Martin Schmidt
Nicolas A. Hasse

Analysis II

13. März 2024

5. Übung

14. Ableitungen im Mehrdimensionalen.

(a) Man *untersuche* für die folgenden Funktionen $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jeweils, an welchen Stellen f partiell differenzierbar ist, und *berechne* dort $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$.

- **(i)** $f(x, y) = x^3 + y^3 - 9xy + 5$ *(2 Punkte)*
- **(ii)** $f(x, y) = \ln \left|-\frac{1}{3}x^3 + x - y^3\right|$ *(2 Punkte)*
- **(iii)** $f(x, y) = \sin(x + y) \cdot \sin(x - y)$ *(2 Punkte)*

(b) Es sei

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \mapsto (y^2 \exp(x), \cos(2x - y)).$$

Begründe, warum f differenzierbar ist, und *berechne* $f'\left(0, \frac{3}{2}\pi\right)$. *(3 Punkte)*

(c) Es sei

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y, z) \mapsto (x - y, x^3 + y^3 + z^2) \quad \text{und} \quad g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \mapsto (x + y, xy)\ .$$

Berechne $(g \circ f)'$. *(2 Punkte)*

(d) *Berechne* den Gradienten von f für $(x, y) \neq (0, 0)$ sowie die Richtungsableitungen von

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y - y^3 x}{x^2 + y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

an $(x, y) = (0, 0)$ in Richtung $(v, w) \in \mathbb{R}^2$ und an $(x, y) = (1, 1)$ in Richtung $(v, w) = (3, 4)$.
(3 Bonuspunkte)

15. Über die Lipschitz-Stetigkeit differenzierbarer Funktionen.

Es seien X, Y normierte Vektorräume, $U \subset X$ eine offene und konvexe Teilmenge und $f : U \to Y$ eine differenzierbare Funktion, so dass $\|f'\|$ auf U beschränkt ist.

(a) *Zeige,* dass f Lipschitz-stetig ist. *(2 Punkte)*

(b) *Beweise oder widerlege* die Aussage aus (a), wenn U nicht als konvex vorausgesetzt wird.
(20 Zusatzpunkte)

Hinweis: Eine Menge $U \subset X$ heißt *konvex*, wenn für alle $a, b \in U$ gilt, dass die Menge $\{a(1 - t) + bt \mid t \in [0, 1]\}$ ganz in U enthalten ist.

16. Ableitung affiner Abbildungen.

Es seien X, Y normierte Vektorräume und $f : X \to Y$ eine differenzierbare Abbildung.

(a) *Beweise:* Ist $f'(x) = 0 \in \mathcal{L}(X, Y)$ für jedes $x \in X$, so ist f konstant. *(2 Punkte)*
[*Tipp:* Schrankensatz.]

(b) *Beweise:* Ist f' konstant, d.h. gibt es ein $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ mit $f'(x) = A$ für jedes $x \in X$, so gibt es ein $c \in Y$ mit $f(x) = A(x) + c$ für jedes $x \in X$. *(2 Punkte)*
[*Tipp:* $x \mapsto f(x) - A(x)$.]

17. Der Funktionenraum $C_b([-1, 1], \mathbb{R})$.

Mit $C_b([-1, 1], \mathbb{R})$ bezeichnen wir den Banachraum der stetigen und beschränkten Funktionen $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$. Für $f \in C_b([-1, 1], \mathbb{R})$ definieren wir eine Funktion $F(f) : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ durch

$$F(f)(x) := f(\tfrac{x}{3}) \quad \text{für } x \in [-1, 1]. \tag{$\star$}$$

(a) *Zeige*, dass $F \in \mathcal{L}(C_b([-1, 1], \mathbb{R})) = \mathcal{L}(C_b([-1, 1], \mathbb{R}), C_b([-1, 1], \mathbb{R}))$. *(3 Punkte)*

(b) *Zeige:* F ist Lipschitz-stetig. Als Lipschitz-Konstante kann $L = 1$ gewählt werden. *(2 Punkte)*

(c) *Beweise oder widerlege:* F ist eine Isometrie, d.h. es gilt

$$\|F(f)\|_\infty = \|f\|_\infty$$

für alle $f \in C_b([-1, 1], \mathbb{R})$. *(3 Punkte)*

Die Lösungen sind bis Donnerstag, den 21. März 2024, um 10:00 Uhr in die beschrifteten Briefkästen in A5 einzuwerfen oder per Mail an den zugeordneten Tutor zu senden.