Martin Schmidt
Nicolas A. Hasse

Analysis II

06. März 2024

4. Übung

11. Stetigkeit und Linearität

(a) Untersuche die folgenden Abbildungen auf Linearität und Stetigkeit. Berechne gegebenenfalls die Operatornorm.

(i) Seien $0 < r \in \mathbb{R}$ und $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f_1 : (\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_2) &\longrightarrow (\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_2) \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} rx \\ r\cos(t)y - r\sin(t)z \\ r\sin(t)y + r\cos(t)z \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(4 Punkte)

(ii)

$$\begin{aligned} f_2 : (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2) &\longrightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|) \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\mapsto \begin{cases} \frac{\sqrt{|x|}y}{|x|+|y|} & \text{für} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{aligned}$$

(2 Punkte)

(b) Seien V, W normierte Räume, Zeige, dass für die Operatornorm eines $A \in \mathcal{L}(V, W)$ gilt:

$$\begin{aligned} \|A\|_{op} &:= \sup\big\{\|Av\|_W \mid \|v\|_V \leq 1\big\} \\ &= \sup\big\{\|Av\|_W \mid \|v\|_V = 1\big\} \\ &= \sup\big\{\tfrac{\|Av\|_W}{\|v\|_V} \mid v \in V \setminus \{0\}\big\} \\ &= \inf\big\{C \in \mathbb{R} \ : \ \|Av\| \leq C\|v\| \mid v \in V\big\}. \end{aligned}$$

(3 Bonuspunkte)

12. Die Exponentialfunktion für Matrizen.

Wir bezeichnen im Folgenden mit $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ auch den Raum der reellen $(n \times n)$-Matrizen. Wie in der Vorlesung gezeigt wurde, konvergiert für jedes $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ die Potenzreihe $\exp(A) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$ in $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Die Abbildung $\exp : \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ heißt die *(matrixwertige) Exponentialabbildung.*

(a) Seien $t, s \in \mathbb{R}$. *Berechne* $\exp(A)$ für die folgenden $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$:

(i) $A = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}$

(ii) $A = \begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix}$

(iii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}$

(1+1+2 Punkte)

[*Tipp:* Man rechne jeweils zuerst A^n für $n \leq 3$ aus, um auf Ideen zu kommen, wie A^n allgemein aussieht.]

(b) *Berechne* $e^A \cdot e^B$ und $e^B \cdot e^A$ für

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

(2 Punkte)

(c) Sei $A, B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ mit $A \cdot B = B \cdot A$. *Zeige:* $\exp(A + B) = \exp(A) \cdot \exp(B)$. Hierbei darf ohne Beweis benutzt werden, dass auch für miteinander kommutierende Matrizen die binomische Formel $(A + B)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} A^j B^{k-j}$ gilt. *(2 Punkte)*

(d) *Folgere* aus (c), dass $\exp(A)$ stets invertierbar ist mit $\exp(A)^{-1} = \exp(-A)$.

(1 Punkt)

(e) *Zeige*, dass für beliebiges $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ und invertierbares $P \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ gilt, dass $e^{P^{-1}AP} = P^{-1}e^A P$ gilt und *folgere* hieraus, dass für diagonalisierbares $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ auch e^A diagonalisierbar ist.

(2 Punkte)

13. Derivationen.

Sei V ein Banachraum. Für $A \in \mathcal{L}(V)$ betrachten wir die lineare Abbildung

$$D_A : \mathcal{L}(V) \to \mathcal{L}(V), \; L \mapsto A \cdot L - L \cdot A.$$

(a) *Berechne* $D_A(L)$ für $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ und $L = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$. *(1 Punkt)*

(b) *Zeige*, dass D_A eine Derivation auf $\mathcal{L}(V)$ ist, d.h. dass für alle $L_1, L_2 \in \mathcal{L}(V)$ gilt:

$$D_A(L_1 \cdot L_2) = D_A(L_1) \cdot L_2 + L_1 \cdot D_A(L_2)\,.$$

(1 Punkt)

(c) Sei $A \in \mathcal{L}(V)$. Dann sind Links- und Rechtsmultiplikation $\ell(A)$ und $r(A)$ in $\mathcal{L}(\mathcal{L}(V))$ definiert als

$$\ell(A) : \mathcal{L}(V) \to \mathcal{L}(V), \quad L \mapsto A \cdot L$$

und

$$r(A) : \mathcal{L}(V) \to \mathcal{L}(V), \quad L \mapsto L \cdot A.$$

Zeige, dass für $A, B \in \mathcal{L}(V)$ gilt

$$r(B)\ell(A) = \ell(A)r(B).$$

(1 Punkt)

(d) *Zeige*, dass $\exp(\ell(A)) = \ell(\exp(A))$ und dass $\exp(r(A)) = r(\exp(A))$.
Tipp: Zeige, dass $\ell(A^n) = (\ell(A))^n$ bzw. $r(A^n) = (r(A))^n$ und benutze dieses.

(2 Punkte)

(e) *Zeige* mit Hilfe von Aufgabe 12(c) sowie (c) und (d), dass

$$\exp(D_A)L = \exp(A) \cdot L \cdot \exp(-A).$$

Dabei wird $\exp(D_A)$ in $\mathcal{L}(\mathcal{L}(V))$ und $\exp(\pm A)$ in $\mathcal{L}(V)$ gebildet. *(2 Punkte)*

Die Lösungen sind bis Donnerstag, den 14. März 2024, um 10:00 Uhr in die beschrifteten Briefkästen in A5 einzuwerfen oder per Mail an den zugeordneten Tutor zu senden.