Martin Schmidt
Nicolas A. Hasse

Analysis II

21. Februar 2024

2. Übung

4. Wie man's macht, man macht's richtig! Es sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge im $\mathbb{R}^3$. Wir schreiben das Element $x_k \in \mathbb{R}^n$ jeweils in "Komponenten", d.h. in der Form $x_k = (a_k, b_k, c_k)$ mit $a_k, b_k, c_k \in \mathbb{R}$. Die erste "Komponentenfolge" $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist eine Folge in $\mathbb{R}$. (b_k) und (c_k) heißen natürlich die zweite und dritte Komponentenfolge.

Zeige: Die Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann in $\mathbb{R}^n$ bezüglich der Maximumnorm $\|\cdot\|_\infty$, wenn die Komponentenfolgen konvergieren. Ist dies der Fall, so gilt

$$\lim_{k\to\infty} x_k = \big(\lim_{k\to\infty} a_k,\ \lim_{k\to\infty} b_k,\ \lim_{k\to\infty} c_k\big) \in \mathbb{R}^3 .$$ *(4 Punkte)*

5. Stetig in 2D.
Zeige, dass diese Funktionen stetig in 0 oder $(0,0)$ sind:

(a) $f : (\mathbb{R}, |\cdot|) \to (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2),\ t \mapsto (2t, t-1)$. *(2 Punkte)*

(b) $g : (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2) \to (\mathbb{R}, |\cdot|),\ (x,y) \mapsto x+y$. *(2 Punkte)*

(c) $h : (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2) \to (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2),\ (x,y) \mapsto (-y, x)$. *(2 Punkte)*

Zeige, dass diese Funktion nicht stetig in $(0,0)$ ist:

(d) $j : (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2) \to (\mathbb{R}, |\cdot|),\ (x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{x}{y} & \text{für } y \neq 0, \\ 1 & \text{für } y = 0. \end{cases}$ *(2 Bonuspunkte)*

[Tipp. Benutze Aufgabe 4 und Korollar 9.31(ii)]

6. Offen für Neues.

(a) Sei (X,d) ein metrischer Raum. *Zeige*, dass jeder offene Ball in (X,d) eine offene Menge in (X,d) ist. *(3 Punkte)*

(b) *Beweise oder widerlege:* Ist $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung zwischen metrischen Räumen X und Y und ist $K \subset Y$ kompakt, so ist auch $f^{-1}[K] \subset X$ kompakt. *(2 Punkte)*

(c) *Beweise oder widerlege:* Für jede Menge X ist die diskrete Metrik auf X (siehe Beispiel 9.2(i)) vollständig. *(2 Punkte)*

(d) *Gebe explizit* eine offene Überdeckung des Intervalls $(0,1)$ *an*, die keine endliche Teilüberdeckung besitzt.

(2 Punkte)

7. Eine konstruktive Alternative.

In Analysis I Schnitt 2.6 haben wir $\mathbb{N}, \mathbb{Z}.$ und $\mathbb{Q}$ konstruiert. In dieser Aufgabe wollen wir $\mathbb{R}$ als die Vervollständigung von $\mathbb{Q}$ konstruieren.

Sei dazu $\mathfrak{C}$ die Menge der Cauchyfolgen in $\mathbb{Q}$. Das heißt, eine Cauchyfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \in \mathbb{Q}$ für alle n, aber das Grenzwert muss nicht in $\mathbb{Q}$ liegen.

Wir definieren für zwei Cauchyfolgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\tilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{C}$ die Relation $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (\tilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genauso wenn $(x_n - \tilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist. Explizit: genauso wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ mit $\varepsilon \in \mathbb{Q}$ ein N existiert, so dass $|x_n - \tilde{x}_n| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$.

Wenn die Grenzwerte von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\tilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleich sind, ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (\tilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Aber unsere Definition spricht nicht über dem Grenzwert, also es funktioniert auch dann, wenn $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kein Grenzwert in $\mathbb{Q}$ hat.

(a) Zeige, dass durch "$\sim$" eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Cauchyfolgen definiert ist. *(2 Punkte)*

Die Äquivalenzklasse $[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}]$ ist die Menge aller Cauchyfolgen, denen zu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ äquivalent sind. Wir wollen noch nicht eine Metrik auf der Menge von Äquivalenzklassen $\mathfrak{C}/\sim$ geben, weil die Definition von einer Metrik $\mathbb{R}$ benutzt. Aber wir können ihr das Struktur eines angeordneten Körpers (Analysis I Kapital 2 Axiome A1-A4) geben, und zeigen das sie A5 auch erfüllt. Wir nennen dann $\mathbb{R} = \mathfrak{C}/\sim$, weil der Körper mit A1-A5 eindeutig ist.

(b) Zeige, dass die Addition und die Multiplikation von zwei Cauchyfolgen selbst eine Cauchyfolge ist. Benutze nicht Eigenschaften von $\mathbb{R}$.
[Tipp. Cauchyfolgen sind beschränkt] *(2 Punkte)*

(c) Seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (\tilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (\tilde{y}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolgen. Zeige, dass $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (\tilde{x}_n + \tilde{y}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Zeige außerdem, dass $(x_n \cdot y_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (\tilde{x}_n \cdot \tilde{y}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. *(2 Punkte)*

Zusammen zeigen (b) und (c), dass die Addition und Multiplikation definiert durch

$$\begin{cases} [(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] + [(y_n)_{n\in\mathbb{N}}] := [(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}] \\ [(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] \cdot [(y_n)_{n\in\mathbb{N}}] := [(x_n \cdot y_n)_{n\in\mathbb{N}}] \end{cases}$$

jeweils wohldefiniert auf die Menge der Äquivalenzklassen $\mathfrak{C}/\sim$ ist.

(d) Zeige, dass die Körperaxiome A1-A3 für $\mathfrak{C}/\sim$ erfüllt sind. *(2 Bonuspunkte)*

(e) Wir definieren eine Ordnungsrelation auf $\mathfrak{C}/\sim$ wie folgt: Es gilt $[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] > [(y_n)_{n\in\mathbb{N}}]$, genau dann, wenn es ein $\varepsilon > 0$ und ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit $x_n - y_n \geq \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Zeige, dass dadurch eine wohldefinierte (!) Ordnungsrelation auf $\mathfrak{C}/\sim$ definiert, die Axiom A4 erfüllt. *(2 Bonuspunkte)*

(f) Definiere die Einbettungsabbildung,

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{Q} &\to \mathfrak{C}/\sim \\ q &\mapsto [(q)_{n\in\mathbb{N}}], \end{aligned}$$

wobei für jedes $q \in \mathbb{Q}$, $(q)_{n\in\mathbb{N}}$ die konstante (Cauchy-)folge $q_n = q$ bezeichnet. Diese Abbildung ist offenbar injektiv. Man kann ohne Beweis benutzt, dass die natürlichen Zahlen in $\mathfrak{C}/\sim$ (nach Definition 2.29) das Bild von $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$ unter Φ sind.

Zeige, dass $\mathfrak{C}/\sim$ archimedisch ist.

[Tipp. jede Cauchyfolge ist beschränkt.] *(2 Bonuspunkte)*

(g) Zeige, dass $\mathfrak{C}/\sim$ das Intervallschachtelungsprinzip (Satz 2.50) erfüllt: Für alle Intervalle $I_n = [a_n, b_n] := \{c \in \mathfrak{C}/\sim \mid a_n \leq c \leq b_n\}$ mit:

- $a_n, b_n \in \mathfrak{C}/\sim$ und $a_n < b_n$. Das heißt: für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $a_n = [(a_{n,k})_{k\in\mathbb{N}}]$ eine Äquivalenzklasse von einer Cauchyfolge in $\mathbb{Q}$.
- $I_{n+1} \subset I_n$
- Für jedes $k \in \mathbb{N}$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $b_n - a_n < \Phi(k^{-1})$

folgt es, dass der Durchschnitt $\cap_{n\geq 1} I_n$ genau eine Punkt von $\mathfrak{C}/\sim$ enthält.

(3 Bonuspunkte)

[*Tipp:* Weil (f) zeigt, dass $\Phi(\mathbb{Q})$ dicht in $\mathfrak{C}$ ist, können wir $p_n, q_n \in \mathbb{Q}$ finden, so dass $a_n < \Phi(p_n) < a_{n+1}$ und $b_{n+1} < \Phi(q_n) < b_n$. Seien $J_n = [\Phi(p_n), \Phi(q_n)]$ Intervalle in $\mathfrak{C}/\sim$. Bemerke $\bigcap I_n = \bigcap J_n$ und $\{J_n\}$ hat die drei Eigenschaften als $\{I_n\}$. Zeige, $x = (p_k)$ eine Cauchyfolge ist und in dem Durchschnitt liegt.]

Das Intervallschachtelungsprinzip ist äquivalent zu Axiom A5 (Vollständigkeitsaxiom), also wir haben gezeigt, dass $\mathfrak{C}/\sim$ A5 hat.

Bemerkung: Wegen der Funktionsvorschrift von Φ ist das Bild $\Phi[\mathbb{Q}]$ als eine "Kopie" von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ zu verstehen. In dem man also $\Phi[\mathbb{Q}]$ mit $\mathbb{Q}$ identifiziert, kann man daher $\mathbb{R}$ als eine Vervollständigung von $\mathbb{Q}$ auffassen. Diese ist eindeutig und daher hat man auf diese Weise $\mathbb{R}$ konstruktiv eingeführt.

Die Lösungen sind bis Donnerstag, den 29. Februar 2024, um 10:00 Uhr in die beschrifteten Briefkästen in A5 einzuwerfen oder per Mail an den zugeordneten Tutor zu senden.