

Übung 9

Lagrange Formalismus und Niveaumengen

24. April 2024

Aufgabe 23

- a) Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und es gelte

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \inf \{ |f(x)| \mid \|x\| = r \} = \infty.$$

Zeige, dass jede Niveaumenge von f kompakt ist.

- b) Skizziere für $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x^2 - y^2$ die Höhenlinien $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = c\}$ für $c = -1, 0, 1$. Entscheide zudem, ob diese Höhenlinien glatt sind.

Aufgabe 24

Verwende den Lagrange-Formalismus, um die Extremwerte der Funktion $f(x, y) = xy$ unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 1$ zu bestimmen.

Aufgabe 25 Betrachte die Funktion $f(x, y) = (x + y)^2 - (x - y)$ auf der Niveaumenge $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x, y) = x^3 - y^3 = 0\}$.
Kann man die Extrema mit dem Lagrangeformalismus bestimmen ?

Aufgabe 26 Bestimme die Extrema der Funktion $f(x, y, z) = x + y - z$ unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.