,y \in V \text{ und } t \geq 0.$$

Diese Ungleichung setzten wir in die dritte Anwendung der Formel ein, nachdem wir uns zuerst die Lipschitzstetigkeit von $g$ zunutze machen:

$$\begin{aligned}\|(\Phi_{A+g}(t,x)-e^{tA}x-(\Phi_{A+g}(t,y)-e^{tA}y)\| &\leq \int_0^t e^{(t-s)\|A\|}\lambda\|\Phi_{A+g}(s,x)-\Phi_{A+g}(s,y)\|ds \\ &\leq \lambda\|x-y\|e^{t\|A\|}\int_0^t e^{\lambda s}ds = \|x-y\|e^{t\|A\|}(e^{\lambda t}-1) \quad \text{für } t \geq 0 \text{ und } x,y \in V.\end{aligned}$$

Also ist $\Phi_{A+g}(t,\cdot)-e^{tA}$ lipschitzstetig mit Lipschitzkonstante $e^{t\|A\|}(e^{\lambda t}-1)$. Da $x_0 = 0$ nach Voraussetzung ein hyperbolischer kritischer Punkt ist, ist $\sigma_n(A) = \emptyset$. Also folgt aus Lemma 2.32, daß $T = e^A$ ein hyperbolischer Automorphismus von $V$ ist. Für hinreichend kleines $\lambda$ wird die Lipschitzkonstante $e^{\|A\|}(e^{\lambda}-1)$ von $\tilde{g} = \Phi_{A+g}(1,\cdot)-T$ beliebig klein. Mit $\tilde{g} \in C_b(V,V)$ folgt aus dem Hartmannschen Linearisierungssatz, daß $T$ und $\Phi_{A+g}(1,\cdot) = T+\tilde{g}$ topologisch konjugiert sind. Wir wissen außerdem, daß es genau eine Flussäquivalenz $\Psi$ von $T$ nach $\Phi_{A+g}(1,\cdot)$ gibt mit $\Psi - \mathbb{1}_V \in C_b(V,V)$.

**(iii)** Aus $\Psi \circ T = \Phi_{A+g}(1,\cdot) \circ \Psi$ folgt für jedes $t \in \mathbb{R}$ (mit $T^t = e^{tA}$)

$$\begin{aligned}\Phi_{A+g}(1,\cdot) \circ (\Phi_{A+g}(t,\cdot) \circ \Psi \circ T^{-t}) &= \Phi_{A+g}(t,\cdot) \circ \Phi_{A+g}(1,\cdot) \circ \Psi \circ T^{-t} \\ &= \Phi_{A+g}(t,\cdot) \circ \Psi \circ T \circ T^{-t} \\ &= (\Phi_{A+g}(t,\cdot) \circ \Psi \circ T^{-t}) \circ T.\end{aligned}$$

Also ist $\Phi_{A+g}(t,\cdot) \circ \Psi \circ T^{-t}$ eine Flussäquivalenz von $T$ nach $\Phi_{A+g}(1,\cdot)$. Wegen

$$\Phi_{A+g}(1,\cdot) \circ \Psi \circ T^{-t} - \mathbb{1}_V = (\Phi_{A+g}(t,\cdot) - T^t) \circ \Psi \circ T^{-t} + T^t \circ (\Psi - \mathbb{1}_V) \circ T^{-t}$$

liegt dann mit $\Phi_{A+g}(t,\cdot) - e^{tA}$ und $\Psi - \mathbb{1}_V$ auch $\Phi_{A+g}(t,\cdot) \circ \Psi \circ T^{-t} - \mathbb{1}_V$ in $C_b(V,V)$. Also ist $\Phi_{A+g}(t,\cdot) \circ \Psi \circ T^{-t} = \Psi$ und somit $\Phi_{A+g}(t,\cdot) \circ \Psi = \Psi \circ e^{tA}$ für jedes $t \in \mathbb{R}$, d.h. $\Phi_{A+g}$ und $e^{tA}$ sind flußäquivalent.

Wir fassen zuletzt zusammen, in welcher Reihenfolge wir die Voraussetzungen erfüllen. Für gegebenes $f \in C^1(X,V)$ mit hyperbolischem kritischen Punkt $x_0 = 0$ und $A = f'(0)$ wählen wir zuerst ein $\alpha \in (\max\{\sigma(e^{A_s}) \cup \sigma(e^{-A_u})\}, 1)$ und eine entsprechende Hilbertnorm $\|\cdot\|$ auf $V$ mit $\max\{\|e^{A_s}\|, \|e^{-A_u}\|\} \leq \alpha$. Dann wählen wir $\lambda > 0$ so klein, dass $2e^{\|A\|}(e^\lambda - 1) < \min\{1-\alpha, \|e^{-A}\|^{-1}\}$ gilt. Dann wählen wir $\delta > 0$, so dass $f - f'(0)$ auf $\overline{B(0,\delta)}$ lipschitzstetig ist mit Lipschitzkonstante $\frac{\lambda}{2}$. Das entsprechende $\Psi$ bildet die Ruhelage $x_0 = 0$ auf sich selber, und $O = \Psi^{-1}[B(0,\delta)]$ auf $U = B(0,\delta)$ ab. **q.e.d.**

## 2.6 Stabile Mannigfaltigkeiten

Der letzte Satz besagt, daß in der Nähe eines hyperbolischen kritischen Punktes $x_0$ das Phasenporträt des Flusses $\Phi_f$ die gleiche topologische Struktur wie das Phasenporträt der Linearisierung in der Nähe von 0 hat. In Analogie zum stabilen Untervektorraum $V_s$ bzw. instabilen Untervektorraum $V_u$ eines linearen Flusses definiert man die stabile Mannigfaltigkeit $W_s(x_0)$ bzw. die instabile Mannigfaltigkeit $W_u(x_0)$ von $\Phi_f$ in $x_0$ als

$$\begin{aligned}W_s(x_0) &= \{x \in V \mid t \mapsto \Phi_f(t,x) \text{ existiert für } t \in [0,\infty) \text{ und } \lim_{t\to\infty} \Phi_f(t,x) = x_0\} \\ W_u(x_0) &= \{x \in V \mid t \mapsto \Phi_f(t,x) \text{ existiert für } t \in (-\infty,0] \text{ und } \lim_{t\to-\infty} \Phi_f(t,x) = x_0\}.\end{aligned}$$

Offensichtlich gilt $x_0 \in W_s(x_0) \cap W_u(x_0)$. Wir wollen nun zeigen, daß, in der Nähe von $x_0$, die Mengen $W_s(x_0)$ und $W_u(x_0)$ tatsächlich differenzierbare Untermannigfaltigkeiten von $V$ sind, die sich in $x_0$ transversal schneiden, und daß die Tangentialräume an $W_s(x_0)$ bzw. $W_u(x_0)$ parallel zu $V_s$ bzw. $V_u$ sind:

$$T_{x_0}W_s(x_0) = x_0 + V_s \qquad\qquad T_{x_0}W_u(x_0) = x_0 + V_u.$$

Zum Beweis betrachten wir wieder zuerst zeitdiskrete Systeme, d.h. Homöomorphismen von $V$ auf sich. Ist $h : V \to V$ ein Homöomorphismus mit $h(0) = 0$, so heißt

$$W_0 := \{x \in V \mid h^n(x) \to 0 \text{ für } n \to \infty\}$$

die stabile Menge von $h$ in 0, wobei $h^n$ die $n$-fache Iterierte von $h$ bezeichnet. Analog definiert man die instabile Menge von $h$ in 0 durch

$$W_\infty := \{x \in V \mid h^{-n}(x) \to 0 \text{ für } n \to \infty\},$$

wobei $h^{-n} := (h^{-1})^n$ gesetzt ist. Offensichtlich gehen $W_0$ und $W_\infty$ ineinander über, wenn wir $h$ durch $h^{-1}$ ersetzen. Folglich genügt es, $W_0$ zu betrachten.

Sei $T \in \mathcal{L}(V)$ invertierbar und hyperbolisch, und $V = V_0 \oplus V_\infty, T = T_0 \oplus T_\infty$ sei die oben eingeführte Zerlegung in den stabilen und den instabilen Untervektorraum.

**Satz 2.39.** *Sei $g : V \to V$ lipschitzstetig mit $g(0) = 0$. Besitzt $g$ eine genügend kleine Lipschitzkonstante, so existiert eine eindeutig bestimmte gleichmäßig lipschitzstetige Funktion $h : V_0 \to V_\infty$, so daß der Graph von $h$ die stabile Menge $W_0$ von $T + g$ in 0 ist. Ist $g$ auf einer Umgebung von 0 $l$-mal stetig differenzierbar für ein $1 \le l \le \infty$, so auch die Funktion $h$. Dann gibt es eine offene Umgebung $Y$ von 0 in $V_0$, derart, daß*

$$W_0^Y = \{(x, h(x)) \mid x \in V_0\}$$

*eine $C^l$-Mannigfaltigkeit ist. Gilt außerdem $g'(0) = 0$, so ist $T_0 W_0^Y = V_0$.*

**Beweis:** Es sei

$$B_0 = \{u : \mathbb{N}_0 \to V \mid u(k) \to 0 \text{ für } k \to \infty\}.$$

Ein $u \in B(\mathbb{N}_0, V)$ liegt genau dann nicht in $B_0$, wenn es einen Häufungspunkt $v \in V \setminus \{0\}$ hat. Dann haben alle Elemente von $w \in B(u, \frac{\|v\|}{2}) \subset B(\mathbb{N}_0, V)$ auch einen Häufungspunkt in $B(v, \frac{\|v\|}{2}) \subset V$. Also ist $B_0$ ein abgeschlossener Untervektorraum des Banachraums $B(\mathbb{N}_0, V)$ und damit selber ein Banachraum. Offenbar gilt

$$\begin{aligned} W_0 &= \{x \in V \mid ((T+g)^k x)_{k \in \mathbb{N}_0} \in B_0\} \\ &= \{x \in V \mid \exists u \in B_0 \text{ mit } x = u(0) \text{ und } u(k+1) = (T+g)(u(k)) \forall k \in \mathbb{N}_0\}. \end{aligned}$$

Mit den Projektionen $P_0 : V \to V_0$ und $P_\infty : V \to V_\infty$ wird die Bedingung an $u$ zu

$$\begin{aligned} &P_0 u(k+1) = T_0 P_0 u(k) + P_0 g(u(k)) \quad P_\infty u(k+1) = T_\infty P_\infty u(k) + P_\infty g(u(k)), \text{ bzw.} \\ &P_0 u(k+1) = T_0 P_0 u(k) + P_0 g(u(k)) \qquad P_\infty u(k) = T_\infty^{-1} P_\infty u(k+1) - T_\infty^{-1} P_\infty g(u(k)) \end{aligned}$$

für $k \in \mathbb{N}_0$. Wir ergänzen in der ersten Gleichung der unteren Zeile für $k = -1$ die Gleichung $P_0 u(0) = P_0 x$ und definieren für $x \in V_0$ und $u \in B_0$: $F(x,u)(k) =$

$$= \begin{cases} T_0 P_0 u(k-1) + T_\infty^{-1} P_\infty u(k+1) + P_0 g(u(k-1)) - T_\infty^{-1} P_\infty g(u(k)) & \text{für } k > 0 \\ P_0 x + T_\infty^{-1}(P_\infty u(1) - P_\infty g(u(0))) & \text{für } k = 0, \end{cases}$$

Dann gibt es genau dann ein Element $u(0) \in W_0$ mit $P_0 u(0) = x$, wenn $u$ ein Fixpunkt von $F(x, \cdot)$ in $B_0$ ist. Wie im Beweis des Hartmannschen Linearisierungssatzes sei

$$\max\{\|T_0\|, \|T_\infty^{-1}\|\} \leq \alpha < 1 \quad \max\{\|P_0\|, \|P_\infty\|\} \leq 1 \quad \|g(x) - g(y)\| \leq \lambda \|x - y\|$$

für alle $x, y \in V$ und für ein $2\lambda < 1 - \alpha$. Wir benutzen in $B_0$ die äquivalente Norm

$$\|u\|_B = \max\{\|P_0 u\|_\infty, \|P_\infty u\|_\infty\} \qquad \text{mit } \tfrac{1}{2}\|u\|_\infty \leq \|u\|_B \leq \|u\|_\infty$$

für alle $u \in B_0$. Für $x \in V$ und $u, v \in B_0$ schätzen wir $\|P_0(F(x,u) - F(x,v))\|$ und $\|P_\infty(F(x,u) - F(x,v))\|$ getrennt ab und erhalten die Abschätzungen

$$\begin{aligned} \|F(x,u) - F(x,v)\|_B &\leq \alpha \|u - v\|_B + \lambda \|u - v\|_\infty \leq (\alpha + 2\lambda)\|u - v\|_B, \\ \|F(x,u)(k)\| &\leq (\alpha + \lambda)\|u(k-1)\| + \alpha\lambda \|u(k)\| + \alpha \|u(k+1)\| \quad \text{für } k > 0. \end{aligned}$$

Es folgt, daß $F(x, \cdot)$ den Banachraum $B_0$ in sich abbildet, und $F(x, \cdot) : B_0 \to B_0$ eine Kontraktion mit der von $x \in V$ unabhängigen Kontraktionskonstanten $\alpha + 2\lambda < 1$ ist. Der Banachsche Fixpunktsatz impliziert die Existenz eines eindeutig bestimmten Fixpunktes $U(x)$ von $F(x, \cdot)$ in $B_0$. Wir erhalten die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|U(x) - U(y)\|_B &= \|F(x, U(x)) - F(y, U(y))\|_B \\ &\leq \|F(x, U(x)) - F(x, U(y))\|_B + \|F(x, U(y)) - F(y, U(y))\|_B \\ &\leq (\alpha + 2\lambda)\|U(x) - U(y)\|_B + \|P_0 x - P_0 y\| \\ &\leq \frac{\|P_0 x - P_0 y\|}{1 - \alpha - 2\lambda} \quad \text{für alle } x, y \in V. \end{aligned}$$

Deshalb definieren wir

$$h(x) = P_\infty U(x)(0) \quad \text{für alle } x \in V_0.$$

Dann bildet $h$ den Raum $V_0$ lipschitzstetig in $V_\infty$ ab, und

$$W_0 = \{x, h(x)) \mid x \in V_0\} = \text{Graph}(h).$$

Es bleibt zu zeigen, dass $h$ $l$-mal differenzierbar ist, wenn $g$ auf einer Umgebung von 0 $l$-mal differenzierbar ist, und $T_0 W_0^Y = V_0$ im Fall von $g'(0) = 0$ gilt. Wir bezeichnen mit $S_1, S_{-1} : B_0 \to B_0$ die Verschiebungsoperatoren

$$(S_{-1}u)(k) = u(k+1) \text{ für alle } k \in \mathbb{N}_0 \qquad (S_1 u)(k) = \begin{cases} u(k-1) & \text{für alle } k \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{für } k = 0. \end{cases}$$

Dann sind $S_{-1}$ und $S_1$ stetig mit $\max\{\|S_{-1}\|_B, \|S_1\|_B\} \leq 1$. Zuletzt definieren wir

$$G : B_0 \to B_0, \qquad \text{mit} \qquad G(u)(k) = g(u(k)) \text{ für alle } k \in \mathbb{N}_0.$$

Gilt dann $g \in C^l(B_V(0,\beta), V)$ für ein $\beta > 0$ und ein $l \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, so folgt $G \in C^l(B_{B_0}(0,\beta), B_0)$ und für $g'(0) = 0$ auch $G'(0) = 0$. Mit dem Einheitsvektor $e_0 = (1, 0, \ldots) \in B_0$ kann $F(x, \cdot)$ in folgender Form geschrieben werden:

$$F(x,\cdot) = (P_0 x)e_0 + T_0 P_0 (S_1 + G \circ S_1) + T_\infty^{-1} P_\infty (S_{-1} - G)$$
$$\text{Mit } H(x,u) = u - F(x,u) \quad \text{erhalten wir} \quad H \in C^k(V \times B_{B_0}(0,\beta), B_0)$$
$$K = \mathbb{1}_{B_0} - \frac{\partial H}{\partial u}(0,0) = T_0 P_0 S_1 + T_\infty^{-1} P_\infty S_{-1}.$$

Mithilfe von $\max\{\|S_{-1}\|_B, \|S_1\|_B\} \leq 1$ folgt die Abschätzung

$$\|K\|_{\mathcal{L}(B_0)} \leq \alpha < 1.$$

Wegen der Neumannschen Reihe ist $\frac{\partial H}{\partial u}(0,0) \in \mathcal{L}(B_0)$ invertierbar. Wegen $H(0,0) = 0$, und da $U(x) \in B_0$ für jedes $x \in V_0$ die eindeutige Lösung der Gleichung

$$H(x,u) = 0$$

ist, folgt aus dem Satz über implizite Funktionen, daß die Abbildung

$$V_0 \to B_0, \quad x \mapsto U(x)$$

in einer Umgebung von $x = 0$ $k$-mal stetig differenzierbar ist. Da die Auswertungsabbildung $B_0 \to V, u \mapsto u(0)$ linear und stetig ist, ist die Funktion $h : V_0 \to V_\infty$ in einer offenen Umgebung $Y$ von 0 auch $k$-mal stetig differenzierbar. Folglich ist $W_0^Y$ als Graph einer $C^k$-Funktion eine $C^k$-Mannigfaltigkeit der Dimension $\dim_{\mathbb{R}} V_0$. Da durch

$$V_0 \supset Y \ni x \mapsto (x, h(x))$$

eine Parametrisierung von $W_0^Y$ gegeben wird, ist der Tangentialraum $T_0 W_0^Y$ das Bild von $V_0$ unter $(\mathbb{1}_{V_0} \times h'(0))$ in $V_0 \times V_\infty$, wobei wir o.B.d.A. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ annehmen können. Durch Differenzieren der Identität $H(x, U(x)) = 0$ im Punkt $x = 0$ folgt

$$\frac{\partial H}{\partial x}(0,0) + \frac{\partial H}{\partial u}(0,0)U'(0) = 0 \qquad \text{mit}$$
$$U'(0) \in \mathcal{L}(V_0, B_0) \quad \text{und } \frac{\partial H}{\partial x}(0,0)\xi = -(P_0\xi)e_0 \quad \text{für alle } \xi \in V.$$

Wir erhalten $P_\infty \frac{\partial H}{\partial x}(0,0)\xi = 0$ und mit der Definition von $K$ und Anwenden von $P_\infty$

$$P_\infty U'(0) - T_\infty^{-1} S_{-1} U'(0) = 0, \text{ d.h.} \qquad P_\infty(U'(0)x)(k) = T_\infty^{-1}(U'(0)x)(k+1)$$

für alle $k \in \mathbb{N}_0$ und $x \in V_0$. Hieraus folgt

$$\begin{aligned} \|P_\infty(U'(0)x)(k)\| &\le \alpha \|P_\infty U'(0)\|_{\mathcal{L}(V_0,B_0)} \|x\|_V \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N} \\ \|P_\infty U'(0)\|_{\mathcal{L}(V_0,B_0)} &\le \alpha \|P_\infty U'(0)\|_{\mathcal{L}(V_0,B_0)}, \end{aligned}$$

d.h. $P_\infty U'(0) = 0$, da $\alpha < 1$ ist. Wegen $h'(0)\xi = P_\infty(U'(0)\xi)(0)$ für alle $\xi \in V_0$ erhalten wir $h'(0) = 0$ und somit die Behauptung. **q.e.d.**

Ist $Y$ eine Umgebung eines kritischen Punktes $x_0$ des Flusses $\Phi_f$, so definieren wir die lokalen stabilen bzw. instabilen Mannigfaltigkeiten von $\Phi_f$ in $x_0$ bzgl. $Y$ durch

$$\begin{aligned} W_s^Y(x_0) &= \{x \in W_s(x_0) \mid \Phi_f(t,x) \in Y \text{ für } t \ge 0\} \\ W_u^Y(x_0) &= \{x \in W_u(x_0) \mid \Phi_f(t,x) \in Y \text{ für } t \le 0\}. \end{aligned}$$

I.a. gilt $W_s^Y(x_0) \ne W_s(x_0) \cap Y$ und $W_u^Y(x_0) \ne W_u(x_0) \cap Y$. Nach diesen Vorbereitungen können wir den angekündigten Satz über die lokalen stabilen und instabilen Mannigfaltigkeiten beweisen, der im wesentlichen auf Hadamard und Perron zurückgeht.

**Satz 2.40.** *Es sei $X \subset V$ eine offene Teilmenge eines endlichdimensionalen reellen Banachraums und $f \in C^k(X, V)$ für ein $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Ferner sei $x_0$ ein hyperbolischer kritischer Punkt des von $f$ erzeugten Flusses $\Phi_f$. Dann gibt es eine Umgebung $Y$ von $x_0$, derart, daß $W_u^Y(x_0)$ $C^k$-Mannigfaltigkeiten sind. Außerdem gilt*

$$T_{x_0} W_s^Y(x_0) = x_0 + V_s \text{ und } T_{x_0} W_u^Y(x_0) = x_0 + V_u,$$

*Wobei $V_s$ und $V_u$ die stabilen und instabilen Unterverktorräume von $e^{tf'(x_0)}$ sind.*

**Beweis:** O.B.d.A. können wir $x_0 = 0$ annehmen. Wir setzen wieder

$$g = (f - f'(0)) \circ r_\delta,$$

wobei $r_\delta : V \to \overline{B(0,\delta)}$ die radiale Retraktion bezeichnet. Dann ist $g$ gleichmäßig lipschitzstetig, $g(0) = 0$, und $g \in C^k(B(0,\delta), V)$ mit $g'(0) = 0$. Durch geeignete Wahl von $\delta > 0$ wird die Lipschitzkonstante von $g$ beliebig klein. Mit $A = f'(0) \in \mathcal{L}(V)$ gilt

$$(A+g)|_{B(0,\delta)} = f|_{B(0,\delta)},$$

Also stimmt auf $B(0,\delta)$ der von $A+g$ erzeugte globale Fluß $\Phi_{A+g}$ mit dem von $f$ erzeugten Fluß $\Phi_f$ überein. Wir setzen nun $T = e^A$. Dann ist $T$ ein hyperbolischer Automorphismus, und wie im Beweis vom Satz von Grobman und Hartmann folgt, daß $\tilde{g} = \Phi_{A+g}(1,\cdot) - T$ global lipschitzstetig ist, wobei die Lipschitzkonstante von $\tilde{g}$ durch geeignete Wahl von $\delta$ beliebig klein wird. Wegen $g(0) = 0$ ist $x = 0$ eine Ruhelage von $\Phi_{A+g}$, also $\tilde{g}(0) = 0$. Aus der Variation der Konstanten folgt wieder

$$\Phi_{A+g}(t,x) = e^{tA}x + \int_0^t e^{(t-s)A} g(\Phi_{A+g}(s,x))ds \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Wegen Satz 1.24 ist $\Phi_{A+g}$ genauso oft differenzierbar wie $g$, und deshalb auch $\tilde{g}$. Außderdem ist $\frac{\partial}{\partial x}\Phi_{A+g}(\cdot, 0)$ die Lösung des folgenden Anfangswertproblems:

$$\dot{z} = (A + g'(0))z = Az, \quad z(0) = \mathbb{1}_V.$$

Daraus folgt $\tilde{g}'(0) = 0$, gilt. Folglich erfüllen $T$ und $\tilde{g}$ die Voraussetzungen des vorangehenden Satzes. Somit ist die stabile Menge $W_0$ von $\Phi_{A+g}(1,\cdot) = T + \tilde{g}$ als Graph einer global lipschitzstetigen Abbildung $h : V_0 \to V_\infty$ darstellbar. Außerdem gibt es eine offene Umgebung $Y$ von 0 in $V_0$ mit $h \in C^k(Y, V_\infty)$, derart, daß

$$W_0^Y = \{(x, h(x)) \in V \mid x \in Y\}$$

eine $C^k$-Mannigfaltigkeit mit $T_0 W_0^Y = V_0 = V_s$ ist. Wir behaupten nun, daß $W_0 = \tilde{W}_s(0)$ gilt, wobei $\tilde{W}_s(0)$ die stabile Mannigfaltigkeit von $\Phi_{A+g}$ im Punkt 0 ist. Da aus $\lim_{t\to\infty} \Phi_{A+g}(t,x) = 0$ auch $\lim_{k\to\infty} \Phi_{A+g}(k,x) = 0$ folgt, ist $\tilde{W}_s(0) \subset W_0$. Zum Beweis der umgekehrten Inklusion bemerken wir, daß $\Phi_{A+g}$ für hinreichend kleines $\delta > 0$ auf den kompakten Mengen $(t,x) \in [-1,1] \times \overline{B(0,\delta)}$ gleichmäßig stetig ist, und es deshalb zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit

$$\|\Phi_{A+g}(t,x)\| \leq \epsilon \text{ für } |t| \leq 1 \text{ und } \|x\| \leq \delta.$$

Es sei $\epsilon > 0$ beliebig und es gelte $\lim_{k\to\infty} \Phi_f(k,x) = 0$. Dann existiert ein $k(\epsilon) \in \mathbb{N}$ mit $\|\Phi_{A+g}(k,x)\| \leq \delta$ für $k \geq k(\epsilon)$, wobei $\delta > 0$ wie oben gewählt ist. Also folgt

$$\|\Phi_{A+g}(t,x)\| = \|\Phi_{A+g}(t-k, \Phi_{A+g}(k,x))\| \leq \epsilon \quad \text{für } t \geq k(\epsilon) \text{ und } t \in [k, k+1),$$

d.h. $\Phi_{A+g}(t,x) \to 0$ für $t \to \infty$, und somit $W_0 \subset \tilde{W}_s(0)$.

Nach dem Beweis von dem vorangehenden Satz ist $h(x) = P_\infty U(x)(0)$ für $x \in V_0$, wobei die Funktion

$$V \to B_0, \quad y \mapsto U(y)$$

stetig ist, in $y = 0$ verschwindet und $U(y)(k) = (T+\tilde{g})^k(y) = \Phi_{A+g}(k,y)$ für alle $k \in \mathbb{N}$ erfüllt. Also existiert zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit

$$\{(x,h(x)) \mid \|x\| \leq \delta\} \subset \{y \in W_0 \mid \|\Phi_{A+g}(k,y)\| \leq \epsilon \text{ für alle } k \in \mathbb{N}\}.$$

Aus $\|\Phi_{A+g}(t,x)\| \leq \epsilon$ für $|t| \leq 1$ und $\|x\| \leq \delta$ folgt wie im Beweis der Inklusion $W_0 \subset \tilde{W}_s(0)$, daß wir zu vorgegebenem $\epsilon > 0$ die Zahl $\delta > 0$ so wählen können, daß

$$\{(x,h(x)) \mid \|x\| \leq \delta\} \subset \{y \in W_0 \mid \|\Phi_{A+g}(t,y)\| \leq \epsilon \text{ für alle } t \in \mathbb{N}\}.$$

gilt. Wegen $W_0 = \tilde{W}_s(0)$ existieren also Nullumgebungen $Y$ in $V$ und $\hat{Y} \subset V_0$ in $V_0$ mit $W_0^{\hat{Y}} \subset \tilde{W}_s^Y(0)$. Da in der Nähe von 0 die Flüsse übereinstimmen, können wir $Y$ so klein wählen, daß $\tilde{W}_s^Y(0) = W_s^Y(0)$ gilt. Insbesondere ist $W_s^Y(0) \subset W_0$, und da $W_0$ der Graph einer auf $V_0$ definierten Funktion ist, gilt $W_s^Y(0) \subset W_0^{V_0}$ für eine genügend kleine Umgebung $Y$ von 0. Also ist $W_s^Y(0)$ eine $C^k$-Mannigfaltigkeit mit $T_{x_0}W_s^Y(0) = V_s$. Die Behauptung für $W_u^Y(0)$ folgt nun durch Zeitumkehr $t \leftrightarrow -t$. **q.e.d.**