Martin Schmidt
Nicolas A. Hasse

Analysis II

18. April 2024

8. Übung

24. Ein Kriterium für die Definitheit symmetrischer (2 × 2)-Matrizen.

Es sei $A := \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ b & c \end{smallmatrix}\right)$ eine symmetrische (2×2)-Matrix. Seien die Eigenwerte λ_1, λ_2 und Eigenvektoren v_1, v_2. Das heißt, $Av_1 = \lambda_1 v_1$ und $Av_2 = \lambda_2$. Für symmetrische Matrizen sind die Eigenvektoren ein Basis von $\mathbb{R}^2$ mit $v_1 \cdot v_2 = 0$. Bekanntlich ist dann die Determinante bzw. die Spur von A

$$\det(A) := ac - b^2 = \lambda_1 \lambda_2 \quad \text{bzw.} \quad \operatorname{Spur}(A) := a + c = \lambda_1 + \lambda_2 \,.$$

Wir nennen A positiv bzw. negativ definit, wenn die durch A beschriebene symmetrische Bilinearform $\beta(x, y) := x \cdot Ay$ diese Eigenschaft hat.

(a) Zeige, dass A genau dann positiv definit ist, wenn $\det(A) > 0$ und $\operatorname{Spur}(A) > 0$ ist. *(3 Punkte)*

(b) Warum folgt es einfach, dass A genau dann negativ definit ist, wenn $\det(A) > 0$ und $\operatorname{Spur}(A) < 0$ ist. *(1 Punkt)*

(c) Zeige: A ist genau dann indefinit (d.h. es gibt $x, \widetilde{x} \in \mathbb{R}^2$ mit $\beta(x, x) > 0$ und $\beta(\widetilde{x}, \widetilde{x}) < 0$), wenn $\det(A) < 0$ ist. *(3 Punkte)*

Bemerkung: Diese Kriterien sind vor allem hilfreich, um zu untersuchen, ob die Hessematrix einer Funktion $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ in einem kritischen Punkt die Voraussetzung von Aufgabe 23 erfüllt.

25. Zum Satz 11.9 über die inverse Funktion.

Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; x \mapsto \begin{cases} x + x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

(a) *Zeige,* dass f auf $\mathbb{R}$ differenzierbar mit $f'(0) = 1$, aber in $x = 0$ nicht stetig differenzierbar ist. *(2 Punkte)*

(b) *Zeige,* dass f auf einer Umgebung U von $x = 1$ injektiv ist. Was ist $(f|_U^{-1})'$ in diesem Punkt? *(3 Punkte)*

(c) *Zeige,* dass f auf keiner Umgebung von $x = 0$ injektiv ist. *(3 Punkte)*
[*Tipp:* Angenommen, $f_{|(-\varepsilon,\varepsilon)}$ wäre injektiv für ein $\varepsilon > 0$. Dann wäre $f|_{(-\varepsilon,\varepsilon)}$ nach Satz 6.4 streng monoton und deshalb würde $f'|_{(-\varepsilon,\varepsilon)} \geq 0$ bzw. $f'|_{(-\varepsilon,\varepsilon)} \leq 0$ gelten. Indem man nun für eine geschickt gewählte Nullfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Werte $f'(a_n)$ und $f''(a_n)$ ausrechnet erhält man einen Widerspruch.]

26. Zum Satz über die implizite Funktion.

(a) Wir betrachten eine stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(i) *Zeige*, dass die durch $f(x, y) = c$ lokal bestimmte implizite Funktion $y = g(x)$ einen kritischen Punkt in $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ besitzt, wenn

$$f(x,y) = c, \; \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \;\text{ und }\; \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \neq 0.$$ *(3 Punkte)*

[*Tipp:* Man differenziere die Abbildung $x \mapsto f(x, g(x))$ mit Hilfe der Kettenregel und benutze, dass $f(x, g(x)) = c$.]

(ii) Sei nun f zudem zweimal differenzierbar. *Zeige*, dass in (x, y) ein lokales Maximum vorliegt, wenn

$$\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)}{\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}} > 0. \qquad (\star)$$

(2 Punkte)

Bemerkung: Analog zeigt man dieselbe Aussage auch für ein lokales Minimum mit "< 0" anstelle von "> 0" in $(\star)$.

(b) Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; (x, y) \mapsto e^{2y} + y^3 + \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 1.$$

(i) *Bestimme*, für welche $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ die Gleichung $f(x, y) = 0$ lokal in der Form $y = g(x)$ auflösbar ist. *(2 Punkte)*

(ii) *Bestimme* mit Hilfe von (a) die kritischen Punkte von g und *entscheide* jeweils, ob es sich um ein lokales Maximum, ein lokales Minimum oder weder noch handelt. *(1 Punkte)*

(c) *Zeige,* dass man die Schnittmenge $S \subset \mathbb{R}^3$ der beiden Niveaumengen, die durch

$$x^2 - xy + y^2 - z^3 = 0 \quad \text{und} \quad e^{y-x} - z = 0$$

gegeben sind, in der Nähe des Punktes $(1, 1, 1) \in S$ durch eine Kurve in Abhängigkeit von x parametrisieren kann, d.h. dass es eine offene Umgebung $\mathcal{O}$ von 1 in $\mathbb{R}$ und eine offene Umgebung U' von $(1, 1, 1)$ in $\mathbb{R}^3$ sowie eine stetig differenzierbare Abbildung $\alpha : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^2$ (eine "Kurve") gibt, so dass gilt:

$$S \cap U' = \{\, (t, \alpha(t)) \mid t \in \mathcal{O} \,\}$$ *(3 Punkte)*

Die Lösungen sind bis Donnerstag, den 25. April 2024, um 10:00 Uhr in die beschrifteten Briefkästen in A5 einzuwerfen oder per Mail an eure Tutoren zu senden.