

# Übung 7

## Nichtlineare Analysis

10. April 2024

## Aufgabe 16

Sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  induktiv definiert durch

$$x_0 \in [0, \infty), \quad x_{n+1} = \sqrt{x_n + 1}.$$

Zeige, dass  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  konvergiert und bestimme den Grenzwert.

## Aufgabe 17

Zeige, dass das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}x &= \frac{1}{2}y \\ y &= \frac{1}{2}\exp(-x)\end{aligned}$$

genau eine Lösung auf  $[0, \infty) \times [0, \infty) \subset \mathbb{R}^2$  hat.

[Tipp: Betrachte die Metrik, die durch das kartesische Produkt induziert wird.]

**Aufgabe 18** Sei  $b \geq 1 \geq a > 0$ . Wir betrachten  $C([a, b], [a, b])$  den Raum der stetigen Selbstabbildungen auf  $[a, b]$ .

(a) Zeige, dass die Abbildung

$$H: C([a, b], [a, b]) \rightarrow C([a, b], [a, b])$$
$$f \mapsto H(f) = \sqrt{f}$$

wohldefiniert ist.

(b) Sei zusätzlich  $a > \frac{1}{4}$ . Zeige, dass  $H$  genau einen Fixpunkt besitzt.

## Aufgabe 19

Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine bijektive und stetig differenzierbare Abbildung. Beweise oder widerlege, dass  $f^{-1}$  differenzierbar ist.

*Tipp:* Benutze den Satz der impliziten Funktion 11.9