

# Kapitel 12

## Das Lebesgueintegral auf dem $\mathbb{R}^d$

### 12.1 Treppenfunktionen

Zunächst führen wir die Quader im  $\mathbb{R}^d$  ein.

**Definition 12.1.** Ein Quader ist ein  $d$ -faches kartesisches Produkt von Intervallen

$$Q = I_1 \times \dots \times I_d = \{x \in \mathbb{R}^d \mid x_1 \in I_1, \dots, x_d \in I_d\} \subset \mathbb{R}^d.$$

Die Intervalle  $I_1, \dots, I_d \subset \mathbb{R}$  können den linken bzw. rechten Rand enthalten oder nicht und nur aus einem Punkt bestehen. Wenn  $I_1, \dots, I_d$  beschränkt sind heißt  $Q$  endlich.

Für jeden solchen Quader definieren wir das Volumen als das Produkt der Längen von  $I_1, \dots, I_d$ . Wir bezeichnen es mit  $\mu(Q)$ . Endliche Quader haben endliches Volumen.

**Definition 12.2.** Eine Teilmenge  $A \subset \mathbb{R}^d$  heißt Nullmenge, wenn es für jedes  $\epsilon > 0$  eine Folge von endlichen Quadern  $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  im  $\mathbb{R}^d$  gibt, mit

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mu(Q_n) \leq \epsilon.$$

**Beispiel 12.3.** Die Vereinigung von abzählbar vielen Quadern ohne Volumen ist eine Nullmenge. Insbesondere ist jede abzählbare Teilmenge von  $\mathbb{R}^d$  eine Nullmenge.

**Lemma 12.4.** Eine höchstens abzählbare Vereinigung von Nullmengen ist wieder eine Nullmenge.

**Beweis:** Sei  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$  eine höchstens abzählbare Vereinigung von Nullmengen. Dann besitzt für jedes  $\epsilon > 0$  jedes  $A_n$  eine Überdeckung von Quadern, deren gesamtes Volumen nicht größer ist als  $\epsilon \cdot 2^{-n}$ . Die höchstens abzählbare Vereinigung dieser jeweils höchstens abzählbar vielen Quader ist wegen Satz 2.40 eine höchstens abzählbare Menge von Quader mit einem Volumen nicht größer als  $\sum_{n=1}^{\infty} \epsilon 2^{-n} = \epsilon$ . Also wird  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$  von abzählbar vielen Quadern überdeckt, deren Volumen nicht größer ist als  $\epsilon$ . **q.e.d.**

**Definition 12.5.** Eine Treppenfunktion ist eine endliche Linearkombination von charakteristischen Funktionen von endlichen Quadern, d.h. der Funktionen, die bei Punkten innerhalb eines Quader gleich 1, und außerhalb des Quaders gleich 0 sind.

**Proposition 12.6.** Endlich viele Quader  $Q_i$  lassen sich so in endlich viele paarweise disjunkte Quader  $P_j$  zerlegen, so dass jeder  $Q_i$  eine Vereinigung von endlich vielen  $P_j$ 's ist. Jede Treppenfunktion ist eine endliche Linearkombination von charakteristischen Funktionen von paarweise disjunkten endlichen Quadern.

**Beweis:** Für endlich viele Intervalle  $I_1, \dots, I_n$  ordnen wir alle endlichen Intervallgrenzen der Reihe nach an  $-\infty < x_1 < \dots < x_m < \infty$ . Dadurch erhalten wir eine Zerlegung

$$\mathbb{R} = (-\infty, x_1) \cup \{x_1\} \cup (x_1, x_2) \cup \{x_2\} \cup \dots \cup (x_{m-1}, x_m) \cup \{x_m\} \cup (x_m, \infty)$$

von  $\mathbb{R}$  in endlich viele paarweise disjunkte Intervalle, so dass jedes der Intervalle  $I_1, \dots, I_n$  eine Vereinigung von endlich vielen dieser Intervalle ist. Für jeden Faktor des kartesischen Produktes sind durch  $n$  Quader  $Q_1, \dots, Q_n$  auch  $n$  Intervalle vorgegeben und damit auch eine solche Zerlegung von  $\mathbb{R}$ . Die kartesischen Produkte von jeweils einem dieser Intervalle aus den Zerlegungen aller  $d$  Faktoren des kartesischen Produktes bilden Quader, die paarweise disjunkt sind und deren Vereinigung gleich  $\mathbb{R}^d$  ist. Dabei ist jeder der Quader  $Q_1, \dots, Q_n$  eine Vereinigung von endlich vielen von diesen paarweise disjunkten Quadern. Eine endliche Linearkombination von  $\chi_{Q_1}, \dots, \chi_{Q_n}$  nimmt auf jedem dieser paarweise disjunkten Quader der Zerlegung genau einen Wert an und ist eine endliche Linearkombination von charakteristischen Funktionen von paarweise disjunkten endlichen Quadern. **q.e.d.**

Als nächstes wollen wir das Integral von Treppenfunktionen definieren. Zunächst definieren wir für jede charakteristische Funktion  $\chi_Q$  eines Quaders das Integral

$$\int \chi_Q d\mu = \mu(Q).$$

**Proposition 12.7.** Sei  $f$  eine Treppenfunktion und seien

$$f = \sum_i c_i \chi_{Q_i} = \sum_j d_j \chi_{R_j}$$

zwei Zerlegungen in endliche Linearkombinationen von charakteristischen Funktionen von endlichen Quadern. Dann gilt

$$\int f d\mu = \sum_i c_i \mu(Q_i) = \sum_j d_j \mu(R_j).$$

**Beweis:** Wir zerlegen alle diese endlichen Quader  $Q_i$  und  $R_j$  wie im vorangehenden Beweis beschrieben in endlich viele paarweise disjunkte endliche Quader  $P_k$ . Es folgt

$$f|_{P_k} = \sum_{\{i|Q_i \supset P_k\}} c_i = \sum_{\{j|R_j \supset P_k\}} d_j, \quad \chi_{Q_i} = \sum_{\{k|P_k \subset Q_i\}} \chi_{P_k}, \quad \chi_{R_j} = \sum_{\{k|P_k \subset R_j\}} \chi_{P_k}.$$

Hierbei sei die Summe über eine leere Menge gleich Null. Die Gesamtlänge einer disjunkten Vereinigung von Intervallen ist gleich der Summe der Intervalllängen. Wegen dem Distributivgesetz folgt dann

$$\begin{aligned} \mu(Q_i) &= \sum_{\{k|P_k \subset Q_i\}} \mu(P_k), \quad \mu(R_j) = \sum_{\{k|P_k \subset R_j\}} \mu(P_k), \\ \sum_i c_i \mu(Q_i) &= \sum_i c_i \sum_{\{k|P_k \subset Q_i\}} \mu(P_k) = \sum_k \sum_{\{i|Q_i \supset P_k\}} c_i \mu(P_k) \\ &= \sum_k \sum_{\{j|R_j \supset P_k\}} d_j \mu(P_k) = \sum_j d_j \sum_{\{k|P_k \subset R_j\}} \mu(P_k) = \sum_j d_j \mu(R_j). \quad \mathbf{q.e.d.} \end{aligned}$$

Wegen dieser Proposition definiert das Integral  $f \mapsto \int f d\mu$  eine lineare Abbildung von dem Raum aller Treppenfunktionen nach  $\mathbb{R}$ .

**Proposition 12.8.** *Seien  $f$  und  $g$  zwei Treppenfunktionen mit  $f \geq g$ . Dann gilt*

$$\int f d\mu \geq \int g d\mu.$$

**Beweis:** Wir zerlegen die beiden Vereinigungen von Quadern der Treppenfunktion  $f$  und der Treppenfunktion  $g$  in eine gemeinsame disjunkte Vereinigung von Quadern. Auf jedem der Quader ist  $f$  größer oder gleich  $g$ . Deshalb gilt das auch für die Summen, die die entsprechenden Integrale berechnen. **q.e.d.**

## 12.2 Lebesgueintegrale Funktionen auf dem $\mathbb{R}^d$

**Satz 12.9.** *Sei  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine monoton wachsende Folge von Treppenfunktionen, deren Integrale  $(\int f_n d\mu)_{n \in \mathbb{N}}$  beschränkt sind. Dann ist folgende Menge eine Nullmenge:*

$$\{x \in \mathbb{R}^d \mid (f_n(x))_{n \in \mathbb{N}} \text{ konvergiert nicht} \}.$$

**Beweis:** Sei  $M > 0$  eine obere Schranke von  $(\int (f_n - f_1) d\mu)_{n \in \mathbb{N}}$ :

$$\int (f_n - f_1) d\mu \leq M \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Dann bilden für alle  $\epsilon > 0$  und alle  $n \in \mathbb{N}$  die Mengen

$$S_{n,\epsilon} = \left\{ x \in \mathbb{R}^d \mid f_n(x) - f_1(x) \geq \frac{M}{\epsilon} \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R}^d \mid f_n(x) \geq \frac{M}{\epsilon} + f_1(x) \right\}$$

eine monoton wachsende Folge von endlichen Vereinigungen von Quadern. Aus der Konstruktion einer gemeinsamen Zerlegung in eine disjunkte Vereinigung von Quadern

im Beweis von Proposition 12.6 folgt, dass das relative Komplement eines Quaders in einem anderen Quader wieder eine disjunkte Vereinigung von Quadern ist. Dann ist

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} S_{n,\epsilon} = S_{1,\epsilon} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} (S_{n+1,\epsilon} \setminus S_{n,\epsilon})$$

eine abzählbare Vereinigung von disjunkten Quadern. Weil  $f_n - f_1$  nichtnegative Funktionen sind, ist  $\frac{\epsilon}{M}(f_n - f_1)$  größer oder gleich  $\chi_{S_{n,\epsilon}}$ . Also gilt für die Integrale

$$\int \chi_{S_{n,\epsilon}} d\mu \leq \int \frac{\epsilon}{M}(f_n - f_1) d\mu = \frac{\epsilon}{M} \int (f_n - f_1) d\mu \leq \epsilon.$$

Wegen der Monotonie ist dann auch das Gesamtvolumen der abzählbaren Vereinigung  $\bigcup_{n=1}^{\infty} S_{n,\epsilon}$  nicht größer als  $\epsilon$ . Weil die kritische Menge  $S$  gleich der Schnittmenge

$$S = \{x \in \mathbb{R}^d \mid (f_n(x))_{n \in \mathbb{N}} \text{ konvergiert nicht}\} = \bigcap_{\epsilon > 0} \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} S_{n,\epsilon} \right)$$

ist, folgt, dass diese Menge  $S$  eine Nullmenge ist.

**q.e.d.**

Die Komplemente von Nullmengen werden fast überall genannt (bzw. a.e. für almost everywhere). Also konvergiert jede monoton wachsende Folge von Treppenfunktionen mit beschränkten Integralen fast überall.

**Satz 12.10.** *Für jede Nullmenge  $A \subset \mathbb{R}^d$  gibt es eine monoton wachsende Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von Treppenfunktionen mit beschränkten Integralen  $(\int f_n d\mu)_{n \in \mathbb{N}}$ , so dass  $A$  in der Menge enthalten ist, auf der die Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  nicht konvergiert.*

**Beweis:** Sei  $A$  eine Nullmenge. Dann gibt es für jedes  $n \in \mathbb{N}$  eine Überdeckung von  $A$  mit abzählbar vielen Quadern, deren Gesamtvolumen nicht größer ist als  $2^{-n}$ . Sei nun  $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Abzählung der Vereinigung aller dieser Quader. Dann gehört jeder Punkt von  $A$  zu unendlich vielen Quadern. Also definiert die Reihe  $(\sum \chi_{Q_n})_{n \in \mathbb{N}}$  eine monoton wachsende Folge von Treppenfunktionen, die auf  $A$  nicht konvergiert. Die Integrale  $(\sum \int \chi_{Q_n} d\mu)_{n \in \mathbb{N}}$  sind beschränkt durch  $\sum_{n \in \mathbb{N}} 2^{-n} = 1$ . **q.e.d.**

Für jede monoton wachsende Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von Treppenfunktionen mit beschränkten Integralen  $(\int f_n d\mu)_{n \in \mathbb{N}}$  können wir jetzt den Grenzwert fast überall definieren:

$$f(x) = \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) & \text{wenn } (f_n(x))_{n \in \mathbb{N}} \text{ beschränkt ist} \\ 0 & \text{wenn } (f_n(x))_{n \in \mathbb{N}} \text{ nicht beschränkt ist.} \end{cases}$$

Wir wollen  $\int f d\mu$  als  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu$  definieren. Die folgenden Lemmata zeigen, dass diese Definition nur von der fast überall definierten Funktion  $f$  abhängt.

**Lemma 12.11.** *Sei  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine monoton fallende Folge von Treppenfunktionen, die fast überall gegen Null konvergiert. Dann ist  $(\int f_n d\mu)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Nullfolge.*

**Beweis:** Kein  $\int f_n d\mu$  kann kleiner Null sein, weil sonst  $f_n$  auf einem Quader mit positivem Volumen negativ ist und  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dort nicht gegen Null konvergiert. Offenbar gibt es einen kompakten Quader  $Q_0$  außerhalb dessen  $f_1$  verschwindet. Für jedes  $n \in \mathbb{N}$  sei  $A_n$  die Menge der Unstetigkeitsstellen von  $f_n$ , also der Punkte, an denen  $f_n$  lokal nicht konstant ist. Dann ist  $A_n$  in  $Q_0$  enthalten, und als eine endliche Vereinigung von Quadern ohne Volumen eine Nullmenge. Dann sind auch  $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$  und  $B = \{x \in \mathbb{R}^d \mid (f_n(x))_{n \in \mathbb{N}} \text{ konvergiert nicht gegen } 0\}$  Nullmengen. Für jedes  $\epsilon > 0$  gibt es eine Überdeckung  $\bigcup_{m=1}^{\infty} Q_m \supset (A \cup B)$  durch Quader, deren Gesamtvolumen nicht größer ist als  $\frac{\epsilon}{3}$ . Wir ersetzen die  $Q_m$  mit  $\mu(Q_m) > 0$  durch die größeren offenen Quader mit dem gleichen Mittelpunkt, deren Kanten um den Faktor  $\sqrt[d]{2}$  länger sind. Die  $Q_m$  mit  $\mu(Q_m) = 0$  ersetzen wir durch größere offene Quader mit Volumen  $\frac{\epsilon}{3} 2^{-m}$ . Dadurch erhalten wir auch eine solche Überdeckung  $\bigcup_{m=1}^{\infty} Q_m \supset (A \cup B)$  durch offene Quader, deren Gesamtvolumen nicht größer ist als  $\epsilon$ . Für jedes  $x \in Q_0 \setminus (A \cup B)$  gibt es ein  $N_x \in \mathbb{N}$  mit  $f_{N_x}(x) \leq \epsilon$ . Weil  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  monoton fallend ist, gilt  $f_n(x) \leq \epsilon$  für alle  $n \geq N_x$ . Weil alle  $f_{N_x}$  bei den Punkten von  $Q_0 \setminus (A \cup B)$  lokal konstant sind, gibt es eine offene Überdeckung von offenen Quadern  $(R_x)_{x \in Q_0 \setminus (A \cup B)}$  von  $Q_0 \setminus (A \cup B)$ , so dass  $f_n \leq \epsilon$  auf  $R_x$  für  $n \geq N_x$  gilt. Dann bilden  $(R_x)_{x \in Q_0 \setminus (A \cup B)}$  zusammen mit  $(Q_m)_{m \in \mathbb{N}}$  eine offene Überdeckung von  $Q_0$ . Weil  $Q_0$  kompakt ist, gibt es eine endliche Teilüberdeckung. Für größere  $n$  als die entsprechenden endlich vielen  $N_x$ 's, schätzen wir  $\int f_n d\mu$  ab durch

$$0 \leq \int f_n d\mu \leq \epsilon(\max\{f_1(x) \mid x \in Q_0\} + \mu(Q_0)).$$

Auf den Quadern  $(Q_m)_{m \in \mathbb{N}}$  schätzen wir dabei  $f$  durch  $\max\{f_1(x) \mid x \in Q_0\}$  ab und auf den endlich vielen der  $(R_x)_{x \in Q_0 \setminus (A \cup B)}$  durch  $\epsilon$ . Es folgt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu = 0$ . **q.e.d.**

**Lemma 12.12.** *Seien  $f$  und  $g$  fast überall definierte Grenzwerte von monoton wachsenden Folgen  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von Treppenfunktionen mit beschränkten  $(\int f_n d\mu)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(\int g_n d\mu)_{n \in \mathbb{N}}$ . Wenn fast überall  $f \geq g$  gilt, dann gilt auch*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \int g_n d\mu.$$

**Beweis:** Für jedes feste  $m \in \mathbb{N}$  erfüllen die Funktionenfolgen

$$((g_m - f_n)^+)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\frac{1}{2}(g_m - f_n + |g_m - f_n|)\right)_{n \in \mathbb{N}}$$

die Voraussetzungen von dem vorangehenden Lemma, weil fast überall  $g_m - f \leq g - f \leq 0$  gilt. Deshalb konvergieren die entsprechenden Integrale gegen Null. Wegen  $g_m - f_n \leq (g_m - f_n)^+$  folgt aus Proposition 12.8 und Lemma 12.11

$$\int g_m d\mu - \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu \leq 0 \quad \text{und damit auch} \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \int g_m d\mu \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu. \mathbf{q.e.d.}$$

Aus Lemma 12.12 folgt, dass wir das Integral auf die Grenzwerte von monoton wachsenden Folgen von Treppenfunktionen mit beschränkten Integralen konsistent fortsetzen können. Seien nämlich  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  monoton wachsenden Folgen von Treppenfunktionen mit beschränkten Integralen  $(\int f_n d\mu)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(\int g_n d\mu)_{n \in \mathbb{N}}$ , deren Grenzwerte fast überall übereinstimmen, dann können wir Lemma 12.12 sowohl auf diese Folge, als auch auf die vertauschten Folgen anwenden und erhalten

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \int g_n d\mu \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu.$$

**Definition 12.13.** Sei  $L^1(\mathbb{R}^d)$  die Menge der Äquivalenzklassen von fast überall definierten Funktionen  $f$ , für die es monoton wachsende Folgen  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von Treppenfunktionen mit beschränkten Integralen  $(\int g_n d\mu)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(\int h_n d\mu)_{n \in \mathbb{N}}$  gibt, und

$$f = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n - \lim_{n \rightarrow \infty} h_n$$

fast überall gilt. Hierbei werden zwei Funktionen miteinander identifiziert, wenn sie fast überall miteinander übereinstimmen.

**Satz 12.14.** (Eigenschaften der Lebesgueintegrierbaren Funktionen)

(i)  $L^1(\mathbb{R}^d)$  ist ein Vektorraum über  $\mathbb{R}$  und das Integral über Treppenfunktionen induziert eine lineare Abbildung

$$\int : L^1(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f \rightarrow \int f d\mu$$

(ii) Wenn  $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$  fast überall nicht negativ ist, dann gilt  $\int f d\mu \geq 0$ .

(iii) Wenn  $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ , dann ist auch  $|f| \in L^1(\mathbb{R}^d)$  mit  $\left| \int f d\mu \right| \leq \int |f| d\mu$ .

**Beweis:** (i) Seien  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(\tilde{g}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(\tilde{h}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  monoton wachsende Folgen von Treppenfunktionen mit beschränkten Integralen. Wenn die Grenzwerte

$$g(x) - h(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) - \lim_{n \rightarrow \infty} h_n(x)$$

fast überall mit den Grenzwerten von

$$\tilde{g}(x) - \tilde{h}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{g}_n(x) - \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{h}_n(x)$$

übereinstimmen, dann stimmen auch die Funktionen  $g(x) + \tilde{h}(x)$  und  $\tilde{g}(x) + h(x)$  fast überall überein und sind fast überall auch die Grenzwerte von

$$(g_n + \tilde{h}_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ bzw. } (\tilde{g}_n + h_n)_{n \in \mathbb{N}}.$$

Dann folgt aus Lemma 12.12

$$\int (g + \tilde{h}) d\mu = \int g d\mu + \int \tilde{h} d\mu = \int \tilde{g} d\mu + \int h d\mu = \int (\tilde{g} + h) d\mu.$$

Daraus folgt wegen der Linearität des Integrals

$$\int (g - h) d\mu = \int g d\mu - \int h d\mu = \int \tilde{g} d\mu - \int \tilde{h} d\mu = \int (\tilde{g} - \tilde{h}) d\mu.$$

Deshalb definiert  $\int$  eine Abbildung von  $L^1(\mathbb{R})$  nach  $\mathbb{R}$ . Die Linearität folgt aus den Rechenregeln für Folgen und der Linearität des Integrals auf Treppenfunktionen.

(ii) Wenn  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$  monoton wachsende Folgen von Treppenfunktionen mit beschränkten Integralen sind, so dass fast überall  $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n - \lim_{n \rightarrow \infty} h_n$  nichtnegativ ist, dann ist auch fast überall  $g = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} h_n = h$ . Aus Lemma 12.12 folgt dann  $\int g d\mu \geq \int h d\mu$  bzw.  $\int (g - h) d\mu \geq 0$ .

(iii) Sei  $f$  fast überall die Differenz  $g - h$  der Grenzwerte der monoton wachsenden Folgen  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von Treppenfunktionen mit beschränkten Integralen. Aus  $\min\{g_n, h_n\} \leq g_n \leq g_{n+1}$  und  $\min\{g_n, h_n\} \leq h_n \leq h_{n+1}$  folgt  $\min\{g_n, h_n\} \leq \min\{g_{n+1}, h_{n+1}\}$ , und aus  $\max\{g_{n+1}, h_{n+1}\} \geq g_{n+1} \geq g_n$  und  $\max\{g_{n+1}, h_{n+1}\} \geq h_{n+1} \geq h_n$  folgt  $\max\{g_{n+1}, h_{n+1}\} \geq \max\{g_n, h_n\}$ . Also sind  $(\tilde{g}_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\max\{g_n, h_n\})_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(\tilde{h}_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\min\{g_n, h_n\})_{n \in \mathbb{N}}$  monoton wachsende Folgen von Treppenfunktionen. Aus  $g_n \geq \min\{g_1, h_1\}$  und  $h_n \geq \min\{g_1, h_1\}$  folgt  $\tilde{h}_n \leq \tilde{g}_n \leq g_n - \min\{g_1, h_1\} + h_n - \min\{g_1, h_1\} + \min\{g_1, h_1\}$ . Also haben  $(\tilde{g}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(\tilde{h}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  beschränkte Integrale. Dann ist  $|f|$  fast überall die Differenz der entsprechenden Grenzwerte  $\tilde{g} - \tilde{h}$ . Deshalb ist  $|f| \in L^1(\mathbb{R}^d)$ . Wegen (ii) folgt dann aus  $-|f| \leq f \leq |f|$

$$-\int |f| d\mu \leq \int f d\mu \leq \int |f| d\mu \quad \text{bzw.} \quad \left| \int f d\mu \right| \leq \int |f| d\mu. \quad \mathbf{q.e.d.}$$

**Satz 12.15.** Eine beschränkte Funktion  $f$ , die außerhalb einer beschränkten Menge verschwindet und deren Unstetigkeitsstellen eine Nullmenge bilden, gehört zu  $L^1(\mathbb{R}^d)$ .

**Beweis:** Wir wählen einen Quader  $Q_0 = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_d, b_d]$ , außerhalb dessen  $f$  verschwindet. Wir zerlegen für alle  $n \in \mathbb{N}$  und alle  $i = 1, \dots, d$  das Intervall  $[a_i, b_i]$ :

$$[a_i, b_i] = \left[ a_i, a_i + \frac{b_i - a_i}{2^n} \right] \cup \left( a_i + \frac{b_i - a_i}{2^n}, a_i + 2 \frac{b_i - a_i}{2^n} \right) \cup \dots \cup \left( a_i + (2^n - 1) \frac{b_i - a_i}{2^n}, b_i \right].$$

Die kartesischen Produkte dieser Zerlegungen ergeben eine Zerlegung  $\mathcal{P}_n$  von  $Q_0$  in eine Vereinigung von  $2^{nd}$  paarweise disjunkten Quadern. Dann sei  $f_n$  die Treppenfunktion, die auf jedem der  $2^{nd}$  Quader gleich dem Infimum der entsprechenden Funktionswerte von  $f$  ist. Offenbar ist  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine monoton wachsende Folge von Treppenfunktionen, deren Integrale durch  $\|f\|_\infty \cdot \mu(Q_0)$  beschränkt sind. An allen Punkten  $x_0 \in \mathbb{R}^d$ , an denen  $f$  stetig ist, gibt es für jedes  $\epsilon > 0$  ein  $\delta > 0$ , so dass  $f(x) \in B(f(x_0), \epsilon)$  aus

$x \in B(x_0, \delta)$  folgt. Dann gibt es auch ein  $N \in \mathbb{N}$ , so dass der Durchmesser von  $Q_0$  kleiner ist als  $2^N \delta$ . Für alle  $n \geq N$  ist dann der Teilquader  $Q_n$  der  $2^{nd}$  Teilquader von  $Q$ , der  $x_0$  enthält, in  $B(x_0, \delta)$  enthalten. Deshalb gilt dann

$$f(x_0) - \epsilon \leq \inf_{x \in Q_n} f(x) = f_n(x_0) \leq f(x_0).$$

Also konvergiert  $(f_n(x_0))$  gegen  $f(x_0)$ . Weil die Menge der Unstetigkeitsstellen von  $f$  eine Nullmenge ist, konvergiert  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dann fast überall gegen  $f$ . **q.e.d.**

**Satz 12.16\*:** Sei  $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$  mit  $\int |f| d\mu = 0$ . Dann ist  $f$  fast überall gleich Null.

**Beweis\*:** Seien  $(\tilde{g}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(\tilde{h}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  monoton wachsende Folgen von Treppenfunktionen mit beschränkten Integralen, so dass fast überall gilt

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{g}_n(x) - \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{h}_n(x).$$

Für alle  $n \in \mathbb{N}$  seien  $g_n = \max\{\tilde{g}_n, \tilde{h}_n\}$  und  $h_n = \min\{\tilde{g}_n, \tilde{h}_n\}$ .

Dann gilt fast überall  $|f(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) - \lim_{n \rightarrow \infty} h_n(x)$ .

Wenn  $\int |f| d\mu = 0$  gilt also auch  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int g_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int h_n d\mu$ .

Für  $\epsilon, \delta > 0$  sei  $N \in \mathbb{N}$  so gewählt, dass  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int g_n d\mu - \int h_m d\mu \leq \epsilon \delta$ .

für alle  $m \geq N$  gilt. Wir definieren  $g$  als den fast überall definierten Grenzwert  $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n$ . Weil  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$  monoton wachsend sind, ist die Menge

$$\{x \in \mathbb{R}^d \mid |f(x)| > \delta\} \quad \text{in den Mengen}$$

$$\{x \in \mathbb{R}^d \mid g(x) - h_m(x) > \delta\} = \{x \in \mathbb{R}^d \mid g_n(x) - h_m(x) > \delta \text{ für ein } n \in \mathbb{N}\}$$

enthalten. Sei also  $A_1 = \{x \in \mathbb{R}^d \mid g_1(x) - h_m(x) > \delta\}$  und für  $n = 2, \dots$

$$A_n = \{x \in \mathbb{R}^d \mid g_n(x) - h_m(x) > \delta \text{ und } g_{n-1}(x) - h_m(x) \leq \delta\}. \quad \text{Dann gilt}$$

$$\{x \in \mathbb{R}^d \mid g(x) - h_m(x) > \delta\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\delta} \int (g_n - h_m) d\mu \leq \epsilon$$

für  $m \geq N$ . Also ist für alle  $\delta > 0$  die Menge  $\{x \in \mathbb{R}^d \mid g(x) - \lim_{m \rightarrow \infty} h_m(x) > \delta\}$  eine Nullmenge. Weil die abzählbare Vereinigung von Nullmengen wieder eine Nullmenge ist, folgt, dass die Menge  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x \in \mathbb{R}^d \mid g(x) - \lim_{m \rightarrow \infty} h_m(x) > \frac{1}{n}\}$  eine Nullmenge ist. Also ist fast überall  $g(x) \leq h(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} h_m(x)$ . Aufgrund der Konstruktion gilt aber fast überall  $g(x) \geq h(x)$ . Also ist fast überall  $|f(x)| = g(x) - h(x) = 0$ . **q.e.d.**



## 12.3 Das Riemann- und das Lebesgueintegral

In diesem Abschnitt setzen wir das Riemannintegral mit dem Lebesgueintegral in Beziehung setzen. Für  $d > 1$  sind die riemannintegrablen Funktionen  $f$  auf einem kompakten Quader  $Q_0$  dadurch charakterisiert, dass das Unterintegral, also das Supremum aller Integrale von Treppenfunktionen nicht größer als  $f$ , mit dem Oberintegral, also dem Infimum aller Integrale von Treppenfunktionen nicht kleiner als  $f$ , übereinstimmt. Damit sie nach oben und unten durch Treppenfunktionen beschränkt sind, müssen sie beschränkt sein. Zunächst charakterisieren wir die riemannintegrablen Funktionen.

**Satz 12.17.** (*Lebesguekriterium*) *Eine beschränkte Funktion auf einem kompakten Quader  $Q_0 = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_d, b_d]$  ist genau dann riemannintegabel, wenn ihre Unstetigkeitsstellen eine Nullmenge bilden. Insbesondere sind alle riemannintegrablen Funktionen auch lebesgueintegabel und die beiden Integrale stimmen überein.*

**Beweis:** Wir zerlegen für alle  $n \in \mathbb{N}$  und alle  $i = 1, \dots, d$  das Intervall  $[a_i, b_i]$ :

$$[a_i, b_i] = \left[ a_i, a_i + \frac{b_i - a_i}{2^n} \right] \cup \left( a_i + \frac{b_i - a_i}{2^n}, a_i + 2 \frac{b_i - a_i}{2^n} \right] \cup \dots \cup \left( a_i + (2^n - 1) \frac{b_i - a_i}{2^n}, b_i \right].$$

Das entspricht für  $d = 1$  der Partition  $p_n \in \mathcal{P}[a, b]$  aus dem Beweis von Korollar 8.24. Die kartesischen Produkte dieser Zerlegungen ergeben eine Zerlegung  $\mathcal{P}_n$  von  $Q_0$  in eine Vereinigung von  $2^{nd}$  paarweise disjunkte Quadern. Für alle  $f \in B(Q_0, \mathbb{R})$  seien

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \inf \{ f(y) \mid y \in Q \text{ mit } Q \in \mathcal{P}_n \text{ und } x \in Q \} \\ F_n(x) &= \sup \{ f(y) \mid y \in Q \text{ mit } Q \in \mathcal{P}_n \text{ und } x \in Q \} \end{aligned}$$

Dann sind  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$  monoton wachsende bzw. monoton fallende Folgen von Treppenfunktionen mit beschränkten Integralen. Im Beweis von Satz 12.15 haben wir gezeigt, dass  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  an den Punkten, an denen  $f$  stetig ist, gegen  $f$  konvergiert. Dort konvergiert auch  $(-F_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gegen  $-f$ , und deshalb  $(F_n - f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gegen Null. Wenn die Unstetigkeitsstellen von  $f$  also eine Nullmenge bilden, dann konvergiert wegen Lemma 12.12  $(\int (F_n - f_n) d\mu)_{n \in \mathbb{N}}$  gegen Null und  $f$  ist riemannintegabel.

Wenn umgekehrt  $f$  riemannintegabel ist, dann gibt es zwei Folgen von Treppenfunktionen nicht kleiner bzw. nicht größer als  $f$ , deren Integrale gegen die gleiche Zahl konvergieren. Die Minima bzw. Maxima der jeweils ersten  $n$  Folgenglieder dieser Folgen definieren eine monoton fallende Folge  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von Treppenfunktionen mit beschränkten Integralen bzw. monoton wachsende Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von Treppenfunktionen mit beschränkten Integralen, so dass der Grenzwert von  $(\int F_n d\mu)_{n \in \mathbb{N}}$  nicht größer ist der von  $(\int f_n d\mu)_{n \in \mathbb{N}}$ . Die Differenz  $(F_n - f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist dann eine monoton fallende Folge von nichtnegativen Treppenfunktionen, deren Integrale gegen Null konvergieren. Wegen Satz 12.16 (siehe auch Korollar 12.23) konvergieren dann beide Folgen fast überall gegen die gleiche Funktion  $f$ . Die Unstetigkeitsstellen aller dieser Treppenfunktionen

beider Folgen sind abzählbare Vereinigungen von Nullmengen und damit eine Nullmenge  $A \subset Q_0$ . Von jedem Punkt  $x_0 \in Q_0 \setminus A$  sind alle Quader der Treppenfunktionen, die  $x_0$  enthalten, eine Umgebung. Wenn  $f$  bei  $x_0 \in Q_0 \setminus A$  unstetig ist, dann gilt

$$\sup\{f(x) \mid x \in B(x_0, \delta) \cap Q_0\} - \inf\{f(x) \mid x \in B(x_0, \delta) \cap Q_0\} \geq \epsilon$$

für ein  $\epsilon > 0$  und alle  $\delta > 0$ . Deshalb konvergieren  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  nur dann fast überall gegen die gleiche Funktion, wenn die Unstetigkeitsstellen von  $f$  in  $Q_0 \setminus A$  eine Nullmenge bilden, und damit auch die Unstetigkeitsstellen von  $f$ . **q.e.d.**

Der Beweis zeigt auch, dass  $f \in B(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$  genau dann riemannintegabel ist, wenn  $f$  fast überall gleich den Grenzwerten sowohl einer monoton fallenden als auch einer monoton wachsenden Folge von Treppenfunktionen mit beschränkten Integralen ist.

**Beispiel 12.18. (i)** Sei  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Abzählung aller rationalen Zahlen in  $(0, 1)$ . Dann ist für  $0 < \epsilon < 1$  das Komplement in  $[0, 1]$  der Teilmenge

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \quad \text{mit} \quad I_n = (r_n - 2^{-(n+1)}\epsilon, r_n + 2^{-(n+1)}\epsilon) \cap (0, 1)$$

keine Nullmenge, weil alle offenen Intervalle  $I_n$  höchstens das Maß  $\epsilon 2^{-n}$  haben und  $\sum_{n=1}^{\infty} \epsilon 2^{-n} = \epsilon < 1$ . Also ist die Folge

$$\left( \prod_{k=1}^n (1 - \chi_{I_k}) \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

eine monoton fallende Folge von Treppenfunktionen, die gegen eine lebesgueintegrablen Funktion  $f$  konvergiert. Weil die rationalen Zahlen in  $(0, 1)$  dicht in  $[0, 1]$  liegen, ist  $f$  an allen Punkten im Komplement der offenen Teilmenge  $O = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$  von  $[0, 1]$  unstetig. Also ist  $f$  eine lebesgueintegrablen Funktion, die nicht riemannintegabel ist. Insbesondere ist  $O$  also ein Beispiel für eine offene Menge, deren Rand positives Lebesguemaß hat, also eine charakteristische Funktion mit nicht verschwindendem Lebesgueintegral.

**(ii)** Sei  $p \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$  und  $\chi$  die Funktion  $\chi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \chi(x)$  mit

$$\chi(x) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } x \in \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} (mp + 1, mp + 2) \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann definiert die Folge  $(x \mapsto \chi_{[0,1]}(x) \prod_{k=1}^n \chi(p^k x))_{n \in \mathbb{N}}$  eine monoton fallende Folge von Treppenfunktionen mit beschränkten Integralen. Der Grenzwert ist lebesguesintegabel und die charakteristische Funktion  $\chi_A$  der abgeschlossenen Menge  $A \subset [0, 1]$  mit

$$[0, 1] \setminus A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} \bigcup_{z_1, \dots, z_n \in \{0, 2, \dots, p-1\}} \left( \sum_{k=1}^n \frac{z_k}{p^k} + \frac{1}{p^{n+1}}, \sum_{k=1}^n \frac{z_k}{p^k} + \frac{2}{p^{n+1}} \right).$$

Für  $p = 3$  ist  $A$  die Cantormenge aus Beispiel 11.24 (i). Alle Punkte, deren  $p$ -adische Darstellung nur Ziffern in  $\{0, 2, \dots, p-1\}$  hat, liegen in  $A$ . Wenn man bei der  $p$ -adischen Darstellung fordert, dass die Ziffernfolgen nicht gegen  $p-1$  konvergieren, dann sind das alle Punkte von  $A$  bis auf die abzählbar vielen linken Intervallgrenzen der offenen disjunkten Intervalle von  $[0, 1] \setminus A$ . Wegen der  $(p-1)$ -adischen Darstellung ist  $A$  dann gleichmächtig zu  $[0, 1]$  und damit nicht abzählbar. Indem man eine oder zwei der Zifferen der  $p$ -adischen Darstellung der Punkte von  $A$  in eine 1 umwandelt, erhält man in jeder Umgebung eines Punktes von  $A$  einen Punkt der offenen Menge  $[0, 1] \setminus A$ . Also ist  $A$  auch die Menge der Unstetigkeitsstellen von  $\chi_A$ . Das Integral von  $\chi_A$  ist

$$\int \chi_A d\mu = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{p} \left( \frac{p-1}{p} \right)^n = 1 - 1 = 0.$$

Also ist  $A$  eine nicht abzählbare Nullmenge, und  $\chi_A$  riemannintegrierbar.

## 12.4 Der Satz von Fubini

Für jeden Quader  $Q = I_1 \times \dots \times I_d \times I_{d+1} \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$  und jedes  $x \in \mathbb{R}^d$  ist die Funktion  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y \mapsto \chi_Q(x, y)$  eine Treppenfunktion auf  $\mathbb{R}$ . Wenn wir diese Funktion integrieren erhalten wir eine Treppenfunktion auf dem  $\mathbb{R}^d$ :

$$\int \chi_Q(x, y) d\mu(y) = \begin{cases} \text{Länge von } I_{d+1} & \text{wenn } x \in I_1 \times \dots \times I_d, \\ 0 & \text{wenn } x \notin I_1 \times \dots \times I_d. \end{cases}$$

Also ist

$$\int \left( \int \chi_Q(x, y) d\mu(y) \right) d\mu(x) = \mu(Q).$$

Wegen der Linearität des Integrals definiert die Abbildung  $\int d\mu(y)$  also eine lineare Abbildung von den Treppenfunktionen auf  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$  in die Treppenfunktionen auf  $\mathbb{R}^d$ . Und für jede Treppenfunktion  $f$  auf  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$  gilt

$$\int \left( \int f(x, y) d\mu(y) \right) d\mu(x) = \int f d\mu.$$

In diesem Abschnitt wollen wir zeigen, dass diese Abbildung eine Abbildung

$$\int d\mu(y) : L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}) \rightarrow L^1(\mathbb{R}^d)$$

induziert, so dass für alle  $f \in L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R})$  gilt

$$\int \left( \int f(x, y) d\mu(y) \right) d\mu(x) = \int f d\mu.$$

Wenn  $f \geq g$  zwei Treppenfunktionen auf  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$  sind, dann erfüllen für jedes  $x \in \mathbb{R}^d$  die entsprechenden Treppenfunktionen  $f_x : y \rightarrow f(x, y)$  bzw.  $g_x : y \rightarrow g(x, y)$  auch  $f_x \geq g_x$ . Wegen Proposition 12.8 gilt für die Integrale auch

$$\int f(x, y) d\mu(y) \geq \int g(x, y) d\mu(y).$$

Also definiert  $\int d\mu(y)$  eine lineare monotone Abbildung von den Treppenfunktionen auf  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$  in die Treppenfunktionen auf  $\mathbb{R}^d$ . Damit diese Abbildungen eine Abbildung von  $L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R})$  nach  $L^1(\mathbb{R}^d)$  induziert, müssen zwei fast überall definierte Grenzwerte von monoton wachsenden Treppenfunktionen, die fast überall übereinstimmen, auch auf zwei fast überall definierte Grenzwerte von monoton wachsenden Treppenfunktionen abgebildet werden, die fast überall übereinstimmen.

**Lemma 12.19.** *Sei  $S \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$  eine Nullmenge. Dann ist fast überall in  $x \in \mathbb{R}^d$ , die Menge  $S_x = \{y \in \mathbb{R} \mid (x, y) \in S\}$  eine Nullmenge in  $\mathbb{R}$ .*

**Beweis:** Wegen Satz 12.10 gibt es eine monoton wachsende Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von Treppenfunktionen auf  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$  mit beschränkten Integralen, die auf  $S$  divergiert. Dann sind auch die entsprechenden Integrale  $(\int f_n d\mu(y))_{n \in \mathbb{N}}$  über  $\mathbb{R}$  monoton wachsende Treppenfunktionen mit beschränkten Integralen auf  $\mathbb{R}^d$ . Wegen Satz 12.9 konvergieren sie fast überall auf  $x \in \mathbb{R}^d$ . Für alle  $x \in \mathbb{R}^d$ , für die  $(\int f_n d\mu(y))_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert, sind die entsprechenden Einschränkungen von  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  auf  $\{x\} \times \mathbb{R}$  monoton wachsende Folgen von Treppenfunktionen auf  $y \in \mathbb{R}$  mit beschränkten Integralen. Wegen Satz 12.9 sind also für alle  $x \in \mathbb{R}^d$ , so dass die Integrale über  $y \in \mathbb{R}$  konvergieren, die Mengen der  $y \in \mathbb{R}$ , an denen  $(f_n(x, y))_{n \in \mathbb{N}}$  nicht konvergiert, Nullmengen die  $S_x$  enthalten. **q.e.d.**

**Proposition 12.20.** *Die Integration über  $\mathbb{R}$  induziert eine lineare monotone Abbildung von  $L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R})$  nach  $L^1(\mathbb{R}^d)$ , so dass für alle  $f \in L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R})$  gilt*

$$\int \left( \int f(x, y) d\mu(y) \right) d\mu(x) = \int f d\mu.$$

**Beweis:** Weil die Integration über  $\mathbb{R}$  eine monotone lineare Abbildung von den Treppenfunktionen auf  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$  in die Treppenfunktionen auf  $\mathbb{R}^d$  definiert und wegen Lemma 12.19, induziert sie eine Abbildung von den Äquivalenzklassen von den Grenzwerten von monoton wachsenden Folgen von Treppenfunktionen mit beschränkten Integralen auf  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$  in die entsprechenden Äquivalenzklassen auf  $\mathbb{R}^d$ . Wegen der Konstruktion des Lebesgueintegrals induziert sie also auch eine Abbildung von  $L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R})$  nach  $L^1(\mathbb{R}^d)$ . Folgende Gleichung gilt dann für alle Treppenfunktionen  $f$  auf  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$  und damit auch für alle Grenzwerte  $f \in L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R})$  solcher Treppenfunktionen:

$$\int \left( \int f(x, y) d\mu(y) \right) d\mu(x) = \int f d\mu. \quad \mathbf{q.e.d.}$$

Die Argumente zeigen die analoge Aussage auch für die vertauschten Faktoren  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ . Wenn wir die mehrfach anwenden erhalten wir also

**Korollar 12.21.** (Satz von Fubini) Für alle Funktionen  $f \in L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d'})$  gilt

$$\int f d\mu = \int \left( \int f(x, y) d\mu(y) \right) d\mu(x) = \int \left( \int f(x, y) d\mu(x) \right) d\mu(y). \quad \mathbf{q.e.d.}$$

Mit dem Satz von Fubini und dem Lebesguekriterium können wir jetzt auch Integrale auf dem  $\mathbb{R}^d$  ausrechnen. Als erstes können wir für fast alle  $(x_2, \dots, x_s) \in \mathbb{R}^d$  das Integral  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \dots, x_d) dx_1$  ausrechnen. Wenn  $f$  riemannintegabel ist können wir dabei die Methoden der eindimensionalen Integration, wie wir sie bei dem Riemannintegral kennen, benutzen. Wenn  $f$  außerhalb einer kompakten Menge verschwindet, benutzen wir das Riemannintegral und ansonsten das uneigentliche Riemannintegral. Dann integrieren wir genauso über  $dx_2, \dots, dx_d$  bis wir schließlich haben

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x) d\mu = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \dots, x_d) dx_1 \dots dx_d.$$

Wir können die Reihenfolge dieser eindimensionalen Integrale beliebig vertauschen.

## 12.5 Konvergenzsätze

In diesem Abschnitt werden wir drei Aussagen darüber beweisen, wann Grenzwertbildungen mit der Integration vertauschen. Als erstes werden wir die Konvergenz von monotonen Folgen mit beschränkten Integralen beweisen.

**Satz 12.22.** (Satz der monotonen Konvergenz von Beppo Levi) Sei  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine monotone Folge in  $L^1(\mathbb{R}^d)$  deren Integrale  $(\int f_n d\mu)_{n \in \mathbb{N}}$  beschränkt sind. Dann konvergiert  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  fast überall gegen eine Funktion  $f$  in  $L^1(\mathbb{R}^d)$  und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu.$$

**Beweis:** Sei  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine monotone Folge in  $L^1(\mathbb{R}^d)$  mit beschränkten Integralen. Durch Übergang zu  $(\pm f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  können wir annehmen, dass  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine monoton wachsende Folge von Funktionen mit beschränkten Integralen ist. Für alle  $n \in \mathbb{N}$  seien  $(\tilde{g}_{nm})_{m \in \mathbb{N}}$  und  $(\tilde{h}_{nm})_{m \in \mathbb{N}}$  monoton wachsende Folgen von Treppenfunktionen mit beschränkten Integralen, so dass fast überall gilt

$$f_n = \lim_{m \rightarrow \infty} \tilde{g}_{nm} - \lim_{m \rightarrow \infty} \tilde{h}_{nm}.$$

Die entsprechenden Folgen der Integrale  $(\int \tilde{g}_{nm} d\mu)_{m \in \mathbb{N}}$  und  $(\int \tilde{h}_{nm} d\mu)_{m \in \mathbb{N}}$  konvergieren. Für alle  $n \in \mathbb{N}$  sei  $M(n) \in \mathbb{N}$  so gewählt, dass für alle  $m, m' \geq M(n)$  gilt

$$\left| \int \tilde{h}_{nm} d\mu - \int \tilde{h}_{nm'} d\mu \right| \leq 2^{-n}.$$

Für alle  $n \in \mathbb{N}$  seien  $h_{nm}$  und  $g_{nm}$  induktiv definiert durch

$$h_{nm} = \begin{cases} h_{n-1m} & \text{für } m < M(n) \\ \tilde{h}_{nm} - \tilde{h}_{nM(n)} + h_{n-1m} & \text{für } m \geq M(n) \end{cases} \quad \text{und} \quad g_{nm} = \tilde{g}_{nm} - \tilde{h}_{nM(n)} + h_{n-1m}$$

mit  $h_{0m} = 0$  für alle  $m \in \mathbb{N}$ . Weil die Folgen  $(\tilde{h}_{nm})_{m \in \mathbb{N}}$  monoton wachsend sind, folgt

$$h_{n-1m} \leq h_{nm}, \quad 0 \leq h_{nm}, \quad h_{nm} \leq h_{nm+1} \quad \text{induktiv für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Weil auch die Folgen  $(\tilde{g}_{nm})_{m \in \mathbb{N}}$  monoton wachsend sind, gilt dies auch für  $(g_{nm})_{m \in \mathbb{N}}$ . Aufgrund der Wahl von  $M(n)$  sind die Integrale  $(\int h_{nm} d\mu - \int h_{n-1m} d\mu)_{m \in \mathbb{N}}$  beschränkt durch  $2^{-n}$ , und  $(\int h_{nm} d\mu)_{n, m \in \mathbb{N}}$  beschränkt durch  $1 = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}$ . Weil  $(\int f_n d\mu)_{n \in \mathbb{N}}$  beschränkt sind, und fast überall  $g_{nm} \leq f_n + \lim_{m \rightarrow \infty} h_{nm}$  gilt, sind auch die Integrale  $(\int g_{nm} d\mu)_{n, m \in \mathbb{N}}$  beschränkt. Für alle  $n \in \mathbb{N}$  bzw.  $m \in \mathbb{N}$  seien

$$\begin{aligned} g_n &= \lim_{m \rightarrow \infty} g_{nm} & \text{und} & \quad h_n = \lim_{m \rightarrow \infty} h_{nm}, \\ \tilde{g}_m &= \max\{g_{1m}, \dots, g_{mm}\} \leq f_m + h_m & \text{und} & \quad \tilde{h}_m = \max\{h_{1m}, \dots, h_{mm}\} = h_{mm}. \end{aligned}$$

Dann gilt für alle  $n \in \mathbb{N}$  auch fast überall  $f_n = g_n - h_n$ . Aufgrund der Definition von  $h_{nm}$  ist  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$  fast überall monoton wachsend und  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}} = (f_n + h_n)_{n \in \mathbb{N}}$  auch. Dann sind  $(\tilde{h}_m)_{m \in \mathbb{N}}$  und  $(\tilde{g}_m)_{m \in \mathbb{N}}$  monoton wachsende Folgen von Treppenfunktionen, deren Integrale beschränkt sind durch  $\int \tilde{h}_m d\mu \leq 1$  und  $\int \tilde{g}_m d\mu \leq \int f_m d\mu + 1$ . Seien  $\tilde{g}$  und  $\tilde{h}$  die entsprechenden Grenzwerte. Für  $n \leq m$  gilt

$$g_{nm} \leq \tilde{g}_m \quad \text{und} \quad h_{nm} \leq \tilde{h}_m.$$

Im Grenzwert  $m \rightarrow \infty$  folgt fast überall die Existenz der Grenzwerte  $n \rightarrow \infty$

$$g_n \leq \tilde{g} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} g_n = g \leq \tilde{g} \quad \text{und} \quad h_n \leq \tilde{h} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} h_n = h \leq \tilde{h}.$$

Weil  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$  fast überall monoton wachsende Folgen sind, gilt fast überall

$$\tilde{g}_m \leq \max\{g_1, \dots, g_m\} = g_m \quad \text{und} \quad \tilde{h}_m \leq \max\{h_1, \dots, h_m\} = h_m.$$

Also gilt fast überall  $g = \tilde{g}$  und  $h = \tilde{h}$  bzw.  $f = \tilde{g} - \tilde{h} = g - h$ . Aus Lemma 12.12 folgt

$$\int f d\mu = \lim_{m \rightarrow \infty} \int (\tilde{g}_m - \tilde{h}_m) d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int (g_n - h_n) d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu. \quad \text{q.e.d.}$$

**Korollar 12.23.** (Norm  $\|\cdot\|_1$ )

Auf  $L^1(\mathbb{R}^d)$  definiert  $\|\cdot\|_1 : L^1(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f \mapsto \|f\|_1 = \int |f| d\mu$  eine Norm.

**Beweis:** Die Dreiecksungleichung und die Eigenschaft

$$\|\lambda f\|_1 = \int |\lambda| \cdot |f| d\mu = |\lambda| \cdot \int |f| d\mu = |\lambda| \|f\|_1$$

folgt aus der Monotonie und der Linearität des Lebesgueintegrals. Zu zeigen bleibt noch, dass aus  $\|f\|_1 = 0$  folgt  $f = 0$  fast überall. Sei also  $\int |f| d\mu = 0$ . Dann konvergiert wegen dem Satz der monotonen Konvergenz die Folge  $(n|f|)_{n \in \mathbb{N}}$  fast überall. Also gilt auch fast überall  $|f| = 0$ . **q.e.d.**

**Korollar 12.24.** (*Lebesgue's Satz der beschränkten Konvergenz*) Die Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $L^1(\mathbb{R}^d)$  konvergiere fast überall gegen  $f$ , so dass für ein  $k \in L^1(\mathbb{R}^d)$  und alle  $n \in \mathbb{N}$  fast überall  $|f_n| \leq k$  gilt. Dann ist  $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$  und  $(\int f_n d\mu)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert gegen  $\int f d\mu$ .

**Beweis:** Seien  $(g_{nm})_{m \in \mathbb{N}}$  und  $(h_{nm})_{m \in \mathbb{N}}$  definiert durch

$$g_{nm} = \min\{f_n, f_{n+1}, \dots, f_{n+m}\} \quad \text{und} \quad h_{nm} = \max\{f_n, f_{n+1}, \dots, f_{n+m}\}.$$

Für alle  $n \in \mathbb{N}$  sind wegen den Eigenschaften der lebesgueintegrierbaren Funktionen  $(g_{nm})_{m \in \mathbb{N}}$  monoton fallende Folgen in  $L^1(\mathbb{R}^d)$  mit durch  $\int k d\mu$  beschränkten Integralen, und  $(h_{nm})_{m \in \mathbb{N}}$  monoton wachsende Folgen von Funktionen mit durch  $\int k d\mu$  beschränkten Integralen. Wegen dem Satz der monotonen Konvergenz konvergieren diese Folgen fast überall gegen Funktionen  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $L^1(\mathbb{R}^d)$ . Fast überall sind

$$g_n = \inf\{f_n, f_{n+1}, f_{n+2}, \dots\} \quad \text{und} \quad h_n = \sup\{f_n, f_{n+1}, f_{n+2}, \dots\}$$

monotone Folgen in  $L^1(\mathbb{R}^d)$  mit beschränkten Integralen. Also konvergieren  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$  fast überall gegen  $f$ . Dann gilt auch

$$\int g_n d\mu \leq \int f_n d\mu \leq \int h_n d\mu \quad \text{und} \quad \int f d\mu \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu \leq \int f d\mu. \quad \mathbf{q.e.d.}$$

**Korollar 12.25.** (*Vollständigkeit von  $L^1(\mathbb{R}^d)$ , Satz von Riesz-Fischer*)  $L^1(\mathbb{R}^d)$  ist mit  $\|\cdot\|_1$  ein Banachraum.

**Beweis:** Sei  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchyfolge in  $L^1(\mathbb{R}^d)$ . Dann gibt es eine Teilfolge  $(f_{n_m})_{m \in \mathbb{N}}$ , so dass für alle  $m \in \mathbb{N}$  gilt  $\|f_{n_{m+1}} - f_{n_m}\|_1 \leq 2^{-m}$ . Die Reihe  $(\sum_{m=1}^n |f_{n_{m+1}} - f_{n_m}|)_{n \in \mathbb{N}}$  erfüllt dann die Voraussetzungen des Satzes der monotonen Konvergenz. Also konvergiert sie fast überall gegen eine Funktion  $k \in L^1(\mathbb{R}^d)$ . Dann konvergiert auch die Folge  $(\sum_{m=1}^n f_{n_{m+1}} - f_{n_m})_{n \in \mathbb{N}} = (f_{n_{n+1}} - f_{n_1})_{n \in \mathbb{N}}$  fast überall und erfüllt mit  $k \in L^1(\mathbb{R}^d)$  die Voraussetzungen von Lebesgue's Satz der beschränkten Konvergenz. Dann konvergiert auch die Teilfolge gegen einen Grenzwert  $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ . Weil  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchyfolge ist, konvergiert  $(\|f_n - f\|_1)_{n \in \mathbb{N}}$  gegen Null, und damit auch  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gegen  $f$ . **q.e.d.**

Im Allgemeinen konvergieren in  $L^1(\mathbb{R}^d)$  konvergente Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  nicht fast überall gegen den Grenzwert  $f$ . Aber es existiert immer eine Teilfolge  $(f_{n_m})_{m \in \mathbb{N}}$ , die fast überall gegen  $f$  konvergiert und  $|f_{n_m}| \leq k$  für ein  $k \in L^1(\mathbb{R}^d)$  und alle  $m \in \mathbb{N}$  erfüllt.

**Beispiel 12.26.** Wir betrachten für alle  $n \in \mathbb{N}$  und alle  $k \in \{1 - n^2, 2 - n^2, \dots, n^2\}$  die charakteristische Funktion  $\chi_{n,k}$  der abgeschlossenen Intervalle  $[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$ . Sei  $m \mapsto (n, k)$  eine Abzählung solcher Paare  $(n, k)$  mit  $n \in \mathbb{N}$  und  $k \in \{1 - n^2, 2 - n^2, \dots, n^2\}$ . Dann ist die entsprechende Folge  $(\chi_m)_{m \in \mathbb{N}}$  in  $L^1(\mathbb{R}^d)$  eine Nullfolge, weil es für alle  $n \in \mathbb{N}$  nur endlich viele  $m \in \mathbb{N}$  gibt mit  $\|\chi_m\|_1 \geq \frac{1}{n}$ . Andererseits gibt es für alle  $x \in \mathbb{R}$  unendlich viele  $m \in \mathbb{N}$  mit  $\chi_m(x) = 1$ . Also konvergiert  $(\chi_m(x))_{m \in \mathbb{N}}$  für kein  $x \in \mathbb{R}$  gegen 0.

**Satz 12.27.** (Fatou's Lemma) Sei  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $L^1(\mathbb{R}^d)$  von fast überall nicht negativen Funktionen, die fast überall gegen  $f$  konvergieren. Wenn  $(\int f_n d\mu)_{n \in \mathbb{N}}$  beschränkt ist, dann ist  $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$  und es gilt

$$\int f d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \left\{ \int f_{n+m} d\mu \mid m \in \mathbb{N}_0 \right\}.$$

**Beweis:** Sei wieder  $g_{nm} = \min\{f_n, f_{n+1}, \dots, f_{n+m}\}$ . Dann erfüllen für alle  $n \in \mathbb{N}$  die Folgen  $(g_{nm})_{m \in \mathbb{N}}$  die Voraussetzungen des Satzes der monotonen Konvergenz. Also konvergieren für alle  $n \in \mathbb{N}$  diese Folgen gegen  $g_n \in L^1(\mathbb{R}^d)$  mit  $g_n = \inf\{f_n, f_{n+1}, \dots\}$ . Die Folgen  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  erfüllen wieder die Voraussetzungen des Satzes der monotonen Konvergenz und konvergieren fast überall gegen  $f$ . Also gilt auch  $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$  und fast überall  $f_{n+m} \geq g_n$  für alle  $m \in \mathbb{N}_0$ . Es folgt  $\int f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int g_n d\mu$  und  $\int f d\mu \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \inf\{\int f_{n+m} d\mu \mid m \in \mathbb{N}_0\}$ . **q.e.d.**

## 12.6 Jacobis Transformation von Maßen

In diesem Abschnitt untersuchen wir, wie sich die Integration unter Koordinatentransformationen verhält. Wir verallgemeinern also die Substitutionsregel auf  $\mathbb{R}^d$ . Wir benutzen in diesem Abschnitt auf  $\mathbb{R}^d$  die Norm  $\|\cdot\|_\infty$  aus Definition 9.9. Dann sind nämlich die offenen Bälle genau die offenen Quader mit gleichen Kantenlängen.

**Definition 12.28.** Eine Menge  $A \subset \mathbb{R}^d$  heißt messbar, wenn für alle  $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$  das Produkt  $f \cdot \chi_A$  mit der charakteristischen Funktion von  $A$  in  $L^1(\mathbb{R}^d)$  liegt.

**Satz 12.29.** (i) Das Komplement einer messbaren Menge ist messbar.

(ii) Die Schnittmenge von abzählbar vielen messbaren Mengen ist messbar.

(iii) Jede offene Menge ist messbar.

**Beweis:** (i) Weil die charakteristische Funktion des Komplements gerade 1 minus der charakteristischen Funktion ist, folgt (i) daraus, dass  $L^1(\mathbb{R}^d)$  ein Vektorraum ist.

(ii) Seien  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  messbar und  $A = \bigcap_n A_n$ . Für  $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$  konvergiert die Folge  $(f \prod_{k=1}^n \chi_{A_k})_{n \in \mathbb{N}}$  fast überall gegen  $f \chi_A$  und ihre Absolutbeträge sind beschränkt durch  $|f| \in L^1(\mathbb{R}^d)$ . Aus Lebesgues Satz der beschränkten Konvergenz folgt  $f \chi_A \in L^1(\mathbb{R}^d)$ .



(iii) Jeder Quader ist messbar, weil die Multiplikation einer Treppenfunktion mit der charakteristischen Funktion eines Quaders eine Treppenfunktion ist. Für eine offene Menge  $U \neq \mathbb{R}^d$  und  $x \in U$  sei  $r > 0$  mit  $B(x, 3r) \subset U$  und  $y$  ein Element in  $B(x, r) \cap \mathbb{Q}^d$ . Dann ist  $B(y, 2r) \subset B(x, 3r) \subset U$ . Also ist  $x \in B(y, \sup\{r > 0 \mid B(y, 2r) \subset U\}) \subset U$ . Deshalb ist  $U$  folgende abzählbare Vereinigung von offenen bzw. kompakten Quadern

$$U = \bigcup_{y \in U \cap \mathbb{Q}^d} B(y, \sup\{r > 0 \mid B(y, 2r) \subset U\}) = \bigcup_{y \in U \cap \mathbb{Q}^d} \overline{B(y, \sup\{r > 0 \mid B(y, 2r) \subset U\})}.$$

Dann folgt (iii) aus (i) und (ii) und den de Morganschen Regeln. **q.e.d.**

Für messbare Mengen  $A$  bilden die Produkte von Lebesgueintegrierbaren Funktionen mit der charakteristischen Funktion  $\chi_A$  von  $A$  den Teilraum von  $L^1(\mathbb{R}^d)$  aller Lebesgueintegrierbaren Funktionen, die außerhalb von  $A$  verschwinden.

**Definition 12.30.** Für messbare Teilmengen  $A$  von  $\mathbb{R}^d$  sei  $L^1(A) \subset L^1(\mathbb{R}^d)$  der Teilraum aller Lebesgueintegrierbaren Funktionen auf  $\mathbb{R}^d$ , die außerhalb von  $A$  verschwinden.

Der Beweis des Satzes von Riesz-Fischer gibt für jede Cauchyfolge in  $L^1(\mathbb{R}^d)$  eine fast überall konvergente Teilfolge an. Also ist  $L^1(A)$  abgeschlossen und ein Banachraum.

**Lemma 12.31.** (i) Die Multiplikation mit einer beschränkten stetigen Funktion  $f$  ist eine lineare Abbildung in  $\mathcal{L}(L^1(\mathbb{R}^d))$ , deren Norm beschränkt ist durch  $\|f\|_\infty$ .

(ii) Sei  $\Phi : U \rightarrow O$  eine bijektive Lipschitzstetige Abbildung zwischen den offenen Mengen  $U, O \subset \mathbb{R}^d$  mit Lipschitzkonstante  $L$ . Dann ist  $f \mapsto f \circ \Phi^{-1}$  eine lineare stetige Abbildung  $L^1(U) \rightarrow L^1(O)$ , deren Norm beschränkt ist durch  $L^d$ .

(iii) Seien  $U, O \subset \mathbb{R}^d$  offenen Mengen und  $\Phi : U \rightarrow O$  eine surjektive Abbildung mit  $\|\Phi(x) - \Phi(y) - (x - y)\|_\infty \leq \epsilon \|x - y\|_\infty$  für  $x, y \in U$  und ein  $\epsilon \in (0, 1)$ . Dann gilt

$$\left| \int_O f \circ \Phi^{-1} d\mu - \int_U f d\mu \right| \leq (2^d - 1)\epsilon \|f\|_1 \quad \text{für alle } f \in L^1(U).$$

**Beweis:** (i) Für eine beschränkte stetige Funktion  $f$  und eine Treppenfunktion  $g$  gilt  $|fg| \leq \|f\|_\infty |g|$  und wegen Satz 12.15  $fg \in L^1(\mathbb{R}^d)$ , und wegen Satz 12.14 auch  $\|fg\|_1 \leq \|f\|_\infty \|g\|_1$ . Für eine monoton wachsende Folge  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von Treppenfunktionen mit beschränkten Integralen gilt entweder  $g_n - g_m \geq 0$  oder  $g_n - g_m \leq 0$ . Deshalb ist  $\|g_n - g_m\|_1$  beschränkt durch  $|\int g_n d\mu - \int g_m d\mu|$ . Also konvergiert  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  bezüglich  $\|\cdot\|_1$ , und die Treppenfunktionen liegen dicht in  $L^1(\mathbb{R}^d)$ . Daraus folgt (i).

(ii) Wir zeigen zuerst, dass die Linearkombinationen von  $\chi_Q$  mit kompakten Quadern  $Q \subset U$  dicht in  $L^1(U)$  liegen. Weil die Treppenfunktionen dicht in  $L^1(\mathbb{R}^d)$  liegen, folgt dies daraus, dass  $\chi_{Q \cap U}$  für jeden offenen endlichen Quader  $Q$  im Abschluss dieser Linearkombinationen liegt. Im Beweis von Satz 12.29 (iii) haben wir gezeigt, dass  $Q \cap U$  eine abzählbare Vereinigung von kompakten Quadern  $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $U$  ist. Indem wir  $Q_{n+1} \setminus Q_n$

jeweils in paarweise disjunkte Quader zerlegen, wird  $Q \cap U$  zu einer abzählbaren Vereinigung von paarweise disjunkten Quadern. Aus dem Satz von Beppo Levi folgt die Aussage. Für kompakte Quader  $Q \subset U$  ist  $\Phi[Q]$  kompakt und messbar, also liegt  $\chi_Q \circ \Phi^{-1} = \chi_{\Phi[Q]}$  in  $L^1(O)$ . Wegen der Lipschitzstetigkeit von  $\Phi$  ist  $\Phi[Q]$  in einem Quader enthalten, dessen Kanten  $L$  mal so lang sind wie die entsprechenden Kanten von  $Q$ . Also gilt zunächst für  $f = \chi_Q$

$$\int |f \circ \Phi^{-1}| d\mu \leq L^d \int |f| d\mu, \quad \text{und} \quad \|f \circ \Phi^{-1}\|_{L^1(O)} \leq L^d \|f\|_{L^1(U)}.$$

Dann gilt diese Ungleichung auch für Linearkombinationen von  $\chi_Q$  mit paarweise disjunkten kompakten Quadern in  $U$ , und deren Grenzwerte, also für alle  $f \in L^1(U)$ .

(iii) Aus  $\|\Phi(x) - \Phi(y) - (x - y)\|_\infty \leq \epsilon \|x - y\|_\infty$  folgt

$$\begin{aligned} \|y - x\|_\infty &= \|\Phi(x) - \Phi(y) - (x - y) + \Phi(y) - \Phi(x)\|_\infty \leq \epsilon \|x - y\|_\infty + \|\Phi(y) - \Phi(x)\|_\infty, \\ (1 - \epsilon) \|x - y\|_\infty &\leq \|\Phi(x) - \Phi(y)\|_\infty \leq (1 + \epsilon) \|x - y\|_\infty. \end{aligned}$$

Also ist  $\Phi$  injektiv und damit bijektiv. Wegen (ii) wird  $L^1(U)$  durch  $f \mapsto f \circ \Phi^{-1}$  stetig auf  $L^1(O)$  abgebildet. Wie in (ii) genügt es die Ungleichung für  $f = \chi_Q$  mit kompakten Quadern  $Q \subset U$  zu zeigen. Weil  $\Phi[Q]$  einen Quader enthält, dessen Kanten  $(1 - \epsilon)$  mal so lang sind wie die von  $Q$  und in einem enthalten ist, dessen Kanten  $(1 + \epsilon)$  mal so lang sind, folgt mit  $1 - (1 - \epsilon)^d \leq (1 + \epsilon)^d - 1 \iff 2 \leq (1 + \epsilon)^d + (1 - \epsilon)^d$  auch

$$\left| \int \chi_Q \circ \Phi^{-1} d\mu - \int \chi_Q d\mu \right| \leq ((1 + \epsilon)^d - 1) \|\chi_Q\|_1 \leq \sum_{l=1}^d \binom{d}{l} \epsilon \|\chi_Q\|_1 = (2^d - 1) \epsilon \|\chi_Q\|_1. \mathbf{q.e.d.}$$

**Satz 12.32.** Sei  $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$  eine invertierbare lineare Abbildung. Dann ist

$$\pi(A) : L^1(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^1(\mathbb{R}^d), \quad f \mapsto \pi(A)f \quad \text{mit} \quad (\pi(A)f)(x) = f(A^{-1}x)$$

eine stetige lineare Abbildung, deren Norm beschränkt ist durch  $\|A\|^d$ . Es gilt

$$\int \pi(A)f d\mu = |\det A| \int f d\mu \quad \text{für alle } f \in L^1(\mathbb{R}^d).$$

**Beweis:** Aus Lemma 12.31 (ii) folgt  $\pi(A) \in \mathcal{L}(L^1(\mathbb{R}^d))$  und  $\|\pi(A)\| \leq \|A\|^d$ . Wie im Beweis von Lemma 12.31 (ii) genügt es die letzte Gleichung für  $f = \chi_Q$  mit kompakten Quadern  $Q$  zu zeigen. Weil  $A^{-1}x$  genau dann in  $Q$  liegt, wenn  $x$  in  $A[Q]$  liegt, ist  $\chi_Q \circ A^{-1} = \chi_{A[Q]}$ . Wir betrachten zuerst solche  $A$ , die kompakte Quader auf kompakte Quader abbilden. Das sind einerseits Diagonalmatrizen und andererseits die Permutationen der Koordinaten. In beiden Fällen gilt die Formel offenbar für alle  $\chi_Q$  mit kompakten Quadern  $Q$  und deshalb auch für alle  $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ . Wenn  $A$  der elementaren Zeilenumformung des Gaußschen Algorithmus entspricht, die für

$i \neq j$  zu der  $i$ -ten Zeile das  $\lambda$ -fache der  $j$ -ten Zeile hinzuaddiert, dann berechnen wir  $\int \chi_{A[Q]} d\mu$  indem wir mit dem Satz von Fubini zuerst über  $x_i$  integrieren. Für festes  $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_d$  ist  $\{x_i \in \mathbb{R} \mid (x_1, \dots, x_d) \in A[Q]\}$  das um  $\lambda x_j$  verschobene Intervall  $\{x_i \in \mathbb{R} \mid (x_1, \dots, x_d) \in Q\}$ , also ein Intervall gleicher Länge. Für solche  $A$  ist  $\det A = 1$ , und die Formel gilt also wieder zunächst für alle  $\chi_Q$  und dann für alle  $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ . Für zwei invertierbare  $A, B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$  ist  $\pi(A \cdot B) = \pi(A) \cdot \pi(B)$ . Wegen  $|\det(A \cdot B)| = |\det A| \cdot |\det B|$  gilt die Formel also auch für die Produkte solcher Matrizen. Mit dem Gaußschen Algorithmus können wir jede invertierbare Matrix  $A$  durch elementare Zeilenumformungen in eine diagonale Matrix umwandeln. Die inversen Zeilenumformungen verwandeln die Diagonalmatrix in  $A$ . Also ist  $A$  ein Produkt von Matrizen, für die die Formel gilt. Damit gilt die Formel auch für  $A$ . **q.e.d.**

**Satz 12.33.** (Jacobis Transformationsformel) Sei  $\Phi : U \rightarrow O$  eine stetig differenzierbare bijektive Abbildung von der offenen Menge  $U \subset \mathbb{R}^d$  auf die offene Menge  $O \subset \mathbb{R}^d$ . Wenn  $\Phi'$  auf  $U$  in  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$  invertierbar ist, dann ist die Abbildung  $f \mapsto |\det \Phi'| f \circ \Phi$  eine Isometrie von  $L^1(O)$  nach  $L^1(U)$ , d.h. für  $f \in L^1(O)$  gilt  $|\det \Phi'| f \circ \Phi \in L^1(U)$  mit

$$\int_U |\det \Phi'| f \circ \Phi d\mu = \int_O f d\mu.$$

**Beweis:** Im Beweis von Lemma 12.31 (ii) wurde gezeigt, dass die Linearkombinationen von  $\chi_Q$  mit kompakten Quadern  $Q \subset O$  dicht in  $L^1(O)$  liegen. Also genügt es

$$\int |\det \Phi'| \chi_Q \circ \Phi d\mu = \int \chi_Q d\mu$$

für kompakte Quader  $Q \subset O$  zu zeigen. Weil  $\Phi'$  auf  $U$  in  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$  invertierbar ist, ist wegen dem Satz der inversen Funktion  $\Phi^{-1}$  stetig differenzierbar und  $\Phi^{-1}[Q] \subset U$  kompakt. Wegen Korollar 9.35 gilt  $\|(\Phi^{-1})'(x)\| \leq L$  auf  $x \in Q$  für ein positives  $L > 0$ . Weil  $Q$  konvex ist, ist  $L$  wegen dem Schrankensatz Korollar 10.6 eine Lipschitzkonstante von  $\Phi^{-1}$  auf  $Q$ . Weil  $\Phi'$  wegen Satz 9.39 auf  $\Phi^{-1}[Q]$  gleichmäßig stetig ist, gibt es für jedes  $0 < \epsilon < 1$  eine Zerlegung  $Q = Q_1 \cup \dots \cup Q_N$  in paarweise disjunkte Quader, auf denen jeweils  $\|A_n - \Phi'(\Phi^{-1}(x))\| \leq \frac{\epsilon}{L}$  oder auch  $\|A_n \circ (\Phi^{-1})'(x) - \mathbb{1}\| \leq \frac{\epsilon}{L} \|(\Phi^{-1})'(x)\| \leq \epsilon$  gilt. Hierbei ist  $A_n = \Phi'(\Phi^{-1}(x_n))$  am Zentrum  $x_n$  von  $Q_n$ . Aus dem Schrankensatz folgt  $\|(A_n \circ \Phi^{-1})(x) - (A_n \circ \Phi^{-1})(y) - (x - y)\|_\infty \leq \epsilon \|x - y\|_\infty$ , und mit Lemma 12.31 (iii)

$$\left| \int \chi_{Q_n} \circ \Phi \circ A_n^{-1} d\mu - \int \chi_{Q_n} d\mu \right| \leq (2^d - 1) \epsilon \|\chi_{Q_n}\|_1 \quad \text{für } n = 1, \dots, N.$$

Auf  $x \in Q_n$  gilt  $\|\mathbb{1} - \Phi'(\Phi^{-1}(x)) \circ A_n^{-1}\| \leq \|A_n - \Phi'(\Phi^{-1}(x))\| \cdot \|A_n^{-1}\| \leq \frac{\epsilon}{L} L = \epsilon$ . Wir wenden Lemma 12.31 (iii) auf  $\Phi'(\Phi^{-1}(x)) \circ A_n^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$  an und erhalten mit Satz 12.32

$$\begin{aligned} & \left| \int |\det \Phi'| \chi_{Q_n} \circ \Phi d\mu - \int \chi_{Q_n} \circ \Phi \circ A_n^{-1} d\mu \right| \leq \int \left| |\det \Phi'| - |\det A_n| \right| \chi_{Q_n} \circ \Phi d\mu \\ & = \int \left| |\det \Phi' A_n^{-1}| - 1 \right| \cdot |\det A_n| \chi_{Q_n} \circ \Phi d\mu \leq (2^d - 1) \epsilon \int |\det A_n| \chi_{Q_n} \circ \Phi d\mu \leq (4^d - 2^d) \epsilon \|\chi_{Q_n}\|_1. \end{aligned}$$

Für  $\sum_{n=1}^N$  folgt  $\left| \int |\det \Phi'| \chi_Q \circ \Phi d\mu - \int \chi_Q d\mu \right| \leq 4^d \epsilon \|\chi_Q\|_1 \rightarrow 0$  für  $\epsilon \rightarrow 0$ . **q.e.d.**

## 12.7 Integration über Untermannigfaltigkeiten

In diesem Abschnitt definieren wir die Integration von reellen Funktionen auf stetig differenzierbare Untermannigfaltigkeiten  $A \subset \mathbb{R}^d$ . Zunächst charakterisieren wir Untermannigfaltigkeiten durch die Existenz von geeigneten Parametrisierungen.

**Lemma 12.34.** *Eine Teilmenge  $A \subset \mathbb{R}^d$  ist genau dann eine  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit, wenn  $A$  überdeckt wird durch die Bilder von Homöomorphismen  $\Phi : U \rightarrow O$  von offenen Teilmengen  $U \subset \mathbb{R}^k$  auf offene Teilmengen  $O$  von  $A$ , die als Abbildung nach  $\mathbb{R}^d$  stetig differenzierbar sind und auf  $U$  eine injektive Ableitung haben.*

**Beweis:** Wenn  $A$  eine stetig differenzierbare Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^d$  ist, dann ist gemäß Definition 11.12 jedes  $x \in A$  im Definitionsbereich einer stetig differenzierbaren Abbildung  $f : O \rightarrow \mathbb{R}^l$  enthalten, so dass  $f'(x)$  surjektiv ist. Nach einer geeigneten Permutation der Koordinaten von  $\mathbb{R}^d$  ist die Einschränkung von  $f'(x)$  auf den Unterraum  $\{0\} \times \mathbb{R}^l \subset \mathbb{R}^{d-l} \times \mathbb{R}^l$  invertierbar, und  $f$  erfüllt als Abbildung auf der offenen Teilmenge  $O$  von  $\mathbb{R}^{d-l} \times \mathbb{R}^l$  die Voraussetzungen des Satzes der impliziten Funktion. Deshalb gibt es offene Mengen  $V \subset \mathbb{R}^{d-l}$  und  $W \subset \mathbb{R}^l$  und eine stetig differenzierbare Abbildung  $g : V \times W \rightarrow \mathbb{R}^l$ , so dass die Schnittmenge von  $A$  mit einer Umgebung von  $x$  gleich dem Graphen von  $z \mapsto g(z, f(x))$  auf  $V$  ist. Weil die Ableitung von  $z \mapsto (z, g(z, f(x)))$  auf ganz  $V$  injektiv ist, erfüllt  $A$  die Bedingung im Lemma mit  $k = d - l$ .

Wenn umgekehrt  $A \subset \mathbb{R}^d$  die Bedingung im Lemma erfüllt und  $x \in A$  im Bild  $O$  einer entsprechenden Abbildung  $\Phi : U \rightarrow O$  liegt, dann ist nach einer geeigneten Permutation der Koordinaten von  $\mathbb{R}^d$  die Einschränkung von  $\Phi'(\Phi^{-1}(x))$  auf den Unterraum  $\mathbb{R}^k \times \{0\} \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{d-k}$  invertierbar. Mit der Projektion auf den ersten Faktor  $P : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{d-k} \rightarrow \mathbb{R}^k$  erfüllt dann  $P \circ \Phi$  die Voraussetzungen des Satzes der inversen Funktion. Deshalb besitzt die Einschränkung  $P \circ \Phi|_V$  auf eine Umgebung  $V$  von  $\Phi^{-1}(x)$  eine Umkehrfunktion  $(P \circ \Phi|_V)^{-1}$ . Mit der Projektion  $Q : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{d-k} \rightarrow \mathbb{R}^{d-k}$  auf den zweiten Faktor ist das Bild der Einschränkung  $\Phi|_V$  die Nullstellenmenge von  $(y, z) \mapsto z - Q \circ \Phi \circ (P \circ \Phi|_V)^{-1}(y)$ . Weil  $\mathbb{1}_{\mathbb{R}^{d-k}}$  die partielle Ableitung dieser Abbildung nach  $z$  ist, erfüllt  $A$  auf  $\Phi[V] \ni x$  die Bedingung der Definition 11.12. **q.e.d.**

Mit der Parametrisierung des Lemmas können wir Funktionen  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  integrieren, wenn  $f$  außerhalb einer der Mengen  $\Phi[U]$  verschwindet. Mithilfe einer sogenannten Zerlegung der Eins zerlegen wir jedes  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  in eine Summe solcher Funktionen.

**Definition 12.35.** *(Zerlegung der Eins) Eine glatte Zerlegung der Eins bezüglich einer offenen Überdeckung einer offenen Teilmenge  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ , ist eine abzählbare Familie  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von glatten Funktionen  $h_n : \Omega \rightarrow [0, 1]$ , so dass*

(i) für jedes  $x \in \Omega$  auf einer Umgebung von  $x$  nur endlich viele  $h_n$  ungleich Null sind.

(ii) Für alle  $x \in \Omega$  gilt  $\sum_{n=1}^{\infty} h_n(x) = 1$ .

(iii) Jedes  $h_n$  außerhalb einer kompakten Teilmenge eines Elementes der Überdeckung verschwindet.

**Satz 12.36.** (Existenz der Zerlegung der Eins) Jede offene Überdeckung  $\mathcal{U}$  einer offenen Teilmenge  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  besitzt eine glatte Zerlegung der Eins.

**Beweis:** Für  $0 < a < b < \infty$  sei  $h_{a,b} \in C^\infty(\mathbb{R})$  definiert durch

$$h_{a,b} : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1], \quad x \mapsto h_{a,b}(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq |x| \leq a \\ \exp\left(\frac{1}{x^2-b^2} \exp\left(\frac{-1}{x^2-a^2}\right)\right) & \text{für } a < |x| < b \\ 0 & \text{für } b \leq |x| \end{cases}$$

Der Beweis von Satz 12.29 (iii) zeigt, dass jede offene Menge  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  eine abzählbare Vereinigung von offenen Quadern ist, deren Abschlüsse kompakte Teilmengen von  $\Omega$  sind. In  $\Omega$  ist der Abschluss der Vereinigung von endlich vielen dieser Quader jeweils kompakt, und wird von endlich vielen Elementen solcher Quader überdeckt. Also gibt es eine Folge von offenen Teilmengen  $(O_m)_{m \in \mathbb{N}}$  von  $\Omega$ , die  $\Omega$  überdecken, und deren Abschlüsse  $\bar{O}_m$  für alle  $m \in \mathbb{N}$  kompakt und in  $O_{m+1}$  enthalten sind. Wir setzen  $O_0 = O_{-1} = \emptyset$ . Für jedes  $m \in \mathbb{N}$  und jeden Punkt  $x \in \bar{O}_m \setminus O_{m-1}$  ist  $B(x, 3r)$  (bezüglich  $\|\cdot\|_2$ ) für ein  $r > 0$  in  $O_{m+1} \setminus \bar{O}_{m-2}$  und in einer der offenen Mengen von  $\mathcal{U}$  enthalten. Also wird die kompakte Menge  $\bar{O}_m \setminus O_{m-1}$  von endlich vielen solchen Bällen  $B(x, r)$  überdeckt. Induktiv erhalten wir eine Folge von offenen Bällen  $(B(x_n, r_n))_{n \in \mathbb{N}}$ , die  $\Omega$  überdecken, so dass  $(B(x_n, 3r_n))_{n \in \mathbb{N}}$  jeweils in einer der offenen Mengen von  $\mathcal{U}$  enthalten, und jeweils nur mit endlich vielen anderen  $(B(x_n, 3r_n))_{n \in \mathbb{N}}$  nicht schnittfremd ist. Dann ist

$$\begin{aligned} h_n : \Omega \rightarrow [0, 1], \quad x \mapsto h_n(x) &= h_{r_n, 2r_n}(\|x - x_n\|) \prod_{m=1}^{n-1} (1 - h_{r_m, 2r_m}(\|x - x_m\|)) \\ &= \prod_{m=1}^{n-1} (1 - h_{r_m, 2r_m}(\|x - x_m\|)) - \prod_{m=1}^n (1 - h_{r_m, 2r_m}(\|x - x_m\|)). \end{aligned}$$

eine glatte Zerlegung der Eins bezüglich der Überdeckung  $\mathcal{U}$ . Denn induktiv gilt

$$h_1(x) + \dots + h_n(x) + (1 - h_{r_1, 2r_1}(\|x - x_1\|)) \cdots (1 - h_{r_n, 2r_n}(\|x - x_n\|)) = 1 \quad \text{für jedes } n \in \mathbb{N},$$

und für alle  $n \in \mathbb{N}$  verschwindet  $(1 - h_{r_n, 2r_n}(\|x - x_n\|))$  auf  $B(x_n, r_n)$ . **q.e.d.**

**Definition 12.37.** Sei  $A \subset \mathbb{R}^d$  eine  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^d$ , und  $f \in C(A, \mathbb{R})$  verschwinde außerhalb einer kompakten Teilmenge  $K \subset A$ . Wir überdecken  $K$  durch endlich viele offene Mengen  $O \subset \mathbb{R}^d$  mit  $A \cap O = \Phi[U]$  für ein  $\Phi$  wie im Lemma 12.34 und wählen eine entsprechende Zerlegung der Eins  $(h_l)_{l \in \mathbb{N}}$ . Dann sei

$$\int_A f d\sigma = \sum_{l \in \mathbb{N}} \int_U (h_l f) \circ \Phi \sqrt{\det((\Phi')^T \Phi')} d\mu.$$

Zur Motivation bemerken wir, dass das Volumen des  $k$ -dimensionalen Parallelotops, das von den Spaltenvektoren einer  $n \times k$  Matrix  $A$  aufgespannt wird, gleich  $\sqrt{\det(A^T A)}$  ist. Dabei ist  $A^T A$  die Matrix aller Skalarprodukte zwischen diesen Vektoren.

**Lemma 12.38.** *Das Integral  $\int_A f d\sigma$  hängt weder von der Wahl der Parametrisierung noch von der Wahl der Zerlegung der Eins ab.*

**Beweis:** Auf  $K$  ist wegen der Bedingung (i) der Zerlegung der Eins die Summe in der Definition von  $\int_A f d\sigma$  endlich. Für zwei Überdeckungen von  $K$  durch Mengen  $\Phi[U]$  und  $\Psi[V]$  wie im Lemma 12.34 mit entsprechenden Zerlegungen der Eins, bilden die Schnittmengen von zwei Mengen (aus beiden Überdeckungen jeweils eine) auch eine Überdeckung durch solche Mengen und die Produkte von zwei Elementen (aus beiden Zerlegungen der Eins jeweils eine) eine entsprechende Zerlegung der Eins. Wegen der Bedingung (ii) an die Zerlegungen der Eins und der Linearität des Integrals genügt es dann den Fall zu betrachten, dass  $K$  in den Bildern  $\Phi[U]$  und  $\Psi[V]$  von zwei stetig differenzierbaren Homöomorphismen wie im Lemma 12.34 enthalten ist. Dann sind die Einschränkungen von  $\Phi$  auf  $\Phi^{-1}[\Phi[U] \cap \Psi[V]]$  und von  $\Psi$  auf  $\Psi^{-1}[\Phi[U] \cap \Psi[V]]$  beides Homöomorphismen auf die offene Teilmenge  $\Phi[U] \cap \Psi[V]$  von  $A$ . Die Verkettung des zweiten mit dem inversen des ersten ergibt einen Homöomorphismus  $\Upsilon : \Psi^{-1}[\Phi[U] \cap \Psi[V]] \rightarrow \Phi^{-1}[\Phi[U] \cap \Psi[V]]$  so dass  $\Psi(x) = \Phi(\Upsilon(x))$  für alle  $x \in \Psi^{-1}[\Phi[U] \cap \Psi[V]]$  gilt.

Wir zeigen jetzt dass  $\Upsilon$  stetig differenzierbar ist. Für jedes  $x \in \Psi^{-1}[\Phi[U] \cap \Psi[V]]$  ist nach einer geeigneten Permutation der Koordinaten von  $\mathbb{R}^d$  die Verkettung von  $\Phi'(\Upsilon(x))$  mit der Projektion  $P : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{d-k} \rightarrow \mathbb{R}^k$  auf die erste Komponente invertierbar. Wegen dem Satz der inversen Funktion bildet  $P \circ \Phi$  eine offenen Umgebung von  $\Upsilon(x)$  homöomorph auf eine offene Umgebung von  $P(\Psi(x))$  ab, und die Umkehrabbildung ist mit  $P \circ \Phi$  stetig differenzierbar. Weil  $P \circ \Psi$  und  $P \circ \Phi \circ \Upsilon$  auf dieser Umgebung von  $x$  übereinstimmen, ist  $\Upsilon$  dort auch gleich der Verkettung von  $P \circ \Psi$  mit der inversen Abbildung von  $P \circ \Phi$ , also auf dieser Umgebung von  $x$  stetig differenzierbar. Weil das für alle  $x \in \Psi^{-1}[\Phi[U] \cap \Psi[V]]$  gilt, ist  $\Upsilon$  stetig differenzierbar. Es folgt

$$\begin{aligned} \int_{\Psi^{-1}[\Phi[U] \cap \Psi[V]]} f \circ \Psi \sqrt{\det((\Psi')^T \Psi')} d\sigma &= \int_{\Psi^{-1}[\Phi[U] \cap \Psi[V]]} f \circ \Phi \circ \Upsilon \sqrt{\det(((\Phi \circ \Upsilon)')^T (\Phi \circ \Upsilon)')} d\sigma = \\ &= \int_{\Psi^{-1}[\Phi[U] \cap \Psi[V]]} (f \circ \Phi \sqrt{\det((\Phi')^T \Phi')}) \circ \Upsilon |\det \Upsilon'| d\sigma = \int_{\Phi^{-1}[\Phi[U] \cap \Psi[V]]} f \circ \Phi \sqrt{\det((\Phi')^T \Phi')} d\sigma. \end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir Jacobis Transformationsformel benutzt.

**q.e.d.**

## 12.8 Der Gaußsche Satz

Im Gaußschen Satz werden beschränkte offene Teilmengen  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  betrachtet, deren Rand eine  $d - 1$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit ist. In dem Satz der impliziten

Funktion haben wir gezeigt, dass nach einer geeigneten Permutation der Koordinaten bei jedem  $y \in \partial\Omega$  der Rand der Graph einer stetig differenzierbaren Funktion  $g : U \rightarrow (a, b)$  auf einer offenen Umgebung  $U \subset \mathbb{R}^{d-1}$  von  $x = (y_1, \dots, y_{d-1})$  ist. Dann ist  $\Omega$  lokal von der Gestalt  $\{(x, z) \in U \times (a, b) \mid z > g(x)\}$  bzw.  $\{(x, z) \in U \times (a, b) \mid z < g(x)\}$ . Im Gaußschen Satz wird die äußere Normale  $N$  auf  $\partial\Omega$  benutzt. Das ist der Vektor, der auf der Tangentialebene des Randes senkrecht steht, der die Länge Eins hat und aus  $\Omega$  heraus zeigt. In den beiden Fällen ist der Rand die Nullstellenmenge von

$$U \times (a, b) \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, z) \mapsto z - g(x).$$

Dann ist die Tangentialebene im Punkt  $(x, (g(x)))$  der Kern der Ableitung dieser Abbildung an dieser Stelle. Also steht der Gradient dieser Abbildung senkrecht auf der Tangentialebene. Ob der Gradient aus der Menge herauszeigt oder in die Menge hineinzeigt erkennt man an der letzten Komponente. Also ist die äußere Normale bei den Randpunkten  $(x, g(x))$  der obigen Mengen  $\Omega$  gegeben durch

$$N(x, g(x)) = \pm \frac{(\nabla^T g(x), -1)^T}{\sqrt{1 + (\nabla g(x))^2}} \quad \text{für} \quad \Omega = \{(x, z) \in U \times (a, b) \mid z \gtrless g(x)\}.$$

Andererseits gilt für die entsprechende Abbildung  $\Phi(x) = (x, g(x))$

$$\det((\Phi'(x))^T \Phi'(x)) = \det \left( \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \nabla g(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{1} \\ \nabla^T g(x) \end{pmatrix} \right) = 1 + (\nabla g(x))^2.$$

Die lineare Abbildung dieser Matrix wirkt auf dem orthogonalen Komplement von  $\nabla g(x)$  nämlich wie die Identität und multipliziert  $\nabla g(x)$  mit  $1 + (\nabla g(x))^2$ .

**Beispiel 12.39. (i):** Sei  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar, so dass der Gradient  $\nabla f$  keine gemeinsamen Nullstellen mit  $f$  hat. Dann hat  $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) < 0\}$  einen stetig differenzierbaren Rand, und Der Rand  $\partial\Omega$  ist die Hyperfläche, auf der  $f$  verschwindet. Auf dem Rand  $\partial\Omega$  ist  $\nabla f$  ein Vektor, der orthogonal auf dem Tangentialraum an den Rand steht, und nach außen zeigt. Deshalb ist  $\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}$  die äußere Normale.  
**(ii):** Für  $y \in \mathbb{R}^d$  und  $r > 0$  ist der Ball gleich  $B(y, r) = \{x \in \mathbb{R}^d \mid (x - y)^2 - r^2 < 0\}$ . Die Funktion  $f(x) = (x - y)^2 - r^2$  ist offenbar unendlich oft differenzierbar, und der Gradient  $\nabla f(x) = 2(x - y)$  hat nur eine Nullstelle bei  $x = y$ . Also hat der Ball  $B(y, r)$  einen unendlich oft differenzierbaren Rand mit der äußeren Normalen  $\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}$ .

**Satz 12.40. (Gaußscher Satz oder Divergenzsatz)** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  eine offene beschränkte Menge,  $\partial\Omega$  eine  $d-1$  dimensionale Untermannigfaltigkeit und  $f$  eine auf  $\overline{\Omega}$  stetige  $\mathbb{R}^d$ -wertige Funktion, mit sich stetig auf  $\overline{\Omega}$  fortsetzenden ersten partiellen Ableitungen. Dann gilt:

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot f d\mu = \int_{\partial\Omega} f \cdot N d\sigma$$

Hierbei ist  $N$  die äußere Normale und  $N d\sigma$  das entsprechende Maß auf dem Rand  $\partial\Omega$ .

**Beweis:** Wir überdecken  $\partial\Omega$  durch offenen Mengen  $O \subset \mathbb{R}^d$  wie in Definition 12.37. In dem Beweis haben wir gesehen, dass wir nach einer geeigneten Permutation der Komponenten von  $\mathbb{R}^d$  die entsprechende Funktion  $f$  so wählen können, dass sie von der Gestalt  $U \times (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $(x, z) \mapsto z - g(x)$  ist. O.B.d.A. sei  $\partial\Omega$  durch endlich viele offenen Mengen  $U \times (a, b)$  überdeckt, so dass  $\Omega \cap U \times (a, b) = \{(x, z) \mid z < g(x)\}$  gilt. Zusammen mit  $\Omega$  erhalten wir eine endlich Überdeckung des Abschlusses von  $\Omega$ . Dann wählen wir eine entsprechende Zerlegung der Eins. Wegen der Kompaktheit von  $\bar{\Omega}$  und der lokalen Endlichkeit hat diese Zerlegung der Eins nur endlich viele Elemente. Wegen der Linearität genügt es die Aussage für jeden der Summanden einzeln zu zeigen.

Als erstes betrachten wir stetig differenzierbare Funktionen  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ , die außerhalb einer kompakten Teilmenge von  $\Omega$  verschwinden. Durch den Wert Null außerhalb von  $\Omega$  setzen sich diese Funktionen stetig differenzierbar auf  $\mathbb{R}^d$  fort. Wir wählen einen endlichen Quader, der  $\Omega$  enthält. Dann verschwindet  $f$  auf dem Rand des Quaders. Wir integrieren beim  $i$ -tem Summanden von  $\nabla \cdot f = \partial_1 f_1 + \dots + \partial_d f_d$  mit Fubini zuerst über die Koordinate  $x_i$ . Wegen dem Hauptsatz ergibt dieses Integral die Differenz der Funktionswerte von  $f_i$  an den Randpunkten der entsprechenden Intervalle, also Null. Damit verschwinden in diesem ersten Fall beide Seiten des Gaußschen Satzes.

Als zweites betrachten wir Funktionen  $f$  auf  $\{(x, z) \in U \times (a, b) \mid z \leq g(x)\}$ , die außerhalb einer kompakten Teilmenge verschwinden, und setzen sie außerhalb von  $U \times (a, b)$  durch Null auf  $\mathbb{R}^{d-1} \times (a, b)$  fort. Dann gilt für  $(x, y) \in \mathbb{R}^{d-1} \times (a, b)$ ,  $1 \leq i < d$

$$\int_a^z f(x, z) dz = \int_a^y \int_{-\infty}^0 \frac{\partial}{\partial x_i} f(x + te_i, z) dt dz = \int_a^y f(x, z) dz$$

Wegen dem Satz von Fubini ist diese Funktion also stetig differenzierbar mit

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \int_a^y f(x, z) dz = \int_a^y \frac{\partial f(x, z)}{\partial x_i} dz \text{ für } 1 \leq i < d, \quad \frac{\partial}{\partial y} \int_a^y f(x, z) dz = f(x, y).$$

Dann verschwindet folgende Funktion außerhalb einer kompakten Teilmenge von  $U$ :

$$x \mapsto \int_a^{g(x)} f(x, z) dz \quad \text{mit} \quad \frac{\partial}{\partial x_i} \int_a^{g(x)} f(x, z) dz = \int_a^{g(x)} \frac{\partial f(x, z)}{\partial x_i} dz + \frac{\partial g(x)}{\partial x_i} f(x, g(x)).$$

Also folgt mit den Argumenten des ersten Falles, dass das Integral von der rechten Seite über  $U$  verschwindet. Für  $1 \leq i < d$  folgt auch in diesem Fall der Gaußsche Satz:

$$\int_U \int_a^{g(x)} \frac{\partial f_i(x, z)}{\partial x_i} dz d^{d-1}x = - \int_U f_i(x, g(x)) \frac{\partial g(x)}{\partial x_i} d^{d-1}x = \int_U f_i(x, g(x)) N_i(x, g(x)) d\sigma.$$

Weil  $f$  auf  $U \times \{a\}$  verschwindet folgt auch im letzten Fall aus dem Hauptsatz:

$$\int_U \int_a^{g(x)} \frac{\partial f_d(x, z)}{\partial x_d} dz d^{d-1}x = \int_U f_d(x, g(x)) d^{d-1}x = \int_U f_d(x, g(x)) N_d(x, g(x)) d\sigma. \quad \mathbf{q.e.d.}$$



**Beispiel 12.41.** Sei  $\Omega = B(0, r) \subset \mathbb{R}^d$  und  $f(x) = x$ . Auf dem Rand  $\partial B(0, r) = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x\| = r\}$  ist die äußere Normale gleich  $N(x) = \frac{x}{\|x\|}$ . Dann folgt mit  $\nabla \cdot f = d$

$$\int_{B(0,r)} d \cdot d\mu = d \int \chi_{B(0,r)} d\mu = \int_{\partial B(0,r)} x \cdot \frac{x}{\|x\|} d\sigma = r \int_{\partial B(0,r)} d\sigma.$$

Also ist die Oberfläche von  $\partial B(0, r)$  gleich  $\frac{d}{r}$  mal dem Volumen von  $B(0, r)$ .

## 12.9 Maßtheorie

In diesem Abschnitt untersuchen wir, wann wir eine lebesgueintegrierte Funktion über eine Teilmenge integrieren können. Das führt dann zu einer allgemeineren Definition vom Volumen von messbaren Mengen. Dieses Volumen heißt Maß.

**Definition 12.42.** Eine Teilmenge  $\mathcal{B}$  der Potenzmenge  $\mathcal{P}(X)$  einer Menge  $X$  heißt  $\sigma$ -Algebra, wenn diese Teilmenge  $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$  unter Komplementbildung und dem Schnitt von abzählbar vielen Elementen von  $\mathcal{B}$  abgeschlossen ist. Wenn  $X$  ein metrischer Raum ist, dann heißen die Elemente der kleinsten  $\sigma$ -Algebra, die alle offenen (und abgeschlossenen) Mengen enthält, Borelmengen.

**Definition 12.43.** Sei  $\mathcal{B}$  eine  $\sigma$ -Algebra auf der Menge  $X$ . Dann heißt  $\mu : \mathcal{B} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}_0^+$  Maß, wenn für alle Folgen  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von paarweise disjunkten Mengen in  $\mathcal{B}$  gilt

$$\mu \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

**Satz 12.44.** (Lebesguemaß) Seien  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$  die messbaren Mengen von  $\mathbb{R}^d$ . Dann definiert

$$\mu : \mathcal{L}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \bar{\mathbb{R}}_0^+, \quad A \mapsto \lim_{n \rightarrow \infty} \int \chi_{Q_n} \chi_A d\mu \quad \text{mit} \quad Q_n = [-n, n]^d \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

ein Maß auf  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ . Es heißt Lebesguemaß. Weil die Borelmengen  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  messbar sind, definiert es auch ein Borelmaß auf  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ .

**Beweis:** Wegen Satz 12.29 bilden die messbaren Mengen eine  $\sigma$ -Algebra, die die Borelmengen enthält. Seien  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  paarweise disjunkte messbare Mengen und

$$f_n = \sum_{k=1}^n \chi_{A_k} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Dann konvergiert  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  punktweise gegen  $f = \chi_A$  mit  $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ . Für alle  $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$  sind  $|gf_n|$  durch  $|g|$  beschränkt. Wegen Lebesgues Satz der beschränkten Konvergenz konvergiert die Folge  $(gf_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gegen  $gf \in L^1(\mathbb{R}^d)$ , und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int gf_n d\mu = \int gf d\mu.$$

Wenn wir für  $g$  die Folge  $(\chi_{Q_n})_{n \in \mathbb{N}}$  der charakteristischen Funktionen von den Quadern  $Q_n = [-n, n]^d$  einsetzen, dann konvergiert die entsprechende Folge  $(\chi_{Q_n} f)_{n \in \mathbb{N}}$  entweder gegen eine lebesgueintegrierte Funktion, und  $\mu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n)$  ist endlich, oder das Maß der disjunkten Vereinigung der Borelmengen  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist unendlich. In beiden Fällen folgt die  $\sigma$ -Additivität aus den Rechenregeln für Folgen. **q.e.d.**

**Lemma 12.45.** (*Translationsinvarianz des Lebesguesmaßes*) Für  $x \in \mathbb{R}^d$  ist eine Menge  $A \subset \mathbb{R}^d$  genau dann messbar bzw. eine Borelmenge, wenn  $A+x = \{y \in \mathbb{R}^d \mid y-x \in A\}$  messbar bzw. eine Borelmenge ist. Wenn  $A$  messbar ist, dann gilt  $\mu(A+x) = \mu(A)$ .

**Beweis:** Für alle Quader  $Q \subset \mathbb{R}^d$  und  $x \in \mathbb{R}^d$  ist  $Q+x$  ein Quader mit  $\mu(Q+x) = \mu(Q)$ . Deshalb folgt  $f_x \in L^1(\mathbb{R}^d)$  und  $\int f_x d\mu = \int f d\mu$  aus  $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$  und  $x \in \mathbb{R}^d$  für  $f_x(y) = f(y-x)$ . Für jede Menge  $A \subset \mathbb{R}^d$  gilt  $\chi_{A+x} = (\chi_A)_x$ . Das Lemma folgt. **q.e.d.**

**Satz 12.46.** (*Vitali*) Die Relation  $x \sim y \iff x-y \in \mathbb{Q}$  definiert eine Äquivalenzrelation. Für jedes  $x \in \mathbb{R}$  enthält  $(x-1, x]$  genau eine ganze Zahl  $n_x$ . Deshalb enthält jede Äquivalenzklasse  $[x]$  einen Repräsentanten  $x - n_x \in [0, 1)$ . Eine Menge  $V \subset [0, 1)$ , die für jedes  $x \in \mathbb{R}$  genau einen Repräsentanten in der entsprechenden Äquivalenzklasse  $[x]$  enthält, heißt Vitalimenge. Solche Mengen sind nicht messbar.

Die Definition der Menge  $V$  benutzt das sogenannte Auswahlaxiom der Mengenlehre. Es besagt, dass aus jeder nicht leeren Menge ein Element ausgewählt werden kann. In der Mengenlehre unterscheidet man zwischen Aussagen, die das Auswahlaxiom voraussetzen, und solchen, die das nicht tun. Dieser Satz gehört zu den ersteren.

**Beweis:** Sei  $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Abzählung von  $\mathbb{Q} \cap [-1, 1]$  und  $V_n = q_n + V$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Aufgrund der Definition von  $V$  sind die Mengen  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$  paarweise disjunkt und es gilt

$$[0, 1] \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n \subset [-1, 2).$$

Wegen dem vorangehenden Lemma sind entweder alle Mengen  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$  messbar oder keine. Im ersten Fall haben alle das gleiche Maß und es folgt  $1 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(V_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(V) \leq 3$ , was unmöglich ist. Also ist  $V$  nicht messbar. **q.e.d.**

Dieser Satz zeigt auch, dass es unter der Annahme des Auswahlaxiomes unmöglich ist ein Maß auf allen Teilmengen von  $\mathbb{R}$  zu definieren, das translationsinvariant ist, also das vorhergehende Lemma erfüllt, und  $[0, 1]$  ein positives endliches Maß zuordnet.

**Definition 12.47.** Eine Äquivalenzklasse von fast überall definierten reellen Funktionen auf  $\mathbb{R}^d$  heißt messbar, wenn es eine Folge von Treppenfunktionen gibt, die fast überall gegen einen Repräsentanten der Äquivalenzklasse konvergiert.

**Satz 12.48.** (i) Die messbaren Funktionen bilden mit der punktweisen Addition und Multiplikation und der Skalarmultiplikation eine Algebra, die  $L^1(\mathbb{R}^d)$  enthält.

(ii) Wenn  $f$  und  $g$  messbar sind, dann auch  $|f|$ ,  $\max\{f, g\}$  und  $\min\{f, g\}$ . Ist außerdem fast überall  $f$  ungleich Null, dann ist auch  $\frac{1}{f}$  messbar.

- (iii) Der Grenzwert einer fast überall konvergenten Folge von messbaren Funktionen ist messbar.
- (iv) Die Äquivalenzklassen von stetigen Funktionen sind messbar.
- (v) Eine messbare Funktion ist genau dann lebesgueintegrierbar, wenn ihr Betrag durch eine lebesgueintegrierbare Funktion beschränkt ist.
- (vi) Eine Menge  $A \subset \mathbb{R}^d$  ist genau dann messbar, wenn  $\chi_A$  messbar ist.

**Beweis (i):** Die Treppenfunktionen bilden eine Algebra, und damit auch die messbaren Funktionen. Alle lebesgueintegrierbaren Funktionen sind nach unserer Definition messbar.

**(ii):** Der Betrag, das Maximum und das Minimum von Treppenfunktionen sind wieder Treppenfunktionen. Wenn eine Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von Treppenfunktionen fast überall gegen eine nicht verschwindende Funktion  $f$  konvergiert, dann konvergiert die Folge

$$(g_n)_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{mit} \quad g_n : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto g_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{f_n(x)} & \text{wenn } f_n(x) \neq 0 \\ 0 & \text{wenn } f_n(x) = 0 \end{cases}$$

von Treppenfunktionen fast überall gegen  $\frac{1}{f}$ .

**(iii):** Sei  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge von messbaren Funktionen, die fast überall gegen  $f$  konvergiert. Sei  $h$  folgende positive lebesgueintegrierbare Hilfsfunktion auf  $\mathbb{R}^d$ :

$$h : x \mapsto h(x) = \frac{2^{-n-1}}{n^d - (n-1)^d} \quad \text{mit } n \in \mathbb{N} \text{ so dass } x \in (-n, n)^d \setminus (1-n, n-1)^d.$$

Die Folge  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von messbaren Funktionen

$$g_n : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto g_n(x) = \frac{h(x)f_n(x)}{h(x) + |f_n(x)|} < h(x) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

konvergiert fast überall gegen  $g = \frac{h \cdot f}{h + |f|}$  mit fast überall  $|g| < |h|$ . Wegen Lebesgue's Satz der beschränkten Konvergenz sind alle  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und dann auch  $g$  lebesgueintegrierbar und damit auch messbar. Dann ist wegen (i) und (ii) auch folgende Funktion messbar:

$$\frac{hg}{h - |g|} = \frac{h \frac{hf}{h+|f|}}{h - \frac{h|f|}{h+|f|}} = \frac{h^2 f}{h^2 + h|f| - h|f|} = f.$$

**(iv):** Für jede stetige Funktion  $f$  und jeden Quader  $Q$  ist wegen Satz 12.15 das Produkt von  $f$  mit der charakteristischen Funktion von  $Q$  lebesgueintegrierbar. Die Folge  $(f\chi_{Q_n})_{n \in \mathbb{N}}$  der Produkte mit den charakteristischen Funktionen der Quader  $Q_n = (-n, n)^d$  konvergiert punktweise gegen  $f$ . Also folgt (iv) aus (i) und (iii).

(v): Sei  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge von Treppenfunktionen, die fast überall gegen  $f$  konvergiert und  $|f| \leq k$  für ein  $k \in L^1(\mathbb{R}^d)$ . Dann konvergiert auch  $(\max\{-k, \min\{k, f_n\}\})_{n \in \mathbb{N}}$  fast überall gegen  $f$ . Aus Lebesgue's Satz der beschränkten Konvergenz folgt (v).

(iv): Für eine messbare Menge  $A \subset \mathbb{R}^d$  konvergieren die Produkte  $(\chi_A \chi_{Q_n})_{n \in \mathbb{N}}$  der charakteristischen Funktionen mit denen der Quader  $Q_n = (-n, n)^d$  punktweise gegen  $\chi_A$ . Wegen (iii) ist also  $\chi_A$  messbar. Die Umkehrung folgt aus (i) und (v). **q.e.d.**

**Satz 12.49.** Eine Äquivalenzklasse  $f$  von fast überall definierten reellen Funktionen auf  $\mathbb{R}^d$  ist genau dann messbar, wenn eine der folgenden äquivalenten Bedingungen gilt:

- (i) Für alle  $a \in \mathbb{R}$  sind die Mengen  $\{x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) \leq a\}$  messbar.
- (ii) Für alle  $a \in \mathbb{R}$  sind die Mengen  $\{x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) \geq a\}$  messbar.
- (iii) Für alle  $a \in \mathbb{R}$  sind die Mengen  $\{x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) < a\}$  messbar.
- (iv) Für alle  $a \in \mathbb{R}$  sind die Mengen  $\{x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) > a\}$  messbar.
- (v) Für alle  $k \geq 0$  in  $L^1(\mathbb{R}^d)$  liegt die Funktion  $\max\{-k, \min\{k, f\}\}$  in  $L^1(\mathbb{R}^d)$ .

**Beweis:** Für eine messbare Funktion  $f$  konvergiert  $(n(\max(a + \frac{1}{n}, f) - \max(a, f)))_{n \in \mathbb{N}}$  gegen die charakteristische Funktion  $\chi_{\{x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) \leq a\}}$ . Aus Satz 12.48 folgt (i).

(i)  $\Leftrightarrow$  (ii)  $\Leftrightarrow$  (iii)  $\Leftrightarrow$  (iv): Wegen Satz 12.29 sind (i) und (iv) bzw. (ii) und (iii) äquivalent. Wegen  $\{x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) < a\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) \leq a - \frac{1}{n}\}$  und  $\{x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) \leq a\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) < a + \frac{1}{n}\}$  sind auch (i) und (iii) äquivalent.

(iv)  $\Rightarrow$  (v): Wenn eine Funktion  $f$  die äquivalenten Bedingungen (i)-(iv) erfüllt, dann sind folgende Funktionen für alle  $n \in \mathbb{N}$  messbar:

$$f_n : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{n} \sum_{l=1}^{n^2} \chi_{\{x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) \geq \frac{l}{n}\}} - \chi_{\{x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) \leq -\frac{l}{n}\}}.$$

Die Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert gegen  $f$ . Aus Satz 12.48 (iii) und (v) folgt (v).

Es gelte (v) und für alle  $n \in \mathbb{N}$  sei  $Q_n$  der Quader  $(-n, n)^d$ . Wegen (v) besteht die Folge  $(\max\{-n\chi_{Q_n}, \min\{n\chi_{Q_n}, f\}\})_{n \in \mathbb{N}}$  aus lebesgueintegrierbaren Funktionen und konvergiert punktweise gegen  $f$ . Also ist  $f$  wegen Satz 12.48 (i) und (iii) messbar. **q.e.d.**

## 12.10 Die Räume $L^p(\mathbb{R}^d)$

Eine komplexwertige Funktion ist genau dann lebesgueintegrierbar bzw. messbar, wenn sowohl der Realteil als auch der Imaginärteil lebesgueintegrierbar bzw. messbar sind. Eine messbare komplexe Funktion ist offenbar genau dann lebesgueintegrierbar, wenn der Absolutbetrag lebesgueintegrierbar ist. Aus Satz 12.49 folgt, dass für jede messbare Funktion  $f$  und  $p \in \mathbb{R}$  auch die Funktion  $|f|^p$  messbar ist.

**Definition 12.50.** Für alle  $1 < p < \infty$  sei  $L^p(\mathbb{R}^d)$  die Menge aller Äquivalenzklassen von fast überall definierten messbaren Funktionen von  $\mathbb{R}^d$  nach  $\mathbb{K}$ , für die die Funktion  $|f|^p$  lebesgueintegrierbar ist. Der Raum  $L^\infty(\mathbb{R}^d)$  ist definiert als die Menge aller Äquivalenzklassen von messbaren beschränkten Funktionen von  $\mathbb{R}^d$  nach  $\mathbb{K}$ .

Für  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  und  $p = 1$  stimmt diese Definition mit Definition 12.13 überein.

**Satz 12.51.** Für alle  $1 \leq p \leq \infty$  ist  $L^p(\mathbb{R}^d)$  zusammen mit der Abbildung

$$\|\cdot\| : L^p(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f \mapsto \|f\|_p = \begin{cases} \left(\int |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} & \text{für } 1 \leq p < \infty \\ \inf\{C \in [0, \infty) \mid |f| \leq C \text{ a.e.}\} & \text{für } p = \infty. \end{cases}$$

ein normierter Vektorraum. Für  $1 \leq p, q, r \leq \infty$  mit  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$  und  $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$  und  $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$  gilt  $fg \in L^r(\mathbb{R}^d)$  und die Höldersche Ungleichung:  $\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$ .

Die Dreiecksungleichung der Norm  $\|\cdot\|_p$  wird wieder Minkowski-Ungleichung genannt: für alle  $f, g \in L^p(\mathbb{R}^d)$  gilt  $f + g \in L^p(\mathbb{R}^d)$  und  $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$ .

**Beweis:** Wir beweisen zuerst die Höldersche Ungleichung. Im Fall  $r = \infty$  sind beide anderen Exponenten auch gleich  $p = \infty = q$ , und die Hölderungleichung folgt aus den Eigenschaften des Betrags. Für  $1 \leq r < \infty$  gehen wir anstatt der Funktionen  $f$  und  $g$  zu den Funktionen  $|f|^r$  und  $|g|^r$ , und anstatt der Exponenten  $r, p$  und  $q$  zu den Exponenten  $1, \frac{r}{p}$  und  $\frac{r}{q}$  über. Dann genügt es den Fall  $1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$  für nicht-negative reelle Funktionen zu betrachten. Es gilt nämlich  $\|f\|_p^r = \| |f|^r \|_{\frac{p}{r}}$  bzw.  $\|g\|_q^r = \| |g|^r \|_{\frac{q}{r}}$ . Für  $p = 1, q = \infty$  bzw.  $p = \infty, q = 1$  folgt die Höldersche Ungleichung aus den Eigenschaften der lebesguesintegrierbaren Funktionen. Für  $f = 0$  oder  $g = 0$  ist die Aussage offensichtlich. Sei also  $f \neq 0, g \neq 0$  und  $1 < p, q < \infty$  mit  $1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ . Die Youngsche Ungleichung ergibt für die Funktionen  $\frac{|f|}{\|f\|_p}$  und  $\frac{|g|}{\|g\|_q}$

$$\frac{|f|}{\|f\|_p} \frac{|g|}{\|g\|_q} \leq \frac{1}{p} \frac{|f|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{|g|^q}{\|g\|_q^q} \text{ fast überall.}$$

Wegen  $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$  und  $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$  ist die rechte Seite lebesguesintegrierbar und das Integral gleich  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Also ist auch die linke Seite lebesguesintegrierbar und das Integral kleiner oder gleich 1. Daraus folgt  $fg \in L^1(\mathbb{R}^d)$ ,  $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$ .

Wegen Korollar 12.23 erfüllen die Abbildungen  $f \mapsto \|f\|_p$  die Positivität. Die Linearität ist offensichtlich. Für  $p = 1$  und  $p = \infty$  ist die Dreiecksungleichung schon gezeigt. Sei also  $1 < p < \infty$  und  $f, g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ . Offenbar gilt für  $f, g \in L^p(\mathbb{R}^d)$  fast überall  $|f + g|^p \leq 2^p \max\{|f|, |g|\}^p \leq 2^p(|f|^p + |g|^p)$ . Also liegt  $f + g$  in  $L^p(\mathbb{R}^d)$ . Für  $f, g \in L^p(\mathbb{R}^d)$  folgt aus  $|f + g|^p = |f + g| |f + g|^{p-1} \leq (|f| + |g|) |f + g|^{p-1}$  mit  $1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \Leftrightarrow (p-1)q = p \Leftrightarrow \frac{1}{q} = \frac{p-1}{p}$ , also  $\| |f + g|^{p-1} \|_q = \|f + g\|_p^{p-1}$ , auch

$$\|f + g\|_p^p \leq \|f \cdot |f + g|^{p-1}\|_1 + \|g \cdot |f + g|^{p-1}\|_1 \leq (\|f\|_p + \|g\|_p) \|f + g\|_p^{p-1}.$$

aus der Hölderschen Ungleichung. Daraus folgt die Minkowski Ungleichung. **q.e.d.**

**Satz 12.52.** (Satz von Riesz Fischer) Für alle  $1 \leq p \leq \infty$  ist  $L^p(\mathbb{R}^d)$  ein Banachraum.

**Beweis:** Für  $p = \infty$  folgt die Aussage aus den Sätzen 9.44 (iii) und 12.48 (iii). Sei  $1 \leq p < \infty$  und  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchyfolge in  $L^p(\mathbb{R}^d)$ . Sei  $(f_{n_m})_{m \in \mathbb{N}}$  eine Teilfolge mit  $\|f_{n_{m+1}} - f_{n_m}\|_p \leq 2^{-m}$  für alle  $m \in \mathbb{N}$ . Die monoton wachsende Folge  $g_m = |f_{n_1}| + \sum_{l=1}^m |f_{n_{l+1}} - f_{n_l}|$  für alle  $m \in \mathbb{N}$  erfüllt wegen der Minkowskiungleichung  $\|g_m\|_p \leq 1 + \|f_{n_1}\|_p$  für alle  $m \in \mathbb{N}$ . Wegen dem Satz der monotonen Konvergenz, konvergiert  $(g_m^p)_{m \in \mathbb{N}}$  gegen eine Funktion  $k \in L^1(\mathbb{R}^d)$ . Wegen dem Monotonieprinzip konvergiert  $(g_m)_{m \in \mathbb{N}}$  fast überall gegen eine messbare Funktion  $g$ . Wegen  $|f_{n_m}| \leq g_m$  konvergiert  $(f_{n_m})_{m \in \mathbb{N}}$  fast überall gegen eine messbare Funktionen  $f$ . Wegen Lebesgue's Satz der beschränkten Konvergenz ist  $|f|^p$  lebesgueintegabel und damit  $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ . Weil fast überall  $|f - f_{n_{m+1}}| \leq |g - g_m|$  und  $\|g - g_m\|_p \leq 2^{-m}$  gilt, konvergiert  $(f_{n_m})_{m \in \mathbb{N}}$  in  $L^p(\mathbb{R}^d)$  gegen  $f$ . Als Cauchyfolge konvergiert auch  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $L^p(\mathbb{R}^d)$  gegen  $f$ . **q.e.d.**

**Definition 12.53.** Für jede messbare Menge  $A \subset \mathbb{R}^d$  und alle  $1 \leq p \leq \infty$  sei

$$L^p(A) = \{f \in L^p(\mathbb{R}^d) \mid f|_{\mathbb{R}^d \setminus A} = 0 \text{ a.e.}\}$$

Der vorangehende Beweis zeigt, dass  $L^p(A)$  in  $L^p(\mathbb{R}^d)$  abgeschlossen ist.

**Korollar 12.54.** Für  $A$  messbar und  $1 \leq p \leq \infty$  ist  $L^p(A)$  ein Banachraum. **q.e.d.**

**Satz 12.55.** Für alle messbaren Mengen  $A \subset \mathbb{R}^d$  und alle  $1 \leq p, q \leq \infty$  mit  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  ist folgende Abbildung eine Isometrie:

$$j : L^q(A) \rightarrow \mathcal{L}(L^p(A), \mathbb{K}), \quad g \mapsto j(g) \text{ mit } j(g) : L^p(A) \rightarrow \mathbb{K}, \quad f \mapsto \int_A f g d\mu.$$

**Beweis:** Für messbaren Mengen  $A \subset \mathbb{R}^d$  und  $1 \leq p \leq \infty$  ist  $j$  wegen der Hölderschen Ungleichung lipschitzstetig mit  $L = 1$ . Wir definieren  $f$  so, dass im Beweis der Hölderschen Ungleichung die Youngsche Ungleichung eine Gleichheit wird. Sei also

$$f = \frac{|g|^{\frac{q}{p}+1}}{g} = \frac{|g|^{q(\frac{1}{p}+\frac{1}{q})}}{g} = \frac{|g|^q}{g} \quad \text{mit } f(x) = 0 \text{ für } g(x) = 0.$$

Für  $1 \leq q < \infty$  ist  $f$  messbar und liegt in  $L^p(A)$ . Wegen  $\|f\|_p^p = \|g\|_q^q = \|fg\|_1$  gilt

$$\|g\|_q = \|g\|_q^{q-q(1-\frac{1}{q})} = \frac{\|g\|_q^q}{\|g\|_q^{\frac{q}{q}}} = \frac{\|gf\|_1}{\|f\|_p} \leq \|j(g)\| \leq \|g\|_q \text{ für alle } g \in L^q(A) \setminus \{0\}.$$

Also ist für  $1 < p \leq \infty$  die Abbildung  $j$  eine Isometrie. Für  $p = 1, q = \infty$  und jedes  $\epsilon > 0$  ist  $\{x \in \mathbb{R}^d \mid |g(x)| \geq \|g\|_\infty - \epsilon\}$  keine Nullmenge und messbar. Auf allen Funktionen  $f \in L^1(A)$ , die außerhalb dieser Menge verschwinden, nimmt  $|j(g)|$  größere Werte als  $(\|g\|_\infty - \epsilon)\|f\|_1$  an. Also gilt für jedes  $\epsilon > 0$  und jedes  $g \in L^\infty(A) \setminus \{0\}$  auch  $\|g\|_\infty - \epsilon \leq \|j(g)\| \leq \|g\|_\infty$ . Dann ist  $j$  auch für  $p = 1$  eine Isometrie. **q.e.d.**

Mithilfe von weiteren Sätzen der Maßtheorie kann man zeigen, dass für  $1 < q \leq \infty$  diese Abbildung  $j$  sogar ein Isomorphismus von Banachräumen ist.