Kapitel 9

Metrische Räume und Banachräume

9.1 Metrik und Norm

Definition 9.1. *(Metrik auf einer Menge X) Eine Metrik (oder Abstandsfunktion) ist eine Abbildung $d : X \times X \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto d(x, y)$ mit drei Eigenschaften*

(i) $d(x, y) \geq 0$ *für alle* $x, y \in X$ *und* $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ *(Positivität).*

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$ *(Symmetrie).*

(iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ *für alle* $x, y, z \in X$ *(Dreiecksungleichung).*

Beispiel 9.2. (i) *auf jeder Menge X definiert* $d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = y \\ 1 & \text{für } x \neq y \end{cases}$

die sogenannte diskrete Metrik.

(ii) *Auf $\mathbb{K}$ definiert $d(x, y) = |x - y|$ eine Metrik.*

(iii) *Auf jeder nicht leeren Teilmenge $A \subset X$ eines metrischen Raumes (X, d) definiert die Einschränkung von d auf $A \times A \to \mathbb{R}$ eine Metrik.*

(iv) *Auf dem kartesischen Produkt zweier metrischer Räume definiert die Summe beider Metriken eine Metrik. Sie heißt Metrik des kartesischen Produktes.*

(v) *Die Einschränkung der Metrik (ii) auf die Vereinigung der inversen der natürlichen Zahlen mit $\{0\}$ definiert eine Metrik auf $\bar{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\} \simeq \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$:*

$$d(n, m) = \frac{|n - m|}{nm} \quad d(\infty, n) = d(n, \infty) = \frac{1}{n} \quad d(\infty, \infty) = 0 \quad \text{für alle } n, m \in \mathbb{N}.$$

Die Menge $V = \mathbb{K}^n$ erfüllt mit $(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$ und $0 = (0, \ldots, 0)$ die Axiome $A1$. Außerdem besitzt sie eine Skalarmultiplikation

$$\mathbb{K} \times V \to V, \qquad (\lambda, (x_1, \ldots, x_n)) \mapsto \lambda \cdot (x_1, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n),$$

so dass sie einen Vektorraum úber dem Körper $\mathbb{K}$ bildet:

Definition 9.3. *Ein $\mathbb{K}$-Vektorraum V ist eine Menge V zusammen mit Abbildungen:*

$$+ : V \times V \to V, \qquad (v, w) \mapsto v + w \qquad \cdot : \mathbb{K} \times V \to V, \qquad (\lambda, v) \mapsto \lambda \cdot v,$$

die die Axiome $A1$ der Addition und für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ und $v, w \in V$ folgendes erfüllt:

$$\begin{aligned} \lambda \cdot (v + w) &= \lambda \cdot v + \lambda \cdot w, & (\lambda + \mu) \cdot v &= \lambda \cdot v + \mu \cdot v, \\ (\lambda \cdot \mu) \cdot v &= \lambda \cdot (\mu \cdot v), & 1 \cdot v &= v. \end{aligned}$$

Definition 9.4. *Eine Norm auf einem reellen bzw. komplexen Vektorraum V ist eine Abbildung $\| \cdot \| : V \to \mathbb{R}$, $\quad x \mapsto \|x\|$ mit folgenden drei Eigenschaften:*

(i) $\|x\| \geq 0$ *für alle $x \in V$ und $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$*

(ii) $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ *für $\lambda \in \mathbb{K}$ und $x \in V$*

(iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *für alle $x, y \in V$*

Satz 9.5. *Für jede Norm ist $d : V \times V \to \mathbb{R}$, $\quad (x, y) \mapsto d(x, y) = \|x - y\|$ eine Metrik.*

Beweis:(i) folgt aus (i) der Definition einer Norm.
(ii) $d(y, x) = \|y - x\| = \|(-1)(x - y)\| = |-1| \|x - y\| = \|x - y\| = d(x, y)$
(iii) $d(x, y) = \|x - y\| = \|x - z + z - y\| \leq \|x - z\| + \|z - y\| = d(x, z) + d(z, y)$.**q.e.d.**

Im folgenden werden wir mit der Vorgabe einer Norm auf einem Vektorraum immer auch die entsprechende induzierte Metrik auf diesem Vektorraum betrachten. Deshalb fassen wir jeden normierten Vektorraum auch als metrischen Raum auf.

Definition 9.6. *(Euklidische Norm und Metrik) Auf $\mathbb{R}^n$ definiert*

$$\|(x_1, \ldots, x_n)\| = \sqrt{|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2} = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$$

die euklidische Norm. Die entsprechende Metrik heißt dann euklidische Metrik.

Die Eigenschaft (iii) heißt dabei Minkowski–Ungleichung:

$$\sqrt{(x_1 + y_1)^2 + \ldots + (x_n + y_n)^2} \leq \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} + \sqrt{y_1^2 + \ldots + y_n^2}.$$

Um diese zu beweisen zeigen wir zuerst die

Cauchy–Schwarzsche Ungleichung 9.7.

$$|x_1y_1| + \ldots + |x_ny_n| \leq \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}\sqrt{y_1^2 + \ldots + y_n^2}$$

Beweis*: Wegen $|x_iy_i| = |x_i| \cdot |y_i|$, $x_i^2 = |x_i|^2$ und $y_i^2 = |y_i|^2$ genügt es offenbar

$$x_1y_1 + \ldots + x_ny_n \leq \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}\sqrt{y_1^2 + \ldots + y_n^2}$$

zu zeigen. Das ist äquivalent zu

$$(x_1y_1 + \ldots + x_ny_n)^2 \leq (x_1^2 + \ldots + x_n^2)(y_1^2 + \ldots + y_n^2).$$

Für $y = (y_1, \ldots, y_n) = 0$ ist die Aussage trivial. Für $y \neq 0$ gilt

$$\begin{aligned}
\left\| \|y\|x - \frac{x_1y_1 + \ldots + x_ny_n}{\|y\|}y \right\|^2 &= \sum_{\imath=1}^n \left(\|y\|x_\imath - \frac{x_1y_1 + \ldots + x_ny_n}{\|y\|}y_\imath \right)^2 \\
= \sum_{\imath=1}^n \left(\|y\|^2x_\imath^2 + \frac{(x_1y_1 + \ldots + x_ny_n)^2}{\|y\|^2}y_\imath^2 - 2(x_1y_1 + \ldots + x_ny_n)x_\imath y_\imath \right) \\
= \|y\|^2\|x\|^2 + \frac{(x_1y_1 + \ldots + x_ny_n)^2}{\|y\|^2}\|y\|^2 - 2(x_1y_1 + \ldots + x_ny_n)^2 \\
= \|y\|^2\|x\|^2 - (x_1y_1 + \ldots + x_ny_n)^2.
\end{aligned}$$

Weil diese Ausdrücke nicht negativ sind folgt $(x_1y_1 + \ldots + x_ny_n)^2 \leq \|x\|^2\|y\|^2$. **q.e.d.**
Beweis der Minkowski Ungleichung:

$$\begin{aligned}
(x_1 + y_1)^2 + \ldots + (x_n + y_n)^2 &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x_1y_1 + \ldots + x_ny_n) \\
&\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| \leq (\|x\| + \|y\|)^2. \quad \textbf{q.e.d.}
\end{aligned}$$

Analog definiert $\|(x_1, \ldots, x_n)\| = \sqrt{x_1\bar{x}_1 + \ldots + x_n\bar{x}_n}$ eine Norm auf $\mathbb{C}^n$. Identifizieren wir $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R}^2$ (Realteil und Imaginärteil), dann ist $\mathbb{C}^n \simeq (\mathbb{R}^2)^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$.

Übungsaufgabe 9.8. *Die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^{2n}$ induziert durch diese Identifikation auf $\mathbb{C}^n$ die Norm $\|(x_1, \ldots, x_n)\| = \sqrt{x_1\bar{x}_1 + \ldots + x_n\bar{x}_n}$.*

Definition 9.9. *Für $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ und $1 \leq p < \infty$ sei*

$$\|x\|_p = (|x_1|^p + \ldots + |x_n|^p)^{1/p}$$

Wir hatten in einer Übungsaufgabe gesehen, dass $\|x\|_p$ im Grenzwert $p \to \infty$ gegen

$$\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$$

konvergiert. Das sogenannte hermitische Skalarprodukt wird definiert als

$$\langle x, y \rangle = x_1\bar{y}_1 + \ldots + x_n\bar{y}_n \in \mathbb{K}, \qquad \text{für } x, y \in \mathbb{K}^n.$$

Für $y \in \mathbb{R}^n$ setzen wir hierbei $(\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n) = \bar{y} = y$.

Satz 9.10. *(Höldersche Ungleichung) Seien $p \geq 1$ und $q \geq 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.*

Dann gilt $\quad |\langle x, y\rangle| \leq |x_1 y_1| + \ldots + |x_n y_n| \leq \|x\|_p \cdot \|y\|_q \quad$ *für alle $x, y \in \mathbb{K}^n$.*

Für $p = q = 2$ erhalten wir wieder die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung

$$|x_1 y_1| + \ldots + |x_n y_n| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Beweis: Wenn $p = 1$ und $q = \infty$ gilt

$$|x_1 y_1| + \ldots + |x_n y_n| \leq (|x_1| + \ldots + |x_n|) \max\{|y_1|, \ldots, |y_n|\}.$$

Den Fall $p = \infty$ und $q = 1$ erhalten wir durch vertauschen von x und y. Wir können also $1 < p, q < \infty$ annehmen, und dass $\|x\|_p \neq 0 \neq \|y\|_q$ gilt, weil die Ungleichung sonst offensichtlich ist. Dann folgt aus der Youngschen Ungleichung für alle $k = 1, \ldots, n$

$$\frac{|x_k y_k|}{\|x\|_p \|y\|_q} = \frac{|x_k|}{\|x\|_p} \frac{|y_k|}{\|y\|_q} \leq \frac{1}{p} \frac{|x_k|^p}{\|x\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{|y_k|^q}{\|y\|_q^q}$$

Nach Summation über $k = 1, \ldots, n$ erhalten wir

$$\frac{|x_1 y_1| + \ldots + |x_n y_n|}{\|x\|_p \|y\|_q} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$ **q.e.d.**

Satz 9.11. *(Minkowski Ungleichung) Sei $p \geq 1$ und $x, y \in \mathbb{K}^n$, dann gilt*

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$$

Korollar 9.12. *Für alle $1 \leq p \leq \infty$ und $n \in \mathbb{N}$ ist $\|\cdot\|_p : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}$ eine Norm.* **q.e.d.**

Beweis der Minkowski Ungleichung: Für $p = 1$ oder $p = \infty$ folgt sie aus der Dreiecksungleichung. Sei also $1 < p, q < \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Leftrightarrow p + q = pq \Leftrightarrow p = (p-1)q$.

$$\begin{aligned}
|x_1 + y_1|^p + \ldots + |x_n + y_n|^p &= |x_1 + y_1| \cdot |x_1 + y_1|^{p-1} + \ldots + |x_n + y_n| \cdot |x_n + y_n|^{p-1} \\
&\leq (|x_1| + |y_1|)|x_1 + y_1|^{p-1} + \ldots + (|x_n| + |y_n|)|x_n + y_n|^{p-1} \\
&\leq (\|x\|_p + \|y\|_p)(|x_1 + y_1|^{(p-1)q} + \ldots + |x_n + y_n|^{(p-1)q})^{1/q} \\
&= (\|x\|_p + \|y\|_p)\|x + y\|_p^{p/q}
\end{aligned}$$

Die zweite Zeile wurde ausmultipliziert und jeweils die Höldersche Ungleichung benutzt. Es folgt $\|x + y\|_p^p \leq (\|x\|_p + \|y\|_p)\|x + y\|_p^{p/q}$. Für $\|x + y\|_p = 0$ ist die Aussage trivial. Aus $\|x + y\|_p \neq 0$ folgt $\|x + y\|_p = \|x + y\|_p^{p(1-\frac{1}{q})} = \|x + y\|_p^{(p-\frac{p}{q})} \leq \|x\|_p + \|y\|_p$. **q.e.d.**

Definition 9.13. *(offener Ball, Umgebung, offene Menge) Ein offener Ball in (X, d) mit Zentrum $x \in X$ und Radius $r > 0$ ist die Menge $B(x, r) = \{y \in X \mid d(x, y) < r\}$. Eine Umgebung eines Punktes $x \in X$ ist eine Menge $O \subset X$, die für ein $r > 0$ einen Ball $B(x, r)$ enthält. Eine offene Menge $O \subset X$ ist eine Teilmenge, die eine Umgebung aller ihrer Punkte ist, d.h. für alle $x \in O$ gibt es ein $\epsilon > 0$ mit $B(x, \epsilon) \subset O$.*

Beispiel 9.14. *In $\mathbb{R}$ besteht der Ball $B(x,r)$ aus $(x-r,x+r)$. Im $\mathbb{R}^n$ besteht der Ball $B(x,r)$ aus allen Punkten, deren euklidischer Abstand zu x kleiner ist als r.*

Alle offenen Bälle $B(x,r)$ sind tatsächlich offen: Für $y \in B(x,r)$ ist $d(x,y) < r$. Sei $z \in B(y, r - d(x,y))$. Dann gilt $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) < r$, also auch $B(y, r - d(x,y)) \subset B(x,r)$. Deshalb sind die offenen Bälle tatsächlich offen.

Offenbar ist die beliebige Vereinigung von offenen Mengen wieder offen. Für zwei offene Mengen O und O' und $x \in O \cap O'$ gibt es $r > 0$ und $r' > 0$ mit $B(x,r) \subset O$ und $B(x,r') \subset O'$. Also ist $B(x, \min\{r,r'\}) \subset B(x,r) \cap B(x,r') \subset O \cap O'$, und $O \cap O'$ offen. Damit ist auch die Schnittmenge von endlich vielen offenen Mengen wieder offen.

Definition 9.15. *(abgeschlossene Mengen, Abschluss) Die Komplemente von offenen Mengen heißen abgeschlossen. Der Abschluss $\bar{A}$ eine Menge A ist die Schnittmenge aller abgeschlossenen Mengen, die A enthalten.*

Wegen der Regel von de Morgan, sind beliebige Schnitte und endliche Vereinigungen von abgeschlossenen Mengen wieder abgeschlossen. Deshalb ist eine Menge genau dann abgeschlossen, wenn sie mit ihrem Abschluss übereinstimmt.

Definition 9.16. *Zwei Normen $\| \quad \|_1$ und $\| \quad \|_2$ heißen äquivalent, wenn es Konstanten $C_1, C_2 > 0$ gibt, so dass für alle $v \in V$ gilt*

$$\|v\|_1 \leq C_1 \|v\|_2 \qquad \text{und} \qquad \|v\|_2 \leq C_2 \|v\|_1.$$

Diese Relation zwischen Normen ist eine Äquivalenzrelation, denn aus

$$\begin{array}{ccccc} \|v\|_1 \leq C_1\|v\|_2 & \|v\|_2 \leq C_2\|v\|_1 & & \|v\|_2 \leq C_3\|v\|_3 & \|v\|_3 \leq C_4\|v\|_2 \\ \text{folgt} & \|v\|_1 \leq C_1C_3\|v\|_3 & \text{und} & \|v\|_3 \leq C_4C_2\|v\|_1. & \end{array}$$

Beispiel 9.17. *Auf den Vektorräumen $\mathbb{K}^n$ haben wir für $1 \leq p \leq \infty$ die Normen*

$$\|\cdot\|_p : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}, \quad v \mapsto \|v\|_p = \begin{cases} \left(\sum\limits_{i=1}^n |v_i|^p \right)^{1/p} & \text{für } p < \infty \\ \max\{|v_1|, \ldots |v_n|\} & \text{für } p = \infty. \end{cases}$$

eingeführt. Sie sind alle äquivalent, weil für $1 \leq p < \infty$ und $v \in \mathbb{K}^n$ folgendes gilt:

$$\|v\|_\infty \leq \|v\|_p \leq (n\|v\|_\infty^p)^{1/p} = n^{1/p}\|v\|_\infty.$$

Äquivalente Normen besitzen offenbar die gleichen offenen Mengen, so dass eine Folge bezüglich einer Norm genau dann konvergiert, wenn sie bezüglich einer äquivalenten Norm konvergiert. Wenn umgekehrt die offenen Mengen von zwei Normen übereinstimmen, dann müssen sie äquivalent sein, weil dann jeder Ball um die Null der einen Norm einen Ball um die Null der anderen Norm enthalten muß. Wir werden sehen, dass auch die stetigen Funktionen von äquivalenten Normen übereinstimmen.

9.2 Vollständigkeit und Kompaktheit

Zunächst verallgemeinern wir einige Aussagen über Zahlenfolgen auf allgemeine Folgen in metrischen Räumen.

Definition 9.18. *(Folgen und Cauchyfolgen) Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in einem metrischen Raum (X, d) ist eine Abbildung von $\mathbb{N}$ nach X, mit $n \mapsto x_n$.*

Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in einem metrischen Raum (X, d) konvergiert gegen $x \in X$, wenn es für jedes $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $d(x_n, x) < \epsilon$ für alle $n \geq N$ gilt.

Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt Cauchyfolge, wenn es für jedes $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $d(x_n, x_m) < \epsilon$ für alle $n, m \geq N$ gilt.

Offenbar konvergiert eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann gegen einen Punkt x, wenn jede Umgebung von x alle bis auf endlich viele Folgenglieder enthält. Deshalb hängt der Begriff der Konvergenz nur von der Wahl der offenen Mengen ab.

Ein Punkt x gehört genau dann zu dem Abschluss $\bar{A}$, wenn es keine offene Menge gibt, die x enthält und einen leeren Schnitt mit A hat. Dies ist wiederum äquivalent dazu, dass es für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein Element a_n in dem Ball $B(x, \frac{1}{n}) \cap A$ gibt, oder auch dazu, dass es eine Folge in A gibt, die gegen x konvergiert. Damit haben wir gezeigt:

Lemma 9.19. *Der Abschluss einer Teilmenge eines metrischen Raumes besteht aus allen Grenzwerten von Folgen innerhalb der Teilmenge, die in dem metrischen Raum konvergieren. Und eine Teilmenge ist genau dann abgeschlossen, wenn die Grenzwerte von allen konvergenten Folgen in der Teilmenge auch zu der Menge gehören.* **q.e.d.**

Wenn die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x konvergiert, dann gibt es für jedes $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $d(x_n, x) < \frac{\epsilon}{2}$ und $d(x_m, x) < \frac{\epsilon}{2}$ für alle $n, m \geq N$ gilt. Dann gilt auch $d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \epsilon$. Damit haben wir gezeigt:

Satz 9.20. *In einem metrischen Raum sind konvergente Folgen Cauchyfolgen.* **q.e.d.**

Definition 9.21. *Ein metrischer Raum (X, d) heißt vollständig, wenn auch jede Cauchyfolge konvergiert.*

Definition 9.22. *Ein vollständiger normierter Vektorraum heißt Banachraum.*

Wegen dem Vollständigkeitsaxiom sind $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{C}^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ Banachräume. Wegen Lemma 9.19 ist eine Teilmenge eines vollständigen metrischen Raumes genau dann ein vollständiger metrischer Raum, wenn sie abgeschlossen ist.

Definition 9.23. *(kompakt) Eine Teilmenge der Menge der offenen Teilmengen von (X, d) heißt offene Überdeckung von X, wenn jedes Element von X in mindestens einer der offenen Mengen enthalten ist. Der metrische Raum heißt kompakt, wenn jede offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung besitzt, d.h. jede Menge von offenen Teilmengen von X, die X überdeckt, enthält eine endliche Teilmenge, die X überdeckt.*

Satz 9.24. *Für einen metrischen Raum (X, d) sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *(X, d) ist kompakt.*

(ii) *Jede Folge in (X, d) besitzt eine konvergente Teilfolge.*

(iii) *(X, d) ist vollständig und für jedes $\epsilon > 0$ besitzt (X, d) eine endliche Überdeckung mit offenen Bällen vom Radius ϵ.*

Beweis: (i)⇒(ii): Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge ohne Häufungspunkte und $F_n = \{x_m \mid m \geq n\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für $m \in \mathbb{N}$ und $x \in \bar{F}_m \setminus F_m$ gilt $d(x, x_m) > 0$. Wegen Lemma 9.19 folgt zuerst $x \in \bar{F}_{m+1} \setminus F_{m+1}$ und dann $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}}(\bar{F}_n \setminus F_n)$. Weil dann x ein Häufungspunkt von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wäre, ist F_m abgeschlossen. Weil auch $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ nur Häufungspunkte von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ enthält, ist $(X \setminus F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine offene Überdeckung von X. Die Schnittmenge von endlich vielen der Mengen $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist nicht leer. Also besitzt die Überdeckung $(X \setminus F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine endliche Teilüberdeckung, und (X, d) ist nicht kompakt.

(ii)⇒(iii): Sei also (X, d) ein metrischer Raum, der (ii) erfüllt. Dann besitzt jede Cauchyfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ einen Häufungspunkt x. Für jedes $\epsilon > 0$ gibt es also eine natürliche Zahl $N \in \mathbb{N}$, so dass $d(x_n, x_m) < \frac{\epsilon}{2}$ für alle alle $m, n \geq N$ gilt. Weil x ein Häufungspunkt ist, gilt $d(x_m, x) < \frac{\epsilon}{2}$ für ein ein $m \geq N$. Dann folgt

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_m) + d(x_m, x) < \epsilon \quad \text{für alle } n \geq N.$$

Also konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x. Damit ist (X, d) vollständig. Sei jetzt $\epsilon > 0$ und $x_1 \in X$. Induktiv wählen wir x_{n+1} aus $X \setminus \bigcup_{m=1}^{n} B(x_m, \epsilon)$, solange $B(x_1, \epsilon), \ldots, B(x_n, \epsilon)$ nicht X überdecken. Wenn das für alle $n \in \mathbb{N}$ gelten würde, dann wäre $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge, die $d(x_n, x_m) \geq \epsilon$ für alle $n > m \in \mathbb{N}$ erfüllt. Sie besäße keine Teilfolge, die eine Cauchyfolge ist, und damit auch keinen Häufungspunkt im Widerspruch zu (ii).

(iii)⇒(i): Wir nehmen an (X, d) erfüllt Bedingung (iii) und $(U_\lambda)_{\lambda\in L}$ sei eine Überdeckung von (X, d), die keine endliche Teilüberdeckung besitzt. Wir definieren induktiv eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so dass die Bälle $B(x_n, 2^{-n})$ nicht durch endlich viele $(U_\lambda)_{\lambda\in L}$ überdeckt werden und $B(x_{n+1}, 2^{-(n+1)})$ und $B(x_n, 2^{-n})$ für alle $n \in \mathbb{N}$ nicht disjunkt sind. Weil (X, d) für alle $n \in \mathbb{N}_0$ durch endliche viel Bälle vom Radius $2^{-(n+1)}$ überdeckt wird, können wir falls $B(x_n, 2^{-n})$ für $n \in \mathbb{N}$ nicht durch endlich viele $(U_\lambda)_{\lambda\in L}$ überdeckt wird, einen $B(x_{n+1}, 2^{-(n+1)})$ davon auswählen, der nicht durch endlich viele $(U_\lambda)_{\lambda\in L}$ überdeckt wird, und für $n \in \mathbb{N}$ nichtleeren Schnitt mit $B(x_n, 2^{-n})$ hat. Wegen

$$d(x_n, x_{n+1}) < 2^{-n} + 2^{-(n+1)} = \frac{3}{2 \cdot 2^n} \quad \text{und} \quad \sum_{n=m}^{\infty} \frac{3}{2 \cdot 2^n} = \frac{3}{2 \cdot 2^m} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{3}{2^m}$$

ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge. Für ein $\lambda \in L$ und ein $m \in \mathbb{N}$ enthält U_λ den Grenzwert x und $B(x, 2^{2-m})$. Das widerspricht wegen $d(x_m, x) \leq \frac{3}{2^m}$ der Konstruktion:

$$B(x_m, 2^{-m}) \subset B(x, 2^{-m} + 3 \cdot 2^{-m}) = B(x, 2^{2-m}) \subset U_\lambda.$$

Also gibt es keinen metrischen Raum (X,d), der (iii) erüllt aber nicht (i). **q.e.d.**

Dieser Satz hat einige wichtige Folgerungen:

Korollar 9.25. **(i)** *Kompakte Mengen eines metrischen Raums sind abgeschlossen.*

(ii) *Abgeschlossene Teilmengen einer kompakten Menge sind wieder kompakt.*

Beweis:(i) Kompakte Mengen sind wegen (iii) des vorangehenden Satzes vollständig, und stimmen wegen Lemma 9.19 mit ihrem Abschluss überein.
(ii) Abgeschlossene Teilmengen einer kompakten Menge erfüllen wegen Lemma 9.19 wieder die Bedingung (ii) des vorangehenden Satzes. **q.e.d.**

Definition 9.26. *Eine Teilmenge A eines metrischen Raumes (X,d) heißt beschränkt, wenn für ein $x \in X$, die Menge der Abstände $\{d(x,y)|y \in A\}$ beschränkt ist.*

Wegen der Dreiecksungleichung ist diese Bedingung äquivalent dazu, dass für alle $x \in X$ die Mengen $\{d(x,y) \mid y \in A\}$ beschränkt sind, aber nicht uniform in $x \in X$.

Der zweite Teil des Beweises vom Satz 5.9 zeigt dass alle kompakten Teilmengen eines metrischen Raumes beschränkt sind. Von einer beschränkten Folge im $\mathbb{K}^n$ können wir mit dem Auswahlprizip von Bolzano Weierstraß induktiv Teilfogen auswählen, so dass der Reihe nach erst die erste, dann zusätzlich die zweite und zuletzt all Komponenten konvergieren. Deshalb überträgt sich der gesamte Beweis des Satzes 5.9:

Satz 9.27. *In jedem metrischen Raum ist eine kompakte Teilmenge beschränkt.*

In $\mathbb{K}^n$ ist eine Teilmenge bezüglich einer der äquivalenten Normen $\|\cdot\|_p$ mit $p \in [1,\infty]$ genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.

Beispiel 9.28. **(i)** *Die Intervalle $[a,b]$ sind kompakt.*
(ii) *$\bar{\mathbb{N}}$ aus Beispiel (vi) ist kompakt.*
(iii) *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit Grenzwert a. Dann ist $\{a\} \cup \{a_n|n \in \mathbb{N}\}$ kompakt.*

9.3 Stetigkeit

Definition 9.29. *Eine Abbildung $f : X \to Y, \quad x \mapsto f(x)$ von einem metrischen Raum (X,d) in den metrischen Raum (Y,d) heißt stetig in $x \in X$, wenn es für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass alle $y \in B(x,\delta) \subset X$ auch $f(y) \in B(f(x),\epsilon) \subset Y$ erfüllen. Die Abbildung f heißt stetig, wenn sie in allen Punkten von X stetig ist.*

Stetig im Punkt x heißt also, dass alle Punkte, die hinreichend nahe bei x liegen, auf Werte abgebildet werden, die beliebig nahe bei $f(x)$ liegen.

Satz 9.30. *Für eine Abbildung $f : X \to Y, \quad x \mapsto f(x)$ zwischen den metrischen Räumen (X,d) und (Y,d) ist folgendes äquivalent:*

(i) *f ist stetig in x.*

(ii) *Das Urbild jeder Umgebung von $f(x)$ ist eine Umgebung von x.*

(iii) *Für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in (X,d), die gegen x konvergiert, konvergiert auch die Folge $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $f(x)$.*

Beweis:(i)⇔(ii) Die Umgebungen von x sind gerade die Mengen, die einen δ-Ball um x enthalten. Also ist (ii) äquivalent zu der Aussage, dass das Urbild jedes ϵ-Balles um $f(x)$ einen δ-Ball um x enthält. Diese Aussage ist nur eine Umformulierung von (i).
(ii)⇔(iii) Die Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren genau dann gegen x bzw. $f(x)$, wenn jede Umgebung von x bzw. $f(x)$ alle bis auf endlich viele Folgenglieder enthält. Wenn also $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x konvergiert und f (ii) erfüllt, dann konvergiert auch $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $f(x)$. Also folgt (iii) aus (ii). Wenn es umgekehrt einen ϵ-Ball von $f(x)$ gibt, dessen Urbild keinen δ-Ball von x enthält, dann gibt es für alle $n\in\mathbb{N}$ ein $x_n \in B\left(x,\frac{1}{n}\right)$, so dass $f(x_n)$ nicht in diesem ϵ-Ball von $f(x)$ liegt: $f(x_n) \notin B(f(x),\epsilon$. Dann konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x aber $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ nicht gegen $f(x)$. **q.e.d.**

Korollar 9.31. *Für eine Abbildung $f: X \to Y$ zwischen den metrischen Räumen (X,d) und (Y,d) ist folgendes äquivalent:*

(i) *f ist stetig.*

(ii) *Das Bild $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ jeder konvergenten Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent und es gilt*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right).$$

(iii) *Das Urbild jeder offenen Menge ist offen.*

(iv) *Das Urbild jeder abgeschlossenen Menge ist abgeschlossen.*

Beweis: Wegen dem vorangehenden Satz sind (i) und (ii) äquivalent. Weil eine Menge genau dann offen ist, wenn sie eine Umgebung von allen ihren Punkten ist, zeigt der vorangehende Satz, dass aus (i) bzw. (ii) auch (iii) folgt. Weil jede Umgebung eines Punktes auch eine offene Umgebung des Punktes enthält, folgt wieder wegen dem vorangehenden Satz aus (iii) auch (i) bzw. (ii). Weil nun die abgeschlossenen Mengen gerade die Komplemente der offenen Mengen sind und das Urbild eines Komplementes gerade gleich dem Komplement des Urbildes ist, ist (iii) zu (iv) äquivalent. **q.e.d.**

Korollar 9.32. *Die Komposition zweier stetiger Abbildungen ist stetig. Die analoge punktweise Aussage gilt auch.*

Beweis: Benutze die Äquivalenz zwischen (i) und (iii) im vorangehenden Korollar und die Gleichung

$$(f\circ g)^{-1}[A] = g^{-1}[f^{-1}[A]].$$

Beispiel 9.33. **(i)** *Auf jedem metrischen Raum ist die identische Abbildung $\mathbb{1}_X$ stetig.*

(ii) *Die konstante Abbildung, die alle $x \in X$ auf einen Punkt y abbildet ist stetig.*

(iii) *Wegen der Dreiecksungleichung gilt*

$$d(x,y) \leq d(x,u) + d(u,y) \leq d(x,u) + d(u,v) + d(v,y).$$

Also gilt auch $d(x,y) - d(u,v) \leq d(x,u) + d(v,y)$. Durch vertauschen $(x,y) \leftrightarrow (u,v)$ und unter Benutzung der Symmetrie erhalten wir

$$d(u,v) - d(x,y) \leq d(x,u) + d(v,y) \Rightarrow |d(x,y) - d(u,v)| \leq d(x,u) + d(v,y).$$

Mit der Metrik aus dem Beispiel 9.2 (v) auf $X \times X$ ist $d : X \times X \to \mathbb{R}$ also stetig.

(iv) *Auf jedem normierten Vektorraum V zeigt der Beweis von Korollar 2.20 auch folgende Ungleichung, aus der die Stetigkeit von $\|\cdot\|: V \to \mathbb{R}$, $v \mapsto \|v\|$ folgt:*

$$|\|v\| - \|w\|| \leq \|v - w\| \quad \text{für alle } v, w \in V$$

(v) *Wegen der Dreiecksungleichung sind für jeden normierten Vektorraum V*

$$+ : V \times V \to V, \quad (v,w) \mapsto v + w \quad \cdot : \mathbb{K} \times V \to \mathbb{K}, \quad (\lambda, v) \mapsto \lambda \cdot v$$

stetige Abbildungen. Das gilt auch für die Abbildungen

$$- : \mathbb{K} \to \mathbb{K}, \quad x \mapsto -x \quad \text{und} \quad {}^{-1} : \mathbb{K} \setminus \{0\} \to \mathbb{K} \setminus \{0\}, \quad x \mapsto x^{-1}.$$

(vi) *Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in einem metrischen Raum (X,d) läßt sich genau dann zu einer stetigen Abbildung von $\bar{\mathbb{N}}$ nach X fortsetzen, wenn sie konvergiert. Dann wird ∞ auf $\lim\limits_{n \to \infty} x_n$ abgebildet.*

Korollar 9.34. *Das Bild einer kompakten Menge unter einer stetigen Abbildung ist kompakt.*

Beweis: Sei $f : X \to Y, \quad x \mapsto f(x)$ eine stetige Abbildung und $A \subset X$ eine kompakte Menge. Dann ist das Urbild einer beliebig offenen Überdeckung von dem Bild

$$f[A] = \{y \in Y \mid \exists x \in A \text{ mit } f(x) = y\}$$

eine offene Überdeckung von A. Diese besitzt, wenn A kompakt ist, eine endliche Teilüberdeckung. Also besitzt jede offene Überdeckung von $f[A]$ eine endliche Teilüberdeckung und $f[A]$ ist kompakt. **q.e.d.**

Korollar 9.35. *Das Bild einer kompakten Menge unter einer stetigen Abbildung ist beschränkt. Das Bild einer solchen reellen Funktion besitzt Minimum und Maximum.*

Beweis: Sei (X,d) kompakt und $f : X \to Y, \quad x \mapsto f(x)$ stetig. Wegen Korollar 9.34 ist $f[X]$ kompakt und wegen Satz 9.27 beschränkt. Wegen Korollar 5.11 besitzen die kompakten Teilmengen von $\mathbb{R}$ sowohl ein Minimum als auch ein Maximum. **q.e.d.**

Eine bijektive stetige Abbildung $f : X \to Y$ zwischen metrischen Räumen (X,d) und (Y,d) heißt homöomorph oder Homöomorphismus, wenn f^{-1} stetig ist.

Korollar 9.36. *Auf kompaktem X ist jedes stetige bijektive $f : X \to Y$ homöomorph.*

Beweis: Wegen Korollar 9.34 ist das Bild $f[X] = Y$ kompakt. Wegen Korollar 9.25 ist eine Teilmenge eines kompakten metrischen Raumes genau dann abgeschlossen, wenn sie kompakt ist. Weil das Urbild unter der Umkehrabbildung gleich dem Bild unter f ist, folgt die Aussage aus Korollar 9.34 und Korollar 9.31 (iv). **q.e.d.**

Satz 9.37. *Auf $\mathbb{K}^n$ sind alle Normen paarweise äquivalent.*

Beweis: Es genügt zu zeigen, dass alle Normen äquivalent sind zu $\|\cdot\|_1$. Sei also $\|\cdot\|$ eine beliebige Norm. Sei $e_1,\ldots,e_n$ die Basis von $\mathbb{K}^n$, deren i–tes Element nur an der i–ten Stelle eine nicht verschwindende Komponente hat, die dann jeweils gleich Eins ist. Wegen der Dreiecksungleichung gilt dann für jedes $v = (v_1,\ldots,v_n) \in \mathbb{K}^n$

$$\|v\| \le |v_1|\cdot\|e_1\| + \ldots + |v_n|\cdot\|e_n\| \le \max\{\|e_1\|,\ldots,\|e_n\|\}\|v\|_1.$$

Aus der Dreiecksungleichung folgt dann für alle $v,w \in \mathbb{K}^n$

$$|\|v\| - \|w\|| \le \|v-w\| \le \max\{\|e_1\|,\ldots,\|e_n\|\}\|v-w\|_1.$$

Also ist die Abbildung $v \mapsto \|v\|$ stetig bezüglich der Norm $\|\cdot\|_1$, und wegen dem Satz 9.27 von Heine-Borel ist die Teilmenge $\{v \in \mathbb{K}^n \mid \|v\|_1 = 1\}$ mit der von $\|\cdot\|_1$ induzierten Metrik kompakt. Wegen Korollar 9.35 nimmt diese Funktion auf dieser Menge das Minimum C an. Wegen der Positivität von $\|\cdot\|$ gilt $C > 0$. Daraus folgt

$$C\|v\|_1 \le \left\|\frac{v}{\|v\|_1}\right\| \|v\|_1 = \|v\| \le \max\{\|e_1\|,\ldots,\|e_n\|\}\|v\|_1 \text{ für alle } v \in \mathbb{K}^n\setminus\{0\}.$$ **q.e.d.**

Definition 9.38. *(Gleichmäßige Stetigkeit, Lipschitzstetigkeit) Eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen metrischen Räumen heißt gleichmäßig stetig, wenn es für alle $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass $d(f(x),f(y)) < \epsilon$ für alle $x,y \in X$ mit $d(x,y) < \delta$ gilt.*

Die Abbildung heißt lipschitzstetig auf A, wenn es eine Konstante $L > 0$ (Lipschitzkonstante) gibt, so dass für alle $x,y \in A$ gilt $d(f(x),f(y)) \le Ld(x,y)$.

Offenbar ist jede lipschitzstetige Abbildung auch gleichmäßig stetig und jede gleichmäßig stetige Abbildung auch stetig. Es gilt auch folgende Umkehrung:

Satz 9.39. *Sei $f : X \to Y, \quad x \mapsto f(x)$ eine stetige Abbildung zwischen metrischen Räumen und $A \subset X$ kompakt. Dann ist f auf A auch gleichmäßig stetig.*

Auf kompakten Mengen sind also gleichmäßige und einfache Stetigkeit äquivalent.
Beweis: Wegen der Stetigkeit gibt es für jedes $\epsilon > 0$ und jedes $x \in A$ ein $\delta(x)$, so dass $f(y) \in B(f(x), \frac{\epsilon}{2})$ aus $y \in B(x, 2\delta(x))$ folgt. Wir wählen eine endliche Teilüberdeckung von der offenen Überdeckung $\{B(x, \delta(x)) \mid x \in A\}$ von A. Sei δ das Minimum der Radien dieser endlichen Teilüberdeckung. Dann gibt es für alle $y, z \in A$ mit $d(y, z) < \delta$ einen Ball $B(x, \delta(x))$ der endlichen Teilüberdeckung mit $y \in B(x, \delta(x))$. Dann folgt

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < \delta(x) + \delta \leq 2\delta(x) \quad \text{also } z \in B(x, 2\delta(x)).$$

Daraus folgt $$d(f(y), f(z)) \leq d(f(y), f(x)) + d(f(x), f(z)) < \epsilon.$$ **q.e.d.**

Übungsaufgabe 9.40. *In dieser Aufgabe konstruieren wir $\mathbb{R}$ als die Vervollständigung von dem angeordneten Körper $\mathbb{Q}$. Sei dazu $\mathfrak{C}$ die Menge der Cauchyfolgen in $\mathbb{Q}$.*

Für zwei Cauchyfolgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\widetilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{C}$ definieren wir die Relation

$$(x_n) \sim (\widetilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}} \qquad \Longleftrightarrow \qquad (x_n - \tilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist Nullfolge in } \mathbb{Q}.$$

(i) *Zeige, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathfrak{C}$ ist.*

(ii) *Wir bezeichnen die Menge der Äquivalenzklassen $\mathfrak{C}/\sim$ suggestiv mit $\mathbb{R}$. Zeige, dass die folgendermaßen definierte Addition und Multiplikation*

$$[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] + [(y_n)_{n\in\mathbb{N}}] := [(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}], \quad [(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] \cdot [(y_n)_{n\in\mathbb{N}}] := [(x_n \cdot y_n)_{n\in\mathbb{N}}]$$

*jeweils wohldefiniert sind, d.h. dass erstens die Addition und die Multiplikation von zwei Cauchyfolgen selbst eine Cauchyfolge ist und zweitens, dass diese Verknüpfungen nicht von den jeweiligen Repräsentanten (x_n) und (y_n) der Äquivalenzklassen abhängen. (*Tipp: *Benutze: Cauchyfolgen sind beschränkt)*

(iii) *Zeige, dass $\mathbb{R} = \mathfrak{C}/\sim$ mit diesen Verknüpfungen die Körperaxiome A1–A3 erfüllt. (*Tipp: *Benutze, dass $\mathbb{Q}$ die Axiome A1–A3 erfüllt.)*

(iv) *Zeige, dass folgende Relation auf $\mathbb{R}$ eine wohldefinierte Ordnungsrelation ist, die das Axiom A4 erfüllt:*

$$[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] > [(y_n)_{n\in\mathbb{N}}] \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists N \in \mathbb{N} : x_n - y_n \geq \tfrac{1}{N} \; \forall n \geq N.$$

(v) *Definiere die Einbettungsabbildung,*

$$\Phi : \mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R}, \qquad q \mapsto [q],$$

wobei für jedes $q \in \mathbb{Q}$, $[q]$ die konstante Folge $q_n = q$ bezeichnet. Diese Abbildung ist offenbar injektiv. Zeige, dass $\mathbb{R}$ archimedisch ist. Hierbei kann ohne Beweis benutzt werden, dass die natürlichen Zahlen in $\mathbb{R}$ das Bild von $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$ unter Φ sind. Zeige in einem zweiten Schritt, dass das Bild $\Phi[\mathbb{Q}]$ dicht in $\mathbb{R}$ liegt.

(vi) *Zeige, dass $\mathbb{R}$ vollständig ist. (*Tipp: *Nimm eine Cauchyfolge $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ als gegeben an. Da das Bild $\Phi[\mathbb{Q}]$ dicht in $\mathbb{R}$ liegt, existiert für jedes $n \in \mathbb{N}$ jeweils ein $x_n \in \mathbb{Q}$ mit $\Phi(-\frac{1}{n}) < \Phi(x_n) - \xi_n < \Phi(\frac{1}{n})$. Zeige, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{Q}$ ist, und $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ gegen das entsprechende $\xi := [(x_n)_{n\in\mathbb{N}}]$ konvergiert.)*

9.4 Funktionenräume

In diesem Abschnitt sei (Y, d) ein metrischer Raum, ein normierter Vektorraum oder eine normierte Algebra und später auch (X, d) ein metrischer Raum:

Definition 9.41. *Eine normierte Algebra ist ein normierter Vektorraum V mit einer assoziativen und distributiven Multiplikation $\cdot : V \times V \to V$, die folgendes erfüllt:*

$$\begin{array}{lll} (v + v'') \cdot v' = v \cdot v' + v'' \cdot v & (\lambda v) \cdot v' = \lambda(v \cdot v') & \|v \cdot v'\| \le \|v\| \cdot \|v'\| \\ v \cdot (v' + v'') = v \cdot v' + v \cdot v'' & v \cdot (\lambda v') = \lambda(v \cdot v') & \text{für alle } v, v', v'' \in V, \lambda \in \mathbb{K}. \end{array}$$

Wenn V vollständig ist, heißt V Banachalgebra.

Wir betrachten in diesem Abschnitt Mengen von Abbildungen von X nach Y. Wenn Y ein normierter Vektorraum ist, können wir solche Abbildungen punktweise miteinander addieren und mit Elementen von $\mathbb{K}$ multiplizieren, und wenn Y eine Algbera ist, auch punktweise miteinander multiplizieren:

$$\begin{array}{rlrl} f + g : X \to Y, & x \mapsto f(x) + g(x), & \lambda f : X \to Y, & x \mapsto \lambda f(x) \\ f \cdot g : X \to Y, & x \mapsto f(x) \cdot g(x). & & \end{array}$$

Die Addition erfüllt die Axiome $A1$ und mit der Skalarmultiplikation das Distributivgesetz. Dadurch wird die Menge aller Abbildungen in einen Vektorraum Y zu einem Vektorraum, und zu einer Algebra, wenn Y eine Algebra ist. Das Inverse einer Funktion f in eine Algebra mit Eins $\mathbb{1} \in Y$ existiert nur, wenn $f(x)$ für alle $x \in X$ invertierbar ist. Indem wir die Elemente von $\mathbb{K}$ mit den entsprechenden Vielfachen der Eins identifizieren, wird die Skalarmultiplikation zu einem Spezialfall der Multiplikation.

Definition 9.42. *Eine Folge von Funktionen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von X nach Y heißt*

punktweise konvergent, *wenn die Folgen $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ für jedes $x \in X$ konvergieren. Die Grenzwerte definieren wieder eine Funktion $f : X \to Y$, $\quad x \mapsto \lim_{n\to\infty} f_n(x)$.*

gleichmäßig konvergent, *wenn es eine Funktion $f : X \to Y$, $\quad x \mapsto f(x)$ gibt, und für alle $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $d(f_n(x), f(x)) < \epsilon$ für $n \ge N$ und $x \in X$ gilt.*

Offenbar ist jede gleichmäßige konvergente Folge (f_n) auch punktweise konvergent, aber nicht umgekehrt (siehe Beispiel 5.24).

Definition 9.43. *Eine Abbildung $f : X \to Y$ in einen metrischen Raum Y heißt beschränkt, wenn das Bild $f[X]$ in Y beschränkt ist. $B(X,Y)$, bezeichne die Menge aller beschränkten Abbildungen von X nach Y. Auf $B(X,Y)$ bezeichne d folgende Abbildung:*

$$d : B(X,Y) \times B(X,Y) \to \mathbb{R}, \quad (f,g) \mapsto d(f,g) = \sup\{d(f(x),g(x)) \mid x \in X\}.$$

Wenn Y ein normierter Vektorraum ist, dann bezeichne $\|\cdot\|_\infty$ folgende Abbildung:

$$\|\cdot\|_\infty : B(X,Y) \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto \|f\|_\infty = \sup\{\|f(x)\| \mid x \in X\}.$$

Satz 9.44. **(i)** *Für einen metrischen Raum Y ist d eine Metrik auf $B(X,Y)$.*

(ii) *Wenn Y ein normierter Vektorraum (Algebra) ist, ist $B(X,Y)$ ein normierter Vektorraum (Algebra) mit Norm $\|\cdot\|_\infty$, die die Metrik aus (i) induziert.*

(iii) *Wenn Y ein vollständiger metrischer Raum ist, dann auch $(B(X,Y),d)$.*

Beweis:(i) und **(ii)** folgen aus den Eigenschaften der Metrik bzw. Norm $\|\cdot\|$ von Y, und weil wegen der Dreiecksungleichung und wegen $\|v \cdot w\| \leq \|v\| \cdot \|w\|$ die Summe und das Produkt zweier beschränkter Abbildungen wieder beschränkt ist.
(iii) Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $B(X,Y)$. Für alle $\epsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$d(f_n(x), f_m(x)) \leq d(f_n, f_m) < \tfrac{\epsilon}{2} \quad \text{für alle } n, m \geq N \text{ und alle } x \in X.$$

Dann sind für alle $x \in X$ die Folgen $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolgen. Also konvergieren sie punktweise gegen eine Funktion $f : X \to Y, \quad x \mapsto f(x)$. Für obiges ϵ und alle $x \in X$ gibt es ein $M(x) \in \mathbb{N}$, so dass $d(f_m(x), f(x)) < \frac{\epsilon}{2}$ für alle $m \geq M(x)$ gilt. Damit folgt

$$d(f_n(x), f(x)) \leq d(f_n(x), f_{\max\{N,M(x)\}}(x)) + d(f_{\max\{N,M(x)\}}(x), f(x)) < \epsilon$$

für alle $x \in X$ und $n \geq N$. Also konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen f. Aus $\sup\{d(f_N(x), f(x)) \mid x \in X\} \leq \epsilon$ und $f_N \in B(X,Y)$ folgt $f \in B(X,Y)$. **q.e.d.**

Definition 9.45. *$C_b(X,Y)$ sei der Unterraum von $B(X,Y)$ aller stetigen und beschränkten Funktionen von X nach Y.*

Satz 9.46. **(i)** *Für metrische Räume X und Y ist $C_b(X,Y)$ abgeschlossen in $B(X,Y)$.*

(ii) *Wenn Y vollständig ist, dann auch $C_b(X,Y)$.*

(iii) *Wenn Y ein normierter Vektorraum (Algebra) ist, dann auch $C_b(X,Y)$.*

Beweis: Wegen dem vorangehenden Satz und Lemma 9.19 folgen (i) und (ii), wenn für jede Folge in $C_b(X,Y)$, die als Folge in $B(X,Y)$ konvergiert, der Grenzwert in $C_b(X,Y)$ liegt. Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $C_b(X,Y)$, die in $B(X,Y)$ gegen f konvergiert.

Dann gibt es für jedes $\epsilon > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $d(f_n, f) < \frac{\epsilon}{3}$. Weil f_n stetig bei $x \in X$ ist gibt es ein $\delta > 0$, so dass $d(f_n(x), f_n(y)) < \frac{\epsilon}{3}$ für alle $y \in B(x, \delta)$ gilt. Dann folgt

$$d(f(x), f(y)) \leq d(f(x), f_n(x)) + d(f_n(x), f_n(y)) + d(f_n(y), f(y)) < \epsilon.$$

Also ist f bei $x \in X$ stetig. (iii) folgt aus der Stetigkeit der Operationen von Y und der Abbildung $X \to Y \times Y$, $x \mapsto (f(x), g(x))$ für $f, g \in C_b(X, Y)$. **q.e.d.**

Die gleichmäßige Konvergenz der Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist notwendig (siehe Beispiel 5.24). Wenn Y ein Banachraum ist, dann sind sowohl $B(X, Y)$ als auch $C_b(X, Y)$ Banachräume. Wenn Y eine Banachalgebra ist wie z.B. $\mathbb{K}$, dann sind auch $B(X, Y)$ und $C_b(X, Y)$ Banachalgebren. Der Fall $Y = \mathbb{K}$ wird im folgenden noch öfter vorkommen. Jetzt können wir die Vervollständigungen aller metrischen Räume leicht konstruieren:

Satz 9.47. *Sei X ein metrischer Raum und $x_0 \in X$. Für alle $x \in X$ gehört dann*

$$\begin{array}{llll} & I(x): X \to \mathbb{R} & y \mapsto d(x, y) - d(x_0, y) & \textit{zu } C_b(X, \mathbb{R}). \\ \textit{Die Abbildung} & I: X \to C_b(X, \mathbb{R}) & x \mapsto I(x) & \end{array}$$

ist isometrische Abbildung, d.h. es gilt $d(I(x), I(y)) = d(x, y)$ für alle $x, y \in X$. Für jede gleichmäßig stetige Abbildung f von X in einen vollständigen metrischen Raum Y, gibt es eine gleichmäßige stetige Abbildung $g : \overline{I[X]} \to Y$ auf dem Abschluss des Bildes von I in $C_b(X, \mathbb{R})$, so dass f gleich $g \circ I$ ist (vergleiche Übungsaufgabe 9.40).

Beweis: Wegen Beispiel 9.33 (iii) sind die reellen Funktionen $I(x)$ für alle $x \in X$ stetig. Wegen der Dreiecksungleichung gilt für $x, y, z \in X$

$$\begin{aligned} &|d(x,z) - d(y,z)| = \max\{d(x,z) - d(y,z), d(y,z) - d(x,z)\} \leq \\ &\qquad \leq \max\{d(x,y) + d(y,z) - d(y,z), d(y,x) + d(x,z) - d(x,z)\} = d(x,y) \quad \text{und} \\ &d(x,y) = d(x,y) - d(y,y) \leq d(I(x), I(y)) = \sup\{|d(x,z) - d(y,z)| \mid z \in X\} \leq d(x,y). \end{aligned}$$

Mit $I(x_0) = 0$ und $y = x_0$ folgt $\|I(x)\|_\infty = d(x, x_0)$ und $I(x) \in C_b(X, \mathbb{R})$. Also ist I eine isometrische Abbildung. Sei $J \in \overline{I[X]}$ und $f : X \to Y$ eine gleichmäßig stetig Abbildung in einen vollständigen metrischen Raum Y. Für jedes $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass $d(f(x), f(y)) < \frac{\epsilon}{2}$ aus $d(x, y) < 2\delta$ folgt. Insbesondere haben alle Elemente von $\{f(x) \in Y \mid x \in X \text{ mit } d(I(x), J) < \delta\}$ paarweise einen Abstand kleiner als ϵ. Deshalb bildet f alle Folgen in X, deren Bilder unter I gegen J konvergieren, auf Cauchyfolgen in Y ab, die alle gegen das gleiche Element von Y konvergieren. Dieses definiert $g(J)$. Für $K \in B(J, \delta) \cap \overline{I[X]}$ gibt es $x \in I^{-1}[B(J, \frac{\delta}{2})] \cap f^{-1}[B(g(J), \frac{\epsilon}{4})]$ und $y \in I^{-1}[B(K, \frac{\delta}{2})] \cap f^{-1}[B(g(K), \frac{\epsilon}{4})]$. Wegen $d(x, y) < 2\delta$ und $d(g(J), g(K)) \leq d(g(J), f(x)) + d(f(x), f(y)) + d(f(y), g(K)) < \epsilon$ ist g gleichmäßig stetig. **q.e.d.**

Satz 9.48. *(Satz von Stone–Weierstraß) Sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum und $A \subset C_b(X, \mathbb{R})$ eine Unteralgebra, die die konstanten Funktionen enthält und die Punkte trennt, d.h. für alle $x \neq y \in X$ gibt es $f \in A$ mit $f(x) \neq f(y)$. Dann ist der Abschluss von A gleich $C_b(X, \mathbb{R})$.*

Lemma 9.49. *Auf* $[0,1] \subset \mathbb{R}$ *konvergiert die induktiv definierte Folge von Polynomen* $p_{n+1}(x) = p_n(x) + \frac{1}{2}(x - p_n^2(x))$ *mit* $p_0 = 0$, *gleichmäßig gegen die Funktion* $x \mapsto \sqrt{x}$.

Beweis : Wir zeigen zunächst mit vollständiger Induktion, dass $0 \le p_n(x) \le p_{n+1}(x)$ und $0 \le p_n^2(x) \le x$ für $x \in [0,1]$ und alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt. Beides ist für $n = 0$ offensichtlich.

$$\begin{aligned} x - p_{n+1}^2(x) &= x - p_n^2(x) - p_n(x)\left(x - p_n^2(x)\right) - \tfrac{1}{4}\left(x - p_n^2(x)\right)^2 \\ &= (x - p_n^2(x))\left(1 - p_n(x) - \tfrac{1}{4}(x - p_n^2(x))\right) \\ &= (x - p_n^2(x))\left(\left(1 - \tfrac{1}{2}p_n(x)\right)^2 - \tfrac{x}{4}\right) \end{aligned}$$

Aus der Induktionsvoraussetzung folgt $0 \le p_n(x) \le 1$, also $\frac{1}{2} \le 1 - \frac{p_n(x)}{2} \le 1$ und $(1 - \frac{p_n(x)}{2})^2 \ge \frac{1}{4} \ge \frac{x}{4}$. Das zeigt die Induktion. Also ist $(p_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0}$ für $x \in [0,1]$ monoton wachsend mit $0 \le p_n^2(x) \le x$. Dann gilt $(1 - \frac{p_n(x)}{2})^2 - \frac{x}{4} \le 1 - \frac{x}{4}$ und deshalb $0 \le x - p_n^2(x) \le x \cdot \left(1 - \frac{x}{4}\right)^n$. Wegen $\frac{1}{1-\frac{x}{4}} = \sum_{n=0}^{\infty}(\frac{x}{4})^n \ge 1 + \frac{x}{4}$ folgt dann aus der Bernoulli Ungleichung $\frac{1}{(1-\frac{x}{4})^n} \ge 1 + \frac{nx}{4}$ und $0 \le x - p_n^2(x) \le \frac{x}{1+\frac{nx}{4}} < \frac{4}{n}$. Also konvergiert $(p_n^2(x))_{n\in\mathbb{N}}$ auf $x \in [0,1]$ gleichmäßig gegen x. Die Funktion $[0,1] \to [0,1], \quad x \mapsto \sqrt{x}$ ist die Umkehrfunktion von $[0,1] \to [0,1], \quad x \mapsto x^2$. Weil die zweite Funktion stetig ist, ist wegen Korollar 5.18 die erste stetig und wegen Satz 5.22 sogar gleichmäßig stetig. Dann konvergiert die Folge $(p_n(x) = \sqrt{p_n^2(x)})_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen $\sqrt{x}$. **q.e.d.**

Beweis des Satzes von Stone–Weierstraß: Wegen Lemma 9.49 gibt es eine Folge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Polynomen, die auf $[0,1]$ gleichmäßig gegen $x \mapsto \sqrt{x}$ konvergieren. Für jedes $f \in A \setminus \{0\}$ konvergiert dann $(p_n(\frac{f^2}{\|f\|_\infty^2}))_{n\in\mathbb{N}}$ in $C_b(X,\mathbb{R})$ gegen $\sqrt{(\frac{f}{\|f\|_\infty})^2}$. Also gehört $|f| = \|f\|_\infty\sqrt{(\frac{f}{\|f\|_\infty})^2}$ zu dem Abschluss $\bar{A}$ von A. Aus Korollar 2.20 folgt mit $\||f| - |g|\|_\infty \le \|f - g\|_\infty$ für alle $f, g \in C_b(X,\mathbb{R})$ die Stetigkeit von $f \mapsto |f|$. Wegen der Stetigkeit von $+$ und $\cdot$ ist $\bar{A}$ eine Algebra mit $|f| \in \bar{A}$ für $f \in \bar{A}$. Für $f, g \in \bar{A}$ gehören

$$\max(f,g) = \tfrac{1}{2}(f + g + |f - g|) \quad \text{und} \quad \min(f,g) = \tfrac{1}{2}(f + g - |f - g|)$$

zu $\bar{A}$. Weil A die Punkte von X trennt, gibt es für alle $x \ne y \in X$ und alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ein Element $f \in A$ mit $f(x) = \alpha$ und $f(y) = \beta$. Sei nämlich g eine Funktion mit $g(x) \ne g(y)$. Dann ist $f = \alpha + \frac{\beta-\alpha}{g(y)-g(x)}(g - g(x))$ eine solche Funktion.

Sei jetzt $f \in C_b(X,\mathbb{R})$ eine fest vorgegebene Funktion und $\epsilon > 0$. Dann gibt es für alle $x, y \in X$ eine Funktion $g_{x,y} \in \bar{A}$ die bei x und y mit f übereinstimmt. Dann gibt es ein $\delta_{x,y} > 0$, so dass $g_{x,y}(z) < f(z) + \epsilon$ für alle $z \in B(y, \delta_{x,y})$ gilt. Durch Übergang zu einer endlichen Teilüberdeckung von $\{B(y, \delta_{x,y}) \mid y \in X\}$ und dem Minimum der entsprechenden Funktionen $g_{x,y} \in \bar{A}$ gibt es eine Funktion $g_x \in \bar{A}$, die $g_x(x) = f(x)$ und $g_x < f + \epsilon$ erfüllt. Wegen der Stetigkeit von f und g_x gibt es für alle $x \in X$ ein $\delta_x > 0$, so dass $f(y) - \epsilon < g_x(y)$ für alle $y \in B(x, \delta_x)$ gilt. Durch Übergang zu einer endlichen Teilüberdeckung von $\{B(x, \delta_x) \mid x \in X\}$ und dem Maximum der entsprechenden Funktionen g_x finden wir schließlich eine Funktion g in $\bar{A}$, die $f - \epsilon < g < f + \epsilon$ auf X erfüllt. Weil ϵ beliebig ist folgt $f \in \bar{A}$. **q.e.d.**

Für jeden metrischen Raum X besitzt die Algebra $C_b(X, \mathbb{C})$ folgende komplexe Konjugation, die jedes $f \in C_b(X, \mathbb{C})$ auf $\bar{f} \in C_b(X, \mathbb{C}$, mit $\bar{f}(x) = \overline{f(x)}$ abbildet. Diese Abbildung ist ein Algebrahomomorphismus, d.h. sie ist linear und erhält das Produkt.

Korollar 9.50. *Sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum und $A \subset C_b(X, \mathbb{C})$ eine Unteralgebra, die die konstanten Funktionen und für jedes $f \in A$ auch die komplex konjugierte Funktion $\bar{f} \in A$ enthält und die Punkte trennt, d.h. für alle $x \neq y \in X$ gibt es $f \in A$ mit $f(x) \neq f(y)$. Dann ist der Abschluss von A gleich $C_b(X, \mathbb{C})$.*

Beweis*: Jedes $f \in A$ ist die Summe einer reellen Funktion $\frac{1}{2}(f + \bar{f}) \in A$ und des Produktes von $\imath$ mit einer reellen Funktion $\frac{\imath}{2}(\bar{f} - f) \in A$. Also folgt die Aussage aus dem Satz von Stone-Weierstraß. **q.e.d.**

Satz 9.51*. *(Satz von Dini) Auf einem kompakten metrischen Raum (X, d) konvergiert eine monotone Funktionenfolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von stetigen reellen Funktionen gleichmäßig, wenn sie punktweise gegen eine stetige Funktion f konvergiert.*

Beweis*: Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge in $C_b(X, \mathbb{R})$, die punktweise gegen $f \in C_b(X, \mathbb{R})$ konvergiert. Dann gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ und $x \in X$ ein $n(x) \in \mathbb{N}$, so dass $f(x) - f_{n(x)}(x) < \frac{\epsilon}{3}$ gilt. Da $f_{n(x)}$ und f stetig sind gibt es ein $\delta(x)$, so dass

$$|f_{n(x)}(x) - f_{n(x)}(y)| < \tfrac{\epsilon}{3} \quad \text{und} \quad |f(x) - f(y)| < \tfrac{\epsilon}{3} \quad \text{für alle } y \in B(x, \delta(x)) \text{ gilt.}$$

Dann gilt dort auch $f(y) - f_{n(x)}(y) < \epsilon$. Wähle eine endliche Teilüberdeckung von $\{B(x, \delta(x)) \mid x \in X\}$. Dann gilt für $m \geq$ Maximum der entsprechenden $n(x)$

$$f(y) - f_m(y) \leq f(y) - f_{n(x)}(y) < \epsilon$$

auf den Mengen der Teilüberdeckung. Das zeigt die gleichmäßige Konvergenz. **q.e.d.**

Definition 9.52. *(relativkompakt) Eine Teilmenge eines metrischen Raumes heißt relativkompakt, wenn der Abschluss kompakt ist.*

Lemma 9.53*. *Eine Teilmenge A eines metrischen Raumes (X, d) ist genau dann relativkompakt, wenn jede Folge in A eine in X konvergente Teilfolge besitzt.*

Beweis*: Wenn A relativkompakt ist, dann besitzt wegen Satz 9.24 jede Folge in A eine konvergente Teilfolge, deren Grenzwert in $\bar{A}$ liegt. Hat umgekehrt jede Folge in A eine konvergente Teilfolge, dann gibt es wegen Lemma 9.19 für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\bar{A}$ auch eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in A mit $d(x_n, a_n) < \frac{1}{n}$. Dann konvergiert die jeder konvergenten Teilfolge von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ entsprechende Teilfolge von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen den gleichen Grenzwert wie die entsprechende Teilfoge von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Wegen Satz 9.24 ist dann $\bar{A}$ kompakt. **q.e.d.**

Satz 9.54. *(Arzela–Ascoli) Sei X ein kompakter und Y ein vollständiger metrischer Raum. Eine Teilmenge $\mathcal{F} \subset C_b(X,Y)$ ist genau dann relativkompakt, wenn*

(i) *für jedes $x \in X$ die Menge $\{f(x) \mid f \in \mathcal{F}\}$ relativkompakt ist, und*

(ii) *für jedes $x \in X$ die Menge $\mathcal{F}$ gleichgradig stetig ist in x, d.h. für jedes $x \in X$ und jedes $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit $f(x') \in B(f(x), \epsilon)$ für alle $x' \in B(x, \delta), f \in \mathcal{F}$.*

Beweis*: Zunächst zeigen wir, dass aus (i) und (ii) folgt, dass $\mathcal{F}$ relativkompakt ist. Dafür zeigen wir zuerst, dass $\mathcal{F}$ wegen (ii) sogar gleichmäßig gleichgradig stetig ist. Für jedes $\epsilon > 0$ und jedes $y \in X$ gibt es wegen (ii) ein $\delta_y > 0$, so dass $d(f(x), f(y)) < \frac{\epsilon}{2}$ für alle $f \in \mathcal{F}$ aus $d(x, y) < 2\delta_y$ folgt. Wegen der Kompaktheit von X hat die Überdeckung $\{B(y, \delta_y) \mid y \in X\}$ eine endliche Teilüberdeckung $X = B(y_1, \delta_1) \cup \ldots \cup B(y_N, \delta_N)$. Sei δ das Minimum von $\delta_1, \ldots, \delta_N$. Dann enthält für alle Paare $x, x' \in X$ mit $d(x, x') < \delta$ einer der Bälle $B(y_1, \delta_1), \ldots, B(y_N, \delta_N)$ den einen Punkt x. Damit sind beide in einem der Bälle $B(y_1, 2\delta_1), \ldots, B(y_N, 2\delta_N)$ enthalten. Daraus folgt $d(f(x), f(x')) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$ für alle $f \in \mathcal{F}$. Also ist $\mathcal{F}$ auf ganz X gleichmäßig gleichgradig stetig.

Wir zeigen jetzt, dass eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{F}$ eine in $C_b(X,Y)$ konvergente Teifolge besitzt. Sei $(x_l)_{l\in\mathbb{N}}$ eine Abzählung der Zentren von Überdeckungen von X durch Bälle mit Radien $(\frac{1}{m})_{m\in\mathbb{N}}$. Wegen (i) ist für alle $l \in \mathbb{N}$ der Abschluss $A_l = \overline{\{f_n(x_l) \mid n \in \mathbb{N}\}}$ kompakt. Wir definieren induktiv eine Teilfolge von $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und eine Folge $(a_l)_{l\in\mathbb{N}}$ in Y. Zuerst wählen wir einen Häufungspunkt a_1 und eine Teilfolge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so dass $d(g_n(x_1), a_1) \leq \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Induktiv wählen wir für jedes $L \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ einen Häufungspunkt a_L von $(g_n(x_L))_{n\in\mathbb{N}}$ und ersetzen alle Folgenglieder von $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit Indizes $\geq L$ durch eine Teilfolge von $(g_n)_{n\geq L}$, so dass $d(g_n(x_L), a_L) < \frac{1}{n}$ für alle $n \geq L$ gilt. Dann gilt $d(g_n(x_l), a_l) < \frac{1}{n}$ für alle $l = 1, \ldots, L$ und $n \geq l$.

Weil $\mathcal{F}$ gleichmäßig gleichgradig stetig ist, gibt es für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass $d(g_n(x), g_n(x')) < \frac{\epsilon}{3}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x, x' \in X$ mit $d(x, x') < \delta$ gilt. Die Zentren der Bälle $(B(x_l, \delta))_{l\in\mathbb{N}}$ sind so gewählt, dass die Bälle X überdecken. Sei L das Maximum der Indices einer endlichen Teilüberdeckung. Für alle $m, n \geq \max\{\frac{6}{\epsilon}, L\}$ folgt zuerst

$$d(g_m(x_l), g_n(x_l)) \leq d(g_m(x_l), a_l) + d(a_l, g_n(x_l)) < \tfrac{\epsilon}{3}, \quad \text{und dann}$$

$$d(g_m(x), g_n(x)) \leq d(g_m(x), g_m(x_l)) + d(g_m(x_l), g_n(x_l)) + d(g_n(x_l), g_n(x)) < \tfrac{\epsilon}{3} + \tfrac{\epsilon}{3} + \tfrac{\epsilon}{3} = \epsilon$$

für alle $x \in X$ und dem entsprechnden x_l. Also ist $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $C_b(X,Y)$ eine Cauchyfolge, die wegen (i) in $B(X,Y)$ konvergiert. Wegen Satz 9.46 liegt der Grenzwert in $C_b(X,Y)$.

Wenn umgekehrt $\mathcal{F}$ relativkompakt ist, dann besitzt wegen Lemma 9.53 mit jeder Folge in $\mathcal{F}$ für jedes $x \in X$ auch die Folge der entsprechenden Funktionswerte eine konvergente Teilfolge. Also erfüllt $\mathcal{F}$ die Bedingung (i).

Außerdem gibt es für jedes $x \in X$ und $\epsilon > 0$ endlich viele $f_1, \ldots, f_k$ im Abschluss von $\mathcal{F}$, so dass $B(f_1, \frac{\epsilon}{3}) \cup \ldots \cup B(f_k, \frac{\epsilon}{3})$ den Abschluss von $\mathcal{F}$ überdeckt. Weil $f_1, \ldots, f_k$ stetig sind, gibt es $\delta_1, \ldots, \delta_k > 0$, so dass $f_i(x') \in B(f_i(x), \frac{\epsilon}{3})$ für $i = 1, \ldots, k$ aus $x' \in B(x, \delta_i)$ folgt. Für alle $x' \in B(x, \min\{\delta_1, \ldots, \delta_k\})$ und $f \in \mathcal{F}$ gibt es ein f_i mit

$$d(f(x'), f(x)) \leq d(f(x'), f_i(x')) + d(f_i(x'), f_i(x)) + d(f_i(x), f(x)) < \tfrac{\epsilon}{3} + \tfrac{\epsilon}{3} + \tfrac{\epsilon}{3} = \epsilon. \quad \textbf{q.e.d.}$$

9.5 Lineare Operatoren

Die Ableitung einer Funktion von mehreren Veränderlichen ist eine lineare Abbildung. Zur Vorbereitung der Differentialrechnung von Funktionen mehrerer Veränderlicher behandeln wir in diesem Abschnitt solche linearen Abbildungen zwischen normierten Vektorräumen. Dabei betrachten wir wieder Vektorräume über dem Körper $\mathbb{K}$.

Definition 9.55. *Eine Abbildung $A : V \to W$ von einem Vektorraum V in einen Vektorraum W heißt linear, wenn für alle $v, w \in V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt*

$$A(v+w) = Av + Aw \quad \textit{und} \quad A(\lambda v) = \lambda Av.$$

Satz 9.56. *Seien V und W normierte Vektorräume und $A : V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann ist folgendes äquivalent:*

(i) *A ist stetig in 0.*

(ii) *A ist stetig.*

(iii) *A ist gleichmäßig stetig.*

(iv) *Es gibt ein $C > 0$, so dass für alle $v \in V$ gilt $\|Av\| \leq C\|v\|$.*

(v) *A ist auf $B(0,1)$ beschränkt, d.h. $\|Av\| \leq C$ für alle $\|v\| < 1$ mit $0 < C < \infty$.*

Beweis:(i)⇒(v): Wenn A in 0 stetig ist, dann enthält das Urbild jedes Balles $B(0,\epsilon) \subset W$ einen Ball $B(0,\delta) \subset V$. Also gibt es ein $\delta > 0$, so dass $\|Av\| < 1$ aus $\|v\| < \delta$ folgt. Wegen der Linearität folgt dann $\|Av\| = \frac{1}{\delta}\|A\delta v\| < \frac{1}{\delta}$ aus $\|v\| < 1$. Also ist (v) erfüllt.
(v)⇒(iv): Wegen der Linearität folgt aus (v), dass für alle $v \in V$ gilt

$$\|Av\| = A\left(2\|v\| \cdot \frac{v}{2\|v\|}\right) = 2\|v\| \cdot A\left(\frac{v}{2\|v\|}\right) \leq 2C\|v\|.$$

(iv)⇒(iii): Für $v, w \in V$ folgt $\|Av - Aw\| = \|A(v-w)\| \leq C\|v-w\|$ aus (iv). Also ist A sogar lipschitzstetig mit Lipschitzkonstante C. Dann gilt auch (iii).
(iii)⇒(ii) und (ii)⇒(i): Sind offensichtlich. **q.e.d.**

Satz 9.57. *Jede lineare Abbildung A von $\mathbb{K}^n$ in einen normierten Vektorraum ist stetig.*

Beweis: Wir benutzen wieder die Basis $e_1, \ldots, e_n$ von $\mathbb{K}^n$. Dann gilt für alle $v \in \mathbb{K}^n$

$$\|Av\| \leq |v_1| \cdot \|Ae_1\| + \ldots + |v_n| \cdot \|Ae_n\| \qquad \leq \|v\|_1 \max\{\|Ae_1\|, \ldots, \|Ae_n\|\}.$$

Also folgt die Aussage aus Satz 9.37 und Satz 9.56. **q.e.d.**

Definition 9.58. *Seien V, W normierte Vektorräume. Dann sei $\mathcal{L}(V,W)$ die Menge aller linearen stetigen Abbildungen von V nach W zusammen mit den Abbildungen:*

$$\begin{aligned} +: \ & \mathcal{L}(V,W)\times\mathcal{L}(V,W)\to\mathcal{L}(V,W), && (A,B)\mapsto A+B: && V\to W, && v\mapsto Av+Bv \\ \cdot: \ & \mathbb{K}\times\mathcal{L}(V,W)\to\mathcal{L}(V,W), && (\lambda,A)\mapsto\lambda A: && V\to W, && v\mapsto\lambda Av \end{aligned}$$

$$\|\cdot\|:\mathcal{L}(V,W)\to\mathbb{R},\ A\mapsto\|A\|=\sup\{\|Av\|\mid v\in B(0,1)\}=\sup\{\|Av\|\mid v\in\overline{B(0,1)}\}.$$

Für $w\in\overline{B(0,1)}$ gilt nämlich $\|Aw\|=\lim\limits_{\lambda\uparrow 1}\lambda\|Aw\|=\lim\limits_{\lambda\uparrow 1}\|A\lambda w\|\leq\sup\{\|Av\|\mid v\in B(0,1)\}$.

Satz 9.59. *$\mathcal{L}(V,W)$ ist ein normierter Untervektorraum von $C_b(\overline{B(0,1)},W)$.*

Beweis: Wegen Satz 9.56 $\mathcal{L}(V,W)$ ist die Menge aller linearen Abbildungen $A:V\to W$, deren Einschränkungen $A|_{\overline{B(0,1)}}$ in $C_b(\overline{B(0,1)},W)$ liegen. Aus der Linearität zweier solcher Abbildungen A und B folgt die Linearität von $A+B$ und $\lambda\cdot A$ für $\lambda\in\mathbb{K}$. Für jeden linearen Operator $A\in\mathcal{L}(V,W)$ und $v\in V\setminus\{0\}$ gilt $Av=\|v\|\cdot A(\frac{v}{\|v\|})$. Also ist A durch seine Werte auf $\overline{B(0,1)}$ eindeutig bestimmt und die Norm von $\mathcal{L}(V,W)$ ist einfach die Supremumsnorm der stetigen Abbildung von $\overline{B(0,1)}$ nach W. Also ist $\mathcal{L}(V,W)$ ein normierter Untervektorraum von $C_b(\overline{B(0,1)},W)$. **q.e.d.**

Offenbar gilt $\|A\|=\sup\left\{\frac{\|Av\|}{\|v\|}\mid v\in V\setminus\{0\}\right\}$ für $A\in\mathcal{L}(V,W)$ und $\|Av\|\leq\|A\|\cdot\|v\|$ für alle $v\in V$. Aus der Konvergenz einer Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{L}(V,W)$ folgt also die gleichmäßige Konvergenz auf $\overline{B(0,1)}$ und die punktweise Konvergenz auf V. Für $V=\mathbb{K}^n$ ist der Abschluss der Einheitskugel $\overline{B(0,1)}=\{v\in\mathbb{K}^n\mid\|v\|\leq 1\}$ kompakt. Deshalb gibt es also für jedes $A\in\mathcal{L}(\mathbb{K}^n,W)$ ein $v\in\mathbb{K}^n\setminus\{0\}$ mit $\|A\|=\|A\frac{v}{\|v\|}\|=\frac{\|Av\|}{\|v\|}$.

Satz 9.60. *Seien V ein normierter Vektorraum und W ein Banachraum. Dann ist $\mathcal{L}(V,W)$ ein Banachraum.*

Beweis: Wir müssen wegen Satz 9.46 (ii)-(iii) und Satz 9.59 nur zeigen, dass $\mathcal{L}(V,W)$ in $C_b(\overline{B(0,1)},W)$ abgeschlossen ist. Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $\mathcal{L}(V,W)$. Für jedes $v\in V$ ist $(A_nv)_{n\in\mathbb{N}}$ wegen $\|(A_n-A_m)v\|\leq\|A_n-A_m\|\cdot\|v\|$ eine Cauchyfolge in W. Der Grenzwert von $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $C_b(\overline{B(0,1)},W)$ setzt sich zu folgender Abbildung fort:

$$A:V\to W,\quad v\mapsto Av=\lim_{n\to\infty}A_nv\quad\text{für alle } v\in V.$$

Wir müssen nur noch zeigen, dass A linear ist. Aus der Linearität von A_n folgt

$$\begin{aligned} &\|A(v+w)-(Av+Aw)\|\leq\\ &\leq\|(A-A_n)(v+w)-(A-A_n)v-(A-A_n)w))\|+\|A_n(v+w)-(A_nv+A_nw)\|\\ &\qquad\leq\|(A-A_n)(v+w)\|+\|(A-A_n)v\|+\|(A-A_n)w\|,\ \text{und}\\ &\|\lambda Av-A(\lambda v)\|\leq\|\lambda(A-A_n)v-(A-A_n)(\lambda v)\|+\|\lambda A_nv-A_n(\lambda v)\|\\ &\qquad\leq|\lambda|\|(A-A_n)v\|+\|(A-A_n)(\lambda v)\|. \end{aligned}$$

für alle $n\in\mathbb{N}$ und alle $v,w\in V$. Im Grenzwert $n\to\infty$ konvergieren die rechten Seiten für alle $v,w\in V$ und $\lambda\in\mathbb{K}$ punktweise gegen Null, so dass A linear ist. **q.e.d.**

Satz 9.61. *Seien U, V und W normierte Vektorräume und $A \in \mathcal{L}(U,V)$ und $B \in \mathcal{L}(V,W)$, dann ist $B \circ A \in \mathcal{L}(U,W)$ und es gilt $\|B \circ A\| \leq \|B\| \cdot \|A\|$. Insbesondere ist die Abbildung $\circ : \mathcal{L}(U,V) \times \mathcal{L}(V,W) \to \mathcal{L}(U,W), \quad (A,B) \mapsto B \circ A$ stetig.*

Beweis: Für alle $u \in U$ gilt $\|(B \circ A)u\| \leq \|B\| \cdot \|Au\| \leq \|B\| \cdot \|A\| \cdot \|u\|$. Also folgt die Ungleichung $\|B \circ A\| \leq \|B\| \cdot \|A\|$ aus Satz 9.56. Für zwei normierte Vektorräume V, W mit Normen $\|\cdot\|_V$ und $\|\cdot\|_W$ ist

$$\|\cdot\|_{V\times W} : V \times W \to \mathbb{R}, \quad (v,w) \mapsto \|v\|_V + \|w\|_W$$

eine Norm auf $V \times W$ und induziert die Metrik des kartesischen Produktes der metrischen Räume V und W. Für $(A,B),(A',B') \in \mathcal{L}(U,V) \times \mathcal{L}(V,W)$ gilt dann

$$\begin{aligned}
\|B \circ A - B' \circ A'\| &= \|B \circ A - B \circ A' + B \circ A' - B' \circ A'\| \\
&= \|B \circ (A - A') + (B - B') \circ A'\| \\
&\leq \|B\| \cdot \|A - A'\| + \|B - B'\| \cdot \|A'\| \\
&\leq (\|A - A'\| + \|B - B'\|)(\|B\| + \|A'\|) \\
&\leq (\|A - A'\| + \|B - B'\|)(\|B\| + \|A\| + \|A' - A\|) \\
&\leq (\|(A,B) - (A',B')\|(\|B\| + \|A\| + \|(A,B) - (A',B')\|).
\end{aligned}$$

Also ist diese Abbildung im Punkt $(A,B) \in \mathcal{L}(U,V) \times \mathcal{L}(V,W)$ stetig. **q.e.d.**

Wir bezeichnen die Komposition $B \circ A$ von linearen Operatoren auch mit BA.

Definition 9.62. *Auf einem normierten Vektorraum V ist $\mathcal{L}(V) = \mathcal{L}(V,V)$ mit*

$$\circ : \mathcal{L}(V) \times \mathcal{L}(V) \to \mathcal{L}(V), \quad (A,B) \mapsto AB \quad \textit{und} \quad \|\cdot\| : \mathcal{L}(V) \to \mathbb{R}, \quad A \mapsto \|A\|$$

eine normierte Algebra mit Eins $\mathbb{1}_V$ und eine Banachalgebra für einen Banachraum V.

Satz 9.63. *(Neumannsche Reihe) Sei $\mathcal{A}$ eine Banachalgebra mit Eins $\mathbb{1}$ und $A \in \mathcal{A}$ ein Operator mit $\|A\| < 1$. Dann ist $\mathbb{1} - A$ invertierbar und es gilt $(\mathbb{1} - A)^{-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} A^n$.*

Beweis: Wegen $\|A^n\| \leq \|A\|^n$ ist $\left(\sum A^n\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ für $\|A\| < 1$ eine Cauchyfolge mit

$$\left\|\sum_{n=M}^{N} A^n\right\| \leq \sum_{n=M}^{N} \|A\|^n = \frac{\|A\|^M - \|A\|^{N+1}}{1 - \|A\|} \leq \frac{\|A\|^M}{1 - \|A\|} \text{ für } 0 \leq M \leq N.$$

Also konvergiert diese Reihe gegen ein $B \in \mathcal{A}$. Wie im Satz 9.61 ist wegen $\|B \cdot A\| \leq \|B\| \cdot \|A\|$ die Multiplikation $\cdot : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ stetig und es gilt

$$(\mathbb{1} - A)B = \sum_{n=0}^{\infty} A^n - \sum_{n=1}^{\infty} A^n = \mathbb{1} \qquad \text{und} \qquad B(\mathbb{1} - A) = \sum_{n=0}^{\infty} A^n - \sum_{n=1}^{\infty} A^n = \mathbb{1}.$$

Also ist $\sum_{n=0}^{\infty} A^n$ das Inverse von $\mathbb{1} - A$ mit $\left\|(\mathbb{1} - A)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}$. **q.e.d.**

Jede Potenzreihenfunktion $f(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} a_n x^n$ mit Konvergenzradius $R > 0$ definiert also auf jeder Banachalgebra $\mathcal{A}$ eine Abbildung

$$f : \{A \in \mathcal{A} \mid \|A\| < R\} \to \mathcal{A}, \quad A \mapsto f(A) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n A^n.$$

Viele der Aussagen, die wir für Potenzreihenfunktionen auf $\mathbb{K}$ gezeigt haben, lassen sich auf Potenzreihenfunktionen auf Banachalgebren $\mathcal{A}$ ausdehnen. Aber weil im allgemeinen $AB \neq BA$ für $A, B \in \mathcal{A}$, gilt im allgemeinen auch $\exp(A)\exp(B) \neq \exp(A + B)$.

Definition 9.64. *Eine Derivation einer Algebra $\mathcal{A}$ ist eine lineare Abbildung $D : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, die $D(A \cdot B) = D(A) \cdot B + A \cdot D(B)$ für alle $A, B \in \mathcal{A}$ erfüllt.*

Übungsaufgabe 9.65. (i) *Zeige, dass jedes Element A einer Algebra $\mathcal{A}$ folgende Derivation definiert:*

$$D_A : \mathcal{A} \to \mathcal{A}, \quad B \mapsto AB - BA$$

(ii) *Sei $\mathcal{A}$ eine Banachalgebra und $D \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$ eine Derivation von $\mathcal{A}$. Zeige dass* $\exp(D)$ *ein Algebraisomorphismus von $\mathcal{A}$ ist, d.h. ein invertierbares Element von*

$$\{C \in \mathcal{L}(\mathcal{A}) \mid C(A \cdot B) = C(A) \cdot C(B) \text{ für alle } A, B \in \mathcal{A}\}.$$

(iii) *Zeige* $\exp(D_A)B = \exp(A) \cdot B \cdot \exp(-A)$ *für alle A, B in einer Banachalgebra $\mathcal{A}$.*

In der Vorlesung Analysis III wird gezeigt, dass die Derivationen der Algebra $C^\infty(\mathbb{R})$ von der Form $f \mapsto gf'$ für ein $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ sind. Außerdem werden die entsprechenden Algebraisomorphismen bestimmt, soweit sie existieren.

In dem Buch L. Gillman, M. Jerison: "Rings of continuous functions" wird gezeigt, dass für jeden kompakten metrischen Raum X die einzigen Algebraisomorphismen von $C(X, \mathbb{R})$ von der Form $f \mapsto f \circ \Phi$ für einen Homöomorphismus $\Phi : X \to X$ sind. Daraus lässt sich folgern, dass $\mathcal{L}(C(X, \mathbb{R}))$ nur die triviale Derivation von $C(X, \mathbb{R})$ enthält.