Martin Schmidt
Nicolas A. Hasse

Analysis II

25. April 2024

9. Übung

28. Zum Satz über die implizite Funktion.

Wir betrachten eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(a) *Zeige*, dass die durch $f(x, y) = c$ lokal bestimmte implizite Funktion $y = h(x)$ einen kritischen Punkt in $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ besitzt, wenn

$$f(x_0, y_0) = c, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0.$$

[*Tipp:* Warum muss $h(x)$ existiert? Man differenziere die Abbildung $x \mapsto f(x, h(x))$ mit Hilfe der Kettenregel und benutze, dass $f(x, h(x)) = c$.] *(3 Punkte)*

(b) *Zeige*, dass in (x_0, y_0) ein lokales Maximum vorliegt, wenn

$$\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)} > 0. \tag{$\star$}$$

(3 Bonuspunkte)

Bemerkung: Analog zeigt man dieselbe Aussage auch für ein lokales Minimum mit "< 0" anstelle von "> 0" in ($\star$).

29. Niveaumengen, Singularitäten und Extremwertsuche.

Es sei

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto x^2 - x^4 - y^2\ .$$

(a) *Untersuche* die Niveaumengen von g daraufhin, ob sie glatte Teilmengen von $\mathbb{R}^2$ sind, und *bestimme* andernfalls ihre Singularitäten. *(2 Punkte)*

(b) *Schriebe* eine Formel $y = h(x)$ von der Kurve $x^2 - x^3 - y^2 = 0$ in der Nähe von $(-2, -\sqrt{12})$. *(1 Punkt)*

(c) *Bestimme* mit Hilfe von 28 die lokalen Minima und Maxima Punkte der Kurve $g(x, y) = 1/27$ in Bezug auf y. *(2 Bonuspunkte)*

Sei $U := \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}^2$ und

$$f : U \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto x + y \quad \text{und} \quad g : U \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto x^3 + y^3 - 3xy\ .$$

(d) *Zeige*, dass die Niveaumengen zu $g(x, y) = c$ mit $c \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$ glatt sind. *(2 Punkte)*

(e) *Bestimme* die Gesamtheit aller kritischen Punkte von f auf den Niveaumengen $g(x, y) = c$ mit $c \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$. (Wenn man festzustellen versucht, welcher der kritischen Punkte auf einer vorgegebenen Niveaufläche liegt, kommt man auf eine kubische Gleichung, die nicht gelöst zu werden braucht.) *(2 Punkte)*

Begründe, dass die folgenden Funktionen Maximum und Minimum unter den gegebenen Nebenbedingungen annehmen und *bestimme* die Stellen, an denen die (globalen) Extrema angenommen werden.

(f) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto x - 6y$ unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 4$, *(3 Punkte)*

(g) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto x^2 + y^2$ unter der Nebenbedinung $x^2 - xy + y^2 = 3$, *(4 Bonuspunkte)*

(h) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ (x, y, z) \mapsto 5x + y - 3z$ unter der Nebenbedingung $x + y + z = 0$ und $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. *(4 Punkte)*

(i) *Begründe*, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ (x, y, z) \mapsto 4(x^2 + xy + y^2) + z^2$$

auf der Menge

$$M := \{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 \leq 9 \,\}$$

Maximum und Minimum annimmt und *bestimme* den maximalen und den minimalen Wert. *(5 Punkte)*

[*Tipp:* Betrachte den Rand $\partial M := \{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 = 9 \,\}$ und das Innere $M^\circ := \{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 < 9 \,\}$ einzeln.]

30. Singularitäten

Sei

$$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto \sin(x) \sin(y)$$

(a) *Untersuche* die Niveaumengen von h daraufhin, ob sie glatte Teilmengen von $\mathbb{R}^2$ sind, und *bestimme* andernfalls ihre Singularitäten. *(3 Punkte)*

(b) *Skizziere* die Niveaumengen von h, die Singularitäten besitzen für $(x, y) \in [-\pi, \pi]^2$.
Hinweis: Da h sowohl periodisch in x- als auch in y-Richtung ist, genügt es die Singularitäten auf dieser Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ zu skizzieren
. *(4 Bonuspunkte)*

Die Lösungen sind bis Donnerstag, den 2. Mai 2024, um 10:00 Uhr in die beschrifteten Briefk"asten in A5 einzuwerfen oder per Mail an eure Tutoren zu senden.