Übung 6

Differenzierbarkeit und Gradient

20. März 2024

Aufgabe 13
Sei $\mathcal{A}$ eine normierte Algebra und $A, B \in \mathcal{A}$. Wir betrachten die Abbildungen

$$\begin{aligned} f_2 &: \mathcal{A} \to \mathcal{A}, \quad A \mapsto A^2, \\ f_3 &: \mathcal{A} \to \mathcal{A}, \quad A \mapsto A^3, \\ f_n &: \mathcal{A} \to \mathcal{A}, \quad A \mapsto A^n \text{ mit } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

a) Begründe, warum f_i für $i = 2, 3, n$ differenzierbar ist. Gebe zudem den Raum an, der $f_i'(A)$ als Element enthält.
b) Bestimme die Ableitung von f_i für $i = 2, 3, n$ an der Stelle A in Richtung B.

Aufgabe 14

Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, $(a, b) \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $c : (a, b) \to \mathbb{R}^n$ eine *Niveaulinie* von f, das heißt eine differenzierbare Abbildung, so dass die Funktion $f \circ c : (a, b) \to \mathbb{R}$ konstant ist. Zeige, dass für $t \in (a, b)$ gilt:

$$\nabla f(c(t)) \cdot c'(t) = 0$$

mit $c'(t) = (c_1'(t), \dots, c_n'(t))$. *Interpretation.* Der Gradient $\nabla f(x)$ steht senkrecht auf der „Niveaufläche“ $f^{-1}[\{f(x)\}]$ von f. (Beachte, dass c eine Kurve in dieser Niveaufläche beschreibt.)

Aufgabe 15

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto (x + y)^2$.
Bestimme alle kritischen Punkte von f und entscheide, ob es sich dabei um lokale Maxima, lokale Minima oder weder noch handelt.