Martin Schmidt
Nicolas A. Hasse

Analysis II

11. April 2024

7. Übung

20. Interpretation von ∇f

Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ in $x \in \mathbb{R}^n$ differenzierbar. Dann ist die Zeilenvektor $\nabla f(x)$ eine Darstellung-matrix von $f'(x)$ auf die Standardbasis von $\mathbb{R}^n$. *Zeige*, dass für jeden Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ mit $\|v\| = 1$ gilt:

$$-\|\nabla f(x)\| \ \leq \ \nabla f(x) \cdot v \ \leq \ \|\nabla f(x)\| \, . \tag{$\star$}$$

Zeige zudem, dass für $\nabla f(x) \neq 0$ in $(\star)$ in der linken bzw. rechten Ungleichung Gleichheit gilt, wenn $v = -\frac{\nabla f(x)}{\|\nabla f(x)\|}$ bzw. $v = \frac{\nabla f(x)}{\|\nabla f(x)\|}$ ist. *(2 Punkte)*

[*Hinweis:* Cauchy-Schwarzsche Ungleichung]

Interpretation: $\nabla f(x)$ gibt die Richtung und den Betrag des größten Anstiegs von f.

21. Weitere Untersuchung.

Betrachten Sie die Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ aus Aufgabe 18 (b):

$$f(x, y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2.$$

Die kritischen Punkte von f sind $(0, 0), (-5/3, 0), (-1, 2), (-1, -2)$. Hier ist das Ganze als Graph: https://www.math3d.org/QaCIDWpL. In dieser Aufgabe sei $\mathbf{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Das Taylorpolynom ist im Satz 10.29 definiert. Das Taylorpolynom in $\mathbf{x}_0$ der Ordnung 0 ist einfach das Wert $f(\mathbf{x}_0)$. Das Taylorpolynom in $\mathbf{x}_0$ der Ordnung 1 ist

$$\begin{aligned} T_{1,\mathbf{x}_0}(\mathbf{x}) &:= \frac{1}{0!} f^{(0)}(\mathbf{x}_0) + \frac{1}{1!} f^{(1)}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \\ &= f(\mathbf{x}_0) + f'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \\ &= f(\mathbf{x}_0) + \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \end{aligned}$$

(a) Zeige, dass der Taylorpolynom von unserem f in $\mathbf{x}_0 = (0, 1)$ der Ordnung 1 ist $T_{1,(0,1)}(x, y) = -1 + x + 2y$. *(2 Punkte)*

(b) Berechne $T_{1,(-5/3,0)}(x, y)$. *(1 Punkt)*

(c) Was ist die geometrische Interpretation von $T_{1,\mathbf{x}_0}(\mathbf{x})$? Man könnte math3d.org und (a) und (b) zum Hilfe benutzen. *(1 Punkt)*

Das Taylorpolynom in $\mathbf{x}_0$ der Ordnung 2 ist

$$\begin{aligned} T_{2,\mathbf{x}_0}(\mathbf{x}) &:= \frac{1}{0!} f^{(0)}(\mathbf{x}_0) + \frac{1}{1!} f^{(1)}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + + \frac{1}{2!} f^{(2)}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0, \mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \\ &= f(\mathbf{x}_0) + f'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \frac{1}{2} f''(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0, \mathbf{x} - \mathbf{x}_0). \end{aligned}$$

Nach Definition 10.26 ist die Darstellungmatrix von $f''(x)$ auf die Standardbasis von $\mathbb{R}^n$ die Hessematrix:

$$\operatorname{Hess}(f)(\mathbf{x}_0) := \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0) \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\mathbf{x}_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\mathbf{x}_0) \end{pmatrix}$$

Also gilt mit Matrizen

$$T_{2,\mathbf{x}_0}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^T \cdot \operatorname{Hess}(f)(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$$

(d) Zeige, dass in $\mathbf{x}_0 = (a, b)$ ist $\operatorname{Hess}(f)(\mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} 12a + 10 & 2b \\ 2b & 2a + 2 \end{pmatrix}$ *(2 Punkte)*

(e) Berechne daher $T_{2,\mathbf{x}_0}(\mathbf{x})$ in $\mathbf{x} = (0, 1)$, $\mathbf{x}_0 = (-5/3, 0)$ und $\mathbf{x}_0 = (0, 0)$. *(3 Punkte)*

(f) Was kann man über $T_{2,\mathbf{x}_0}(\mathbf{x})$ sagen, wenn $\mathbf{x}_0$ ein kritischer Punkt ist? *(1 Punkt)*

22. Zu Satz 10.27: Hinreichendes Kriterium für lokale Extremwerte.

Es sei $\beta : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform nach Definition 10.20 und Satz 10.22. Wir wollen zeigen, dass es ein $\delta > 0$ gibt, so dass $\beta(x, x) \geq \delta \|x\|^2$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$, wenn β *positiv definit* ist. Positiv definit heißt $\beta(x, x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

(a) Warum muss β stetig sein? *(1 Bonuspunkt)*

(b) Setze voraus, dass β positiv definit ist. Betrachten $W = \{\beta(v, v) \mid v \in \mathbb{R}^n \text{ mit } \|v\| = 1\}$. Warum hat diese Menge ein Minimum δ mit $\delta > 0$? *(2 Punkte)*

(c) Zeige dann, dass $\beta(x, x) \geq \delta \|x\|^2$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. *(2 Punkte)*

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge, $f : U \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion und $x_0 \in U$ ein kritischer Punkt von f. Wir wissen, dass $f''(x_0)$ eine symmetrische Bilinearform ist.

(d) *Beweise* man: Wenn $f''(x_0)(x, x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt, so besitzt f in x_0 ein striktes lokales Minimum. *(2 Punkte)*

Bemerkung 1. Wenn $f''(x_0)(x, x) < 0$ für einen kritischen Punkt x_0, betrachte $g(x) = -f(x)$. Dann ist $g' = -f'$ und $g'' = -f''$. Es folgt dann, dass x_0 auch ein kritischer Punkte von g ist und ein lokales Minimum von g. Deshalb ist es ein striktes lokales Maximum von f.

Bemerkung 2. Diese Verschärfung von Satz 10.27 gilt nicht, wenn f auf einem unendlich-dimensionalen normierten Vektorraum definiert ist, siehe Beispiel 10.28.

23. Banach'scher Fixpunktsatz

(a) Wir betrachten $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$ und

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Zeige, dass f die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt. *Berechne* zudem die ersten zwei Schritte der Fixpunktiteration für $x_0 = (16, 16)^T$ sowie den Fixpunkt von f. *(3 Punkte)*

(b) *Das Inverse der komplexen Exponentialfunktion.*

1. *Bestimme* für $z = x + \iota y \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ eine Abbildung $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y)) := (\mathrm{Re}(e^z), \mathrm{Im}(e^z))$. *(2 Punkte)*
2. *Zeige*, dass F bei allen $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ die Voraussetzungen des Satzes der inversen Funktion erfüllt und *bestimme* die Ableitung der Umkehrfunktion von F bei $(a, b) = F(x, y)$. *(2 Punkte)*

(c) *Bestimme* die Menge S aller Punkte $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$, so dass durch den Satz der impliziten Funktion auf einer Umgebung von (x_0, y_0) eine Funktion $\varphi(x, y)$ existiert mit $z_0 = \varphi(x_0, y_0)$ und alle Lösungen von

$$f(x, y, z) = xy^2 + 4x^2z + z^2y^2 = 0$$

von der Form $(x, y, \varphi(x, y))$ sind. *Bestimme* zudem den Gradienten $\nabla\varphi(x, y)$ für einen Punkt der zu S gehört. *(5 Zusatzpunkte)*

Die Lösungen sind bis Donnerstag, den 18. April 2024, um 10:00 Uhr in die beschrifteten Briefkästen in A5 einzuwerfen oder per Mail an eure Tutoren zu senden.