

3. Übung

8. Entweder oder, und, keins von beidem.

(a) Man *untersuche*, ob die folgenden Teilmengen von \mathbb{R}^2 offen oder abgeschlossen sind:

(i) $M_1 := \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^4 + y^4 \leq 1 \}$. (2 Punkte)

(ii) $M_2 := \{ (\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}) \in \mathbb{R}^2 \mid n \in \mathbb{N} \}$. (2 Punkte)

(iii) $M_3 := \{(0, 0)\} \cup M_2$. (1 Punkte)

(b) Es sei nun (X, d) ein metrischer Raum und $f_1, \dots, f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen.

(i) *Zeige*: $\{ x \in X \mid f_1(x) = \dots = f_n(x) = 0 \}$ ist abgeschlossen in X . (3 Punkte)

(ii) *Zeige*: $\{ x \in X \mid f_1(x) > 0, \dots, f_n(x) > 0 \}$ ist offen in X . (3 Punkte)

(c) Man *belege durch ein Beispiel*, dass die Aussage aus (b)(ii) falsch wird, wenn man unendlich viele stetige Funktionen $f_1, f_2, f_3, \dots : X \rightarrow \mathbb{R}$ betrachtet. Wie steht es mit der Aussage aus (b)(i)? (2 Bonuspunkte)

9. Stetigkeit steckt in den Komponenten.

Sei $n, m \in \mathbb{N}$. Wir betrachten in dieser Aufgabe den \mathbb{K}^n und den \mathbb{K}^m jeweils mit der von einer Norm induzierten Metrik. Die Wahl der Norm ist dabei für die folgenden Stetigkeitsuntersuchungen beliebig, weil auf diesen Räumen nach Satz 9.37 je zwei Normen zueinander äquivalent sind.

(a) Sei $k \in \{1, \dots, n\}$. *Zeige*, dass die “ k -te Projektion”, d.h. die Abbildung

$$\text{pr}_k : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}, (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_k$$

Lipschitz-stetig ist. (2 Punkte)

[*Tipp*: Beim betrachten einer bestimmten Norm auf \mathbb{K}^n ist diese Aufgabe schnell gelöst.]

(b) Sei $f : \mathbb{K}^m \rightarrow \mathbb{K}^n$ eine Abbildung. Für $k \in \{1, \dots, n\}$ sei $f_k := \text{pr}_k \circ f : \mathbb{K}^m \rightarrow \mathbb{K}$ die “ k -te Komponente” von f . Man definiert oft f durch $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$.

Zeige: f ist genau dann stetig, wenn f_k für alle $k \in \{1, \dots, n\}$ stetig ist.

[*Tipp*: Aufgabenteil (a) und Aufgabe 4.] (4 Punkte)

(c)

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{falls } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = y = 0 \end{cases}$$

Zeige, dass $x \mapsto f(x, 0)$ und $y \mapsto f(0, y)$ Abbildungen in 0 stetig sind, aber dass f nicht in $(0, 0)$ stetig ist. (2 Bonuspunkte)

10. Ableiten und Integrieren als lineare Operatoren auf Funktionenräumen.

Sei $a < b$. Wir betrachten den Vektorraum $C([a, b], \mathbb{R})$ der stetigen Funktionen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ als normierten Raum mit der Norm $\|f\|_\infty := \sup\{|f(x)| \mid x \in [a, b]\}$. Weiter sei $C^1([a, b], \mathbb{R})$ der in Aufgabe 1 (d) definierte Unterraum von $C([a, b], \mathbb{R})$. Für $f \in C^1([a, b], \mathbb{R})$ bezeichnen wir mit $f' : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ die stetige Fortsetzung der Ableitung von f auf $[a, b]$.

Wir untersuchen den "Differentialoperator" von $C^1([a, b], \mathbb{R})$, d.h. die Abbildung

$$D : C^1([a, b], \mathbb{R}) \rightarrow C([a, b], \mathbb{R}), f \mapsto f'.$$

(a) Zeige, dass die Abbildung D linear ist und bestimme ihren Kern. (2 Punkte)

(b) Zeige, dass D an keiner Stelle $f \in C^1([a, b], \mathbb{R})$ stetig ist. (3 Punkte)

[Tipp: Zu zeigen ist, dass ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass für jedes $\delta > 0$ eine Funktion $g \in C^1([a, b], \mathbb{R})$ existiert mit $\|f - g\|_\infty < \delta$ und $\|D(f) - D(g)\|_\infty \geq \varepsilon$. Dabei kann hier $\varepsilon := 1$ gewählt werden. Um eine Idee zu bekommen, wie eine geeignete Funktion g aussehen könnte, kann man noch einmal den Tipp zu Aufgabe 1(d)(ii) anschauen.]

Nun betrachten wir den "Integraloperator" $I : C([a, b], \mathbb{R}) \rightarrow C^1([a, b], \mathbb{R}), f \mapsto I(f)$, der durch

$$I(f)(x) := \int_a^x f(t) dt \quad \text{für } x \in [a, b]$$

gegeben ist.

(c) Zeige, dass die Abbildung I linear ist und bestimme ihren Kern. (3 Punkte)

(d) Zeige, dass I Lipschitz-stetig ist. (3 Bonuspunkte)

(e) Zeige, dass I ein "Rechts-Inverses" von D ist, d.h. dass

$$D \circ I : C([a, b], \mathbb{R}) \rightarrow C([a, b], \mathbb{R}), f \mapsto f$$

gilt und bestimme das Bild von D . (Kurzschreibweise: $D \circ I = \mathbb{1}_{C([a, b], \mathbb{R})}$.)

(4 Bonuspunkte)

(f) Zeige, dass

$$I \circ D : C^1([a, b], \mathbb{R}) \rightarrow C^1([a, b], \mathbb{R}), f \mapsto f - f(a)$$

und bestimme das Bild von I .

(4 Bonuspunkte)

(g) Zeige, dass

$$I : C([a, b], \mathbb{R}) \rightarrow \{f \in C^1([a, b], \mathbb{R}) \mid f(a) = 0\}$$

und

$$D : \{f \in C^1([a, b], \mathbb{R}) \mid f(a) = 0\} \rightarrow C([a, b], \mathbb{R})$$

zueinander inverse lineare Abbildungen sind.

(4 Bonuspunkte)

(h) Zeige, dass für die Abbildungen I und D aus (g) gilt, dass

$$\|I(f)'\|_\infty = \|f\|_\infty \quad \text{und} \quad \|D(f)\|_\infty = \|f'\|_\infty.$$

Folgere hieraus, dass $\|f'\|_\infty$ eine Norm auf $\{f \in C^1([a, b], \mathbb{R}) \mid f(a) = 0\}$ ist und dass I und D aus (g) Isometrien sind, wenn man die Menge $\{f \in C^1([a, b], \mathbb{R}) \mid f(a) = 0\}$ mit der durch $\|f'\|_\infty$ induzierten Metrik versieht. (6 Bonuspunkte)

Die Lösungen sind bis Donnerstag, den 7. März 2024, um 10:00 Uhr in die beschrifteten Briefkästen in A5 einzuwerfen oder per Mail an den zugeordneten Tutor zu senden.