Martin Schmidt
Nicolas A. Hasse

Analysis II

20. März 2024

6. Übung

18. Kritische Punkte, Gradient, Rotation und Divergenz.

(a) *Berechne* die Richtungsableitung der Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ (x, y, z) \mapsto x^3 + e^y \sin z$$

an der Stelle $x_0 = (1, \log 3, \frac{\pi}{3})$ in Richtung $v = (3, -2, 6)$. *(3 Punkte)*

(b) *Berechne* den Gradienten und *bestimme* alle kritischen Punkte der folgenden Abbildungen:

(i) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$ *(3 Punkte)*

(ii) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto y\ \sin(x)$ *(3 Punkte)*

(iii) $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ (x, y, z) \mapsto x^4 + 2y^2 + 2z^2 + 4xz$ *(3 Punkte)*

(c) Berechne die Ebenendarstellung $E : ax + by + cz = d$ der lineare Approximation von

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto x^3 - 5xy^2 - 3y + 4$$

an der Stelle $(x_0, y_0) = (2, 1)$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ und $z = T_{1,(x_0,y_0)}(x, y)$. *(4 Bonuspunkte)*
[*Tipp:* Die lineare Approximation von f an (x_0, y_0) ist gleich dem Taylorpolynom erster Ordnung von f an (x_0, y_0).]

(d) *Berechne* die Rotation und die Divergenz des Vektorfelds

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y, z) \mapsto (x^2 y, y^2 z, xz)\ .$$ *(2+2 Punkte)*

19. Mehr Rechenregeln für die Ableitung.

Wir betrachten den $\mathbb{R}^n$ mit dem Skalarprodukt $x \cdot y = \sum_{k=1}^n x_k\, y_k$ und der hiervon induzierten Norm $\|x\|_2 = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}$. Wir nennen $e_k = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ der k-te Standardeinheitsvektor des $\mathbb{R}^n$.

(a) Zeige, dass $\frac{\partial x}{\partial x_k} = e_k$. *(1 Punkt)*

(b) Seien $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar. Zeige, dass die Ableitung von $f \cdot g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, der durch $x \mapsto f(x) \cdot g(x)$ definiert,

$$\frac{\partial}{\partial x_k}(f \cdot g) = f \cdot \frac{\partial g}{\partial x_k} + \frac{\partial f}{\partial x_k} \cdot g$$

ist. *(2 Punkte)*

(c) Sei die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ x \mapsto \|x\|$$

gegeben. *Zeige*, dass $\nabla f(x) = \frac{x}{\|x\|}$ für $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und *begründe*, warum f an $x = 0$ in keine Richtung $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ differenzierbar ist. *(2 Punkte + 2 Bonuspunkte)* [*Tipp:* Um nachzuweisen, dass f an 0 nicht differenzierbar ist, zeige man, dass die Richtungsableitung von f an 0 in keine Richtung $v \in \mathbb{R}^n$ existiert.]

(d) Sei nun die Abbildung

$$h : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n,\ x \mapsto \frac{x}{\|x\|}$$

gegeben. *Zeige*, dass für die k-te partielle Ableitung von h an einer Stelle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt, dass

$$\frac{\partial h}{\partial x_k}(x) = \frac{1}{\|x\|}\, e_k - \frac{x_k}{\|x\|^3}\, x.$$

(2 Punkte)

(e) *Folgere* aus (ii), dass h differenzierbar ist und dass für $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ sowie $v \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$h'(x)v = \frac{1}{\|x\|}\, v - \frac{x \cdot v}{\|x\|^3}\, x\ .$$

Dabei bedeutet der Ausdruck $h'(x)v$ die Anwendung der linearen Abbildung $h'(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ auf den Richtungsvektor v. *(2 Punkte)*

(f) Es seien X_1, X_2, Y normierte Vektorräume und $\beta : X_1 \times X_2 \to Y$ eine stetige, bilineare Abbildung. *Zeige*, dass β als Abbildung des Produkt-Vektorraums $X_1 \times X_2$ differenzierbar ist und dass für alle $(x_1, x_2), (v_1, v_2) \in X_1 \times X_2$ gilt:

$$\beta'(x_1, x_2)(v_1, v_2) = \beta(v_1, x_2) + \beta(x_1, v_2)\ .$$

(5 Bonuspunkte)

[Tipp. Entweder man imitiert den Beweis von Satz 10.4(ii), oder man wendet Satz 10.11 an.]

Die Lösungen sind bis Donnerstag, den 11. April 2024, um 10:00 Uhr in die beschrifteten Briefkästen in A5 einzuwerfen oder per Mail an den zugeordneten Tutor zu senden.